

# 熱伝導方程式の数値解法による燃え広がりのシミュレーション

石川 知一<sup>†</sup> 土橋 宜典<sup>‡</sup> 宮崎 玲<sup>‡</sup> 西田 友是<sup>†</sup>  
 東京大学<sup>†</sup> 北海道大学<sup>‡</sup>

## 1. はじめに

コンピュータグラフィックスの分野で、炎の表示をすることは映画のようなエンターテインメントの世界や消火・防災訓練への利用など多様な需要が考えられる。本研究では、火災時のシミュレーションへの適用も考え、材質を考慮した、燃え広がる様子のシミュレーション手法を提案する。

シミュレーション手法としては、熱伝導方程式の数値解法により、物質内での熱の伝導を計算し、物質固有の引火点に達しているかを判定する。また、熱拡散率と引火点という値を用いることにより、可燃性と不燃性物質を区別するだけでなく、燃えやすい材質と燃えにくい材質を表現することができる。

## 2. 関連研究

CG の分野で炎の表示には、炎を粒子で近似してパーティクルシステムを用いるものや、Beaudoin らによって提案された速度場によって流れるスケルトンを基に炎の揺らぎを表示する研究[1]、Lamorlette らによって提案された確率的な風の間によって炎が揺らめくように見せる研究[2]が行われている。これらの方法は、厳密な物理式を解いているわけではなく、ユーザーの要望に答えることを重視しているためエンターテインメントには有用かもしれないが、火災シミュレーションなど現実的なシミュレーションには不向きである。

そこで Nguyen らは燃焼現象を熱により気化した燃料、燃焼後の気体、さらに煙やすすの動向と考え、流体解析を用いて炎のシミュレーションを行った[3]。この手法の流体解析には Stam が提案した Stable Fluids[4]を用いている。

燃え広がる様子のシミュレーションには、Beaudoin らはポリゴンで表現された物体上を炎が燃え広がっていく様子を計算する方法を提案しているが、温度についてのシミュレーションがなく、さらに発火点や熱伝導率などの可燃物の性質は考慮されていない[1]。また、Nguyen らは可燃性物質と不燃性物質が炎の中に入った場合のシミュレーション結果を示しているが、物質に炎が燃え広がっていく様子までは表現していない[3]。

本稿で提案する手法は、熱伝導方程式を導入することにより、熱源から燃料となる可燃物に炎が燃え広がる様子のシミュレーションを可能にする。

## 3. 燃焼現象

物質の燃焼には、可燃物、熱源、酸素の3つの要素が必要とされ、どれか1つが欠けても成り立たない。本研究では、シミュレーション空間中に酸素は十分供給されているものとし、可燃物については、引火点と熱伝導率、比熱というパラメータを用意しておく。引火点とは、揮発性物質の蒸気が他の小さな炎によって発火する最低温度のことである。物質が燃焼するときの温度変化は図1のようになる[3]。

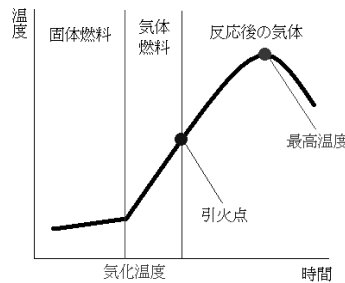


図1：燃焼時の温度変化

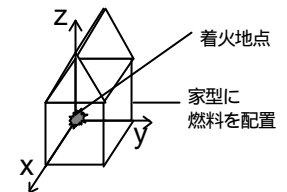


図2：シミュレーション空間

## 4. 炎の物理モデル

本節では提案する炎のモデルについて説明する。本モデルでは Stam の手法[4]を用いて速度場をシミュレートし、炎を構成する流体を速度場により輸送することで、炎の振舞いを計算する。

### 4.1 速度場の発展方程式

本シミュレーションでは燃焼現象を、化学反応中の1種類の気体によるものと簡略化して考える。本モデルでは速度場の時間発展は非圧縮性の Navier-Stokes 方程式に従う。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{r} \nabla p + n \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

$\mathbf{u}$ :速度  $r$ :気体の密度  $p$ :圧力  $n$ :粘性定数  $\mathbf{f}$ :外力

### 4.2 温度の発展方程式

空気など、気体の温度は速度場によって運ばれる。さらに、周囲の空気によって冷却される効果も考慮すると、温度  $T$  の時間発展は次式で与えられる[3]。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) T - c_T \left( \frac{T - T_{air}}{T_{max} - T_{air}} \right)^4 \quad (3)$$

$c_T$ :温度下降の定数  $T_{air}$ :周囲の空気温度

$T_{max}$ :反応における最大温度

Simulation of Spread Fire Using Numerical Method of Heat Conduction Equations

Tomokazu Ishikawa<sup>†</sup> Yoshinori Dobashi<sup>‡</sup> Ryo Miyazaki<sup>†</sup>  
 Tomoyuki Nishita<sup>†</sup>

<sup>†</sup>The University of Tokyo <sup>‡</sup>Hokkaido University

### 4.3 浮力

燃焼現象の外力として、温度による浮力が考えられる。本シミュレーションで、浮力は温度差によって生じ、次式で与えられる[3]。

$$\mathbf{f}_{buoy} = a(T - T_{air})\mathbf{z} \quad (4)$$

$a$ : 正の定数  $\mathbf{z}$ :  $z$  方向の単位ベクトル

### 4.4 熱伝導方程式と解法

燃料となる可燃性物質中の温度は、次の熱伝導方程式を計算することにより決定する。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5)$$

ここで、 $a$  は熱拡散率と呼ばれ、次式で定義される。

$$a = \frac{k}{c\rho}$$

$k$ : 熱伝導率  $c$ : 比熱  $\rho$ : 燃料の密度

この数値シミュレーションには、差分法を用いる。シミュレーション空間を幅  $h$  のグリッドに分割し、ある時刻  $t (\geq 0)$  における点  $(i, j, k)$  における温度を  $T_{i,j,k}^{(t)}$  とする。なお、初期温度 ( $t=0$  のとき) は空気の温度と同じとする。

1 タイムステップを  $\Delta t$  として、式(5)に現れる微分を差分によって近似する。時間微分と空間は、

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{1}{\Delta t} (T_{i,j,k}^{(t+\Delta t)} - T_{i,j,k}^{(t)}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \quad (7)$$

$$\frac{1}{2h^2} (T_{i+1,j,k}^{(t)} + T_{i-1,j,k}^{(t)} + T_{i,j+1,k}^{(t)} + T_{i,j-1,k}^{(t)} + T_{i,j,k+1}^{(t)} + T_{i,j,k-1}^{(t)} - 6T_{i,j,k}^{(t)})$$

$$+ \frac{1}{2h^2} (T_{i+1,j,k}^{(t+\Delta t)} + T_{i-1,j,k}^{(t+\Delta t)} + T_{i,j+1,k}^{(t+\Delta t)} + T_{i,j-1,k}^{(t+\Delta t)} + T_{i,j,k+1}^{(t+\Delta t)} + T_{i,j,k-1}^{(t+\Delta t)} - 6T_{i,j,k}^{(t+\Delta t)})$$

となる。以上の近似により 1 タイムステップ後の熱伝導について計算を行い、タイムステップごとに次式で着火するかどうかを判定する。

$$T_{i,j,k}^{(t)} \geq T_{ignition} \quad (8)$$

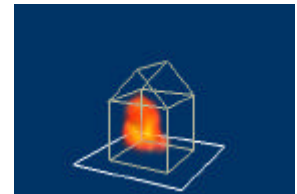
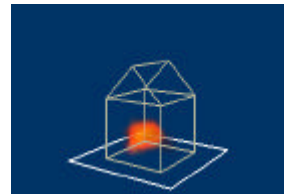
$T_{ignition}$  は物質固有の引火点を表しており、式(8)を満たしていれば、その燃料に対して着火するようにする。

我々が新たに導入した式(5)中の熱拡散率  $a$  と式(8)中の  $T_{ignition}$  により、様々な物質の燃える様子をシミュレートすることができる。

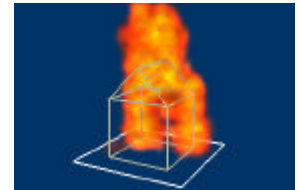
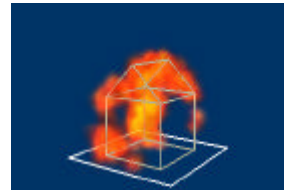
## 5. 結果

本モデルの可視化には、各ボクセルの中心に、中心が赤色でガウス分布に従って端に行くほど色が減衰したテクスチャを貼ったビルボードを配置する。テクスチャの色は最高温度に近づくほど黄色みを帯びるようにした。シミュレーションの計算時間は解析空間を  $20 \times 20 \times 60$  のボクセルで分割した場合、4fps であった。計算には Pentium 3 1.2GHz CPU, 256MB RAM マシンを用いた。図3に本手法の生成画

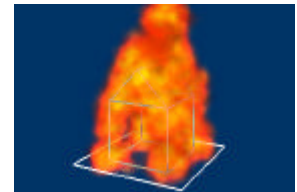
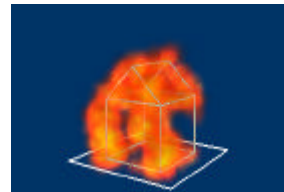
像を示す。シミュレーション空間には図2のように骨組みのみで作られた家を配置した。その柱の熱拡散率を、左の列の画像では  $a=0.6$ 、右の列の画像では  $a=1.2$  と変えてシミュレーションを行った。また  $T_{air}=300$ ,  $T_{ignition}=600$  とした。図3の画像は単に熱拡散率の違いをシミュレートした結果で、燃焼によって柱が崩れるなどの効果は付加されていない。



(a)  $t = 40$  のとき



(b)  $t = 170$  のとき



(c)  $t = 280$  のとき

図3: 結果画像

本手法では、燃料を配置した部分に炎が燃え広がっていく様子と、熱拡散率が大きいと全体への燃え広がりが速いことをシミュレートし可視化できる。

## 6. まとめ

本稿では火災シミュレーションにも適用できるように、可燃物の性質である熱拡散率や引火点を考慮した炎の燃え広がり方のモデルを提案した。そして、3次元空間におけるシミュレーション、およびその結果の可視化を実現した。

## 参考文献

- [1] P. Beaudoin, S. Paquet and P. Poulin, Realistic and Controllable Fire Simulation, *Proc. Graphics Interface 2001*, 159-166, 2001.
- [2] A. Lamorlette, N. Foster, Structural Modeling of Flames for a Production Environment, *Proc. SIGGRAPH 2002*, 729-735, 2002.
- [3] D. Nguyen, P. Fedkiw and H. Jensen, Physically Based Modeling and Animation of Fire, *Proc. SIGGRAPH 2002*, 721-728, 2002.
- [4] J. Stam, Stable Fluids *Proc. SIGGRAPH 99*, 121-128, 1999.