# 文脈計算の環境計算による解釈

櫻　田　英　樹†

本研究では，プログラミング言語における文脈と環境の関係を調べる．プログラミング言語において文脈とは，穴を持つプログラムのことである．文脈はプログラミング言語の操作的意味論を定義するときなどに用いられる．橋本，大堀 (1996) は文脈をファーストクラスのオブジェクトとして持つ型付き $\lambda$ 計算を考えた．ファーストクラスの文脈を用いて，モジュールシステムやモバイルコードを柔軟に扱うことができると期待されている．一方，プログラミング言語において環境とは，変数の名前とその値の組の集合のことである．環境は局所的束縛を扱うためにしばしば用いられる．LISP の let などは環境を作り，その中でプログラムを評価するものである．環境をファーストクラスのオブジェクトとして持つような $\lambda$ 計算はいくつかあり，佐藤，Burstall，桜井 (1999) による $\lambda\varepsilon$ はその 1 つである．ファーストクラスの環境を用いてオブジェクト指向プログラミングなどを扱うことができると期待されている．本研究では，橋本，大堀の型付文脈計算を，佐藤，Burstall，桜井の $\lambda\varepsilon$ を用いて解釈し，解釈の健全性を証明した．また，これにより型付文脈計算が強正規性を満たすことが分かった．

# An Interpretation of a Context Calculus in an Environment Calculus

Hideki Sakurada†

We investigate the relationship between contexts and environments in programming languages. In programming languages, a context is a program with a hole. We often use contexts in defining operational semantics of programming languages. Hashimoto and Ohori (1996) have studied a typed context calculus, a typed $\lambda$-calculus with first-class contexts. We expect that we can build flexible module systems using first-class contexts. On the other hand, an environment in programming languages is a set of variable-value tuples. We use environments to express local bindings. For example, "`let`" construct in LISP creates an environment and evaluates a program in it. There are several works on $\lambda$-calculus with first-class environments. $\lambda\varepsilon$ by Sato, Sakurai and Burstall (1999) is one of them. We expect that first-class environments are useful for object-oriented programming. In this work, we develop an interpretation of Hashimoto-Ohori's typed context calculus in $\lambda\varepsilon$. We prove its soundness and show that the context calculus is strongly normalizing.

## 1. はじめに

### 1.1 文　　脈

文脈とは，穴を持つプログラムである．文脈はもともとプログラムの意味を記述する際に用いられてきたものである[3)]．型無し $\lambda$ 計算では，

$$\lambda x.\lambda y.[]$$

は穴 [] を持つ文脈である．文脈には，穴埋めという操作が定義されている．上の文脈の穴を項 $(x\ y)$ で埋めると，

$$\lambda x.\lambda y.x\ y$$

という項が得られる．ここでは，項 $(x\ y)$ の自由変数 $x$ および $y$ がそれぞれ文脈の $\lambda x$ および $\lambda y$ によって束縛される．$\lambda$ 計算の通常の関数適用では，引数の自由変数が関数適用によって束縛されることはない．この点が文脈と関数の違いである．また，これは文脈では動的束縛が行われているということもできる．

近年，文脈をプログラミング言語の意味を記述するために補助的に用いるだけでなく，プログラミング言語の構成要素としても用いるという研究が進められている．Lee らは文脈を用いたプログラムの段階的作成[8)] を考えた．LISP の方言の 1 つである Scheme 言語を用いて彼らの方法を簡単に説明する．彼らは，次のような文脈をプログラム作成の初期状態として，

```
(letrec (□₁)
  □₂))
```

プログラムの断片を入力するごとに穴が埋まっていく

† NTT コミュニケーション科学基礎研究所
NTT Communication Science Laboratories

モデルを考えた．たとえば

```
(define (square num)
 (* num num))
```

を評価した後は次のような状態になる．

```
(letrec ((square
          (lambda (num) (* num num)))
         □₁)
 □₂))
```

そして

```
(length '(3 4))
```

のように (define ⋯) の形ではないプログラムを評価したときに穴 $\square_2$ を埋めて次の形になる．

```
(letrec ((square
          (lambda (num) (* num num)))
         (length
          (lambda (vector)
           (sqrt
            (+ (square (car x))
               (square (cdr x)))))))
 (length '(3 4)))
```

彼らは上のようなプログラムの断片をコンパイルして穴を持たないプログラムを作る方法を，$\lambda$ 計算の枠組みで定式化した．彼らの方法では，穴を持つプログラムは穴を持たないプログラムに変換されてから実行されるものである．このため，彼らの文脈はファーストクラスではない．つまり，文脈を返す関数や文脈を引数にとる関数などを扱うことができない．

これに対し，Hashimoto らは文脈も項の一種であるような型付き $\lambda$ 計算[6] として型付文脈計算を定義した．彼らの体系はファーストクラスの文脈を扱うことができる．ファーストクラスの文脈を用いることにより，より柔軟なモジュールシステムを作ることが可能であると期待されている．また，文脈をネットワークのホスト上に分散させ，それを実行時にリンクする試み[13] もなされている．本稿では，文脈を持つ $\lambda$ 計算（文脈計算）として，型付文脈計算を扱う．

### 1.2　環　　境

環境とは，変数とその値の 2 つ組の集合である．環境は変数に現在どのような値が束縛されているかを表す．環境はもともと，プログラミング言語の局所変数のしくみを実装するために LISP [9] などで用いられてきた．環境に対してその環境のもとで項を評価するという操作を考えることができる．次のプログラム

```
(let ((x 1)
      (y 2))
 (+ x y))
```

は環境 $\{(\mathtt{x},1),(\mathtt{y},2)\}$ を作ってそのもとで (+ x y) を評価する．この環境では $x$，$y$ はそれぞれ 1，2 に束縛されている．

処理系の内部で用いられている環境をプログラムから操作できるとしばしば便利なことがあるため，いくつかの Scheme 言語の処理系[5] では言語を独自に拡張してファーストクラスの環境を扱うための関数 the-environment と eval を持っている．the-environment はそれが評価された場所の環境を返し，eval は与えられた環境のもとで項を評価する．たとえば，次のプログラムでは環境 $\{(\mathtt{x},1),(\mathtt{y},2)\}$ を作って (+ x y) を評価する．

```
(define env
 (let ((x 1)
       (y 2))
  (the-environment)))


(eval '(+ x y) env)
```

ファーストクラスの環境を用いると，手続きのモジュール化やオブジェクト指向プログラミング[7] などが容易になる．

ファーストクラスの環境を持つ $\lambda$ 計算もいくつか研究されている．Nishizaki による $\lambda_{env}^{\rightarrow}$ [10] は the-environment と eval を持つ $\lambda$ 計算である．$\lambda_{env}^{\rightarrow}$ は明示的代入の体系[1] をベースにし，明示的代入 $M[N/x]$ の $[N/x]$ の部分も単独で項になるようにした体系である．

Sato らの $\lambda\varepsilon$ は，単純型付き $\lambda$ 計算に環境を追加した体系である[11]．彼らの体系は the-environment を持たない．一般に the-environment を持つ体系では，次のようなプログラムに相当する項での $x$ の出現は，それが自由な出現かどうかがわからない．

```
(eval 'x (the-environment))
```

このため，$\lambda_{env}^{\rightarrow}$ では $\alpha$ 変換等を定義することができず，簡約規則は制限されたものであった．$\lambda\varepsilon$ は the-environment を持たないため，変数の型情報を利用して束縛変数や $\alpha$ 合同性を定義することができる．その結果 $\lambda\varepsilon$ は $\lambda\beta$ 計算の保存的拡大になっている．

本稿では，環境を持つ $\lambda$ 計算（環境計算）の体系として，$\lambda\varepsilon$ を扱う．

### 1.3　解　　釈

本研究では型付文脈計算を $\lambda\varepsilon$ で解釈し，その健全性を示す．また，これを用いて型付文脈計算が強正規化可能であることを示す．

我々の解釈は以下の考えに基づいている．次の文脈

```
(let ((x 1)
      (y 2))
  (sqrt □))
```

を次の項

```
(+ (* x x) (* y y))
```

で穴埋めしたものは次のようにしてシミュレートできる．

```
((lambda (M)
   (let ((x 1)
         (y 2))
     (sqrt (M (the-environment)))))
 (lambda (e)
   (eval '(+ (* x x) (* y y)) e)))
```

ここでは，まず環境を引数とする関数を作り，その関数に the-environment が返す環境を渡している．

我々の解釈はこのシミュレーションの仕方を $\lambda$ 計算の枠組みで厳密に述べたものである．また，これが正しいシミュレーションになっていることは，この解釈が健全であることと等価である．

さらに，健全性を用いて型付文脈計算の強正規性を $\lambda\varepsilon$ の強正規性に帰着することができる．これにより型付文脈計算の強正規性を証明することができる．強正規性により，型付文脈計算の計算はその順序によらず必ず停止することが分かる．

本稿では，2 章で文献 6) に従って型付文脈計算を定義する．

次に 3 章で型付文脈計算で用いられている代入，穴埋めなどの諸概念を，型付文脈計算の型導出のうえにも定義し，その性質を調べ，健全性の証明に必要ないくつかの補題を導く．

4 章では文献 11) に従って $\lambda\varepsilon$ を定義する．また，後の証明に必要な補題を証明する．

これらの準備のもとで，型付文脈計算を $\lambda\varepsilon$ で解釈し（5 章），その健全性を証明する（6 章）．また，これを用いて型付文脈計算の強正規性を証明する．

最後にまとめと今後の課題について述べる（7 章）．

## 2. 型付文脈計算

本章では文献 6) に沿って型付文脈計算を定義する．

型付文脈計算は，単純型付き $\lambda$ 計算にファーストクラスの文脈を追加して得られる体系である．体系の定義の前に，これから用いられるいくつかの概念について簡単に説明する．

型付文脈計算では文脈も項の一部であるため，文脈を部分項として含むような文脈を作ることができる．このため，文脈 $\lambda x.\lambda y.[]$ を部分項とする文脈を次のように記述すると，どの穴がどの文脈に対応するのか分からない．

$\lambda z.[]\ \lambda x.\lambda y.[]$

このため型付文脈計算では，穴の名前 $X, Y, \ldots$ と，穴抽象 $\delta X.M, \delta Y.M, \ldots$ を用いる．これらはそれぞれ，$\lambda$ 計算の変数および $\lambda$ 抽象に対応する概念である．いま，仮に文脈を

$\delta Y.\lambda x.\lambda y.Y$

のように書くとする．このとき変数 $y$ について次のように $\alpha$ 変換を行うと矛盾が生じる．

$\delta Y.\lambda x.\lambda y.Y \equiv_\alpha \delta Y.\lambda x.\lambda w.Y$

実際に $Y$ を $y$ で埋めれば両辺は意味が異なる項であることが分かる．このような矛盾を回避するため，型付文脈計算では新しい変数 $x'$，$y'$ を導入して次のように書く．

$$\delta Y.\lambda x'.\lambda y'.Y^{\{x'/x, y'/y\}}$$

この $\{x'/x, y'/y\}$ によって文脈の中で束縛される変数がどの変数に置きかえられたかを記録しておく．そして穴 $Y$ を項 $M$ で埋めた場合には，$M$ 中の $x$，$y$ の自由な出現はそれぞれ $x'$，$y'$ に置きかえられる．このようにして矛盾なく $\alpha$ 変換ができる．

$$\begin{aligned}&\delta Y.\lambda x'.\lambda y'.Y^{\{x'/x, y'/y\}}\\ &\equiv_\alpha \delta Y.\lambda v.\lambda w.Y^{\{v/x, w/y\}}\end{aligned}$$

たとえば，この両辺の $Y$ を $(z\ x)$ で埋めて得られる項は次のように $\alpha$ 同値になる．

$\lambda x'.\lambda y'.z\ x' \equiv_\alpha \lambda v.\lambda w.z\ v$

型付文脈計算は，$\lambda$ 計算の関数適用に対応する概念として文脈適用を持つ．文脈

$$\delta X.\lambda z'.X^{\{z'/z\}}$$

の項 $z\ x$ への適用は，

$$\delta X.\lambda z'.X^{\{z'/z\}} \odot_{\{z/w\}} w\ x$$

と書かれる．これにより，変数 $c$ を用いて

$c \odot_{\{z/w\}} w\ x$

という項を考え，後で $c$ に文脈 $\delta X.\lambda z'.X^{\{z'/z\}}$ を代入する，ということができる．また，$w\ x$ 中の $w$ が文脈適用によって束縛されることが分かり，$\alpha$ 変換

$c \odot_{\{z/w\}} w\ x \equiv_\alpha c \odot_{\{z/v\}} v\ x$

も可能になる．このような方針で構築された型付文脈計算の体系を定義する．

まず，関数についての記法を準備しておく．

**記法 1** 関数 $f$ の定義域，値域をそれぞれ $\mathrm{dom}(f)$,

$\mathrm{cod}(f)$ と書く．$x{\not\in}\mathrm{dom}(f)$ のとき $f(x)=\perp$ と書く．関数 $f$，$g$ が $\mathrm{dom}(f){\cap}\mathrm{dom}(g)=\emptyset$ のとき，$f{\cup}g$ を $f;g$ と書く．また誤解のないときに限り ‘;’ を省略して $fg$ と書く．

$\delta X.\lambda z.X^{\{z/y\}}\odot_{\{y/x\}}x$ の $\{z/y\}$ や $\{y/x\}$ などを変数変換子と呼び，次のように定義する．体系が繁雑にならないようにするため，変数変換子の定義域と値域に条件を付けておく．

**定義 1（変数変換子）** 変数の有限集合から変数の有限集合への単写 $\nu$ が

$$\mathrm{dom}(\nu){\cap}\mathrm{cod}(\nu)=\emptyset$$

であるか，または恒等関数であるとき，$\nu$ を変数変換子と呼ぶ．変数変換子を表すメタ変数として $\nu,\mu,\ldots$ を用いる．

$$\mathrm{dom}(\nu)=\{x_1,\ldots,x_n\}$$
$$\nu(x_i)=y_i\ (i=1,\ldots,n)$$

のとき，

$$\{y_1/x_1,\ldots,y_n/x_n\}$$

のように 2 つ組 $y_i/x_i$ の集合で $\nu$ を表す．また，これを $\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}$ のように略記する．変数変換子 $\nu$，$\nu'$ が $\mathrm{dom}(\nu'){\subset}\mathrm{cod}(\nu)$ を満たすとき，変数変換子の合成 $\nu'{\circ}\nu$ を，

$$\mathrm{dom}(\nu'{\circ}\nu)\triangleq\mathrm{dom}(\nu)$$
$$(\nu'{\circ}\nu)(x)\triangleq\nu'(\nu(x))$$

と定義する．

型付文脈計算の型と項を定義する．以下では，基底型の集合，変数の集合および穴の集合があらかじめ与えられているとする．基底型を表すメタ変数に $b,b',\ldots$ 変数を表すメタ変数に $x,y,\ldots$ 穴を表すメタ変数に $X,Y,\ldots$ などを用いる．

**定義 2（型，項）** 型付文脈計算の型を次のように定義する．

$$\begin{array}{lcll}\tau & ::= & b & ;\text{基底型}\\ & | & \tau{\rightarrow}\tau & ;\text{関数型}\\ & | & (\tau,\Gamma){\Rightarrow}\tau & ;\text{文脈型}\end{array}$$

ただし，型環境 $\Gamma$ は変数の有限集合から型の集合への関数である．変数 $x_1,\ldots,x_n$ をそれぞれ型 $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ に対応させる型環境を

$$\{x_1:\sigma_1,\ldots,x_n:\sigma_n\}$$

と書く．また，$n$ が明らかな場合や，$n$ が重要でない場合には

$$\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}$$

と略記する．

基底型はたとえば整数型 `int` や真偽値型 `bool` などである．関数型はふつうの $\lambda$ 計算の関数の型である．文脈型

$$(\tau_1,\{x_1:\sigma_1,\ldots,x_n:\sigma_n\}){\Rightarrow}\tau_2$$

は，文脈の型である．この型を持つ文脈は，穴を型 $\tau_1$ を持つ項で埋めると，型 $\tau_2$ を持つ項が得られる．また，それぞれ型 $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ を持つ変数 $x_1,\ldots,x_n$ がこの文脈によって束縛される．

型付文脈計算の項を次のように定義する．

$$\begin{array}{lcll}M & ::= & x & ;\text{変数}\\ & | & \lambda x:\tau.M & ;\lambda\ \text{抽象}\\ & | & M\ M & ;\text{関数適用}\\ & | & X^{\nu} & ;\text{穴}\\ & | & \delta X.M & ;\text{文脈}\\ & | & M\odot_{\nu}M & ;\text{文脈適用}\end{array}$$

型付文脈計算の型システムを定義する．型付文脈計算では変数変換子を用いて文脈が束縛する変数と，その名前換えの情報を明示する．たとえば次の文脈

$$\delta X.\lambda x':\sigma.\lambda y.X^{\{x'/x\}}$$

の $\{x'/x\}$ は，この文脈が $x$ を束縛することと，穴 $X$ を項 $M$ で埋めたときは $M$ 中の自由な $x$ が $x'$ に置きかえられることを意味している．変数変換子 $\{x'/x\}$ は文脈の中で束縛される変数を宣言するものなので，$x'$ は自由であってはならない．つまり，次のような項は許されない．

$$\delta X.\lambda y:\sigma.X^{\{x'/x\}}$$

型付文脈計算では型導出の各段階で穴環境と呼ばれる関数を保持しておくことにより，この制約が満たされることを保証する．

**定義 3（穴環境）** 穴を変数変換子，型環境，文脈の 3 つ組に対応させる関数を穴環境と呼ぶ．穴環境を $\{X:(\tau,\Gamma,\nu),\ldots\}$ のように記述する．穴環境を表すメタ変数として $\Delta,\Delta',\ldots$ などを用いる．穴環境に対する演算 $Clos$ を**図 1** で定義する．

穴環境 $\{X:(\tau,\Gamma,\nu),\ldots\}$ は型 $\tau$ を持つ穴の出現に対し，$\mathrm{dom}(\Gamma)$ の変数はすでに束縛されており，$\mathrm{cod}(\nu)$ の変数はまだ束縛されていないことを表す．次の項

$$\lambda x':\sigma_1.X^{\{y'/y,x'/x\}}$$

に対応する穴環境は，たとえば

$$\{X:(\tau,\{x:\sigma_1\},\{y'/y\})\}$$

である．次の項のように，

$$\lambda y':\sigma_2.\lambda x':\sigma_1.X^{\{y'/y,x'/x\}}$$

$$
\begin{aligned}
\mathit{Clos}(\{x:\sigma\},(\tau,\Gamma,\nu)) &\stackrel{\triangle}{\equiv} (\tau,\Gamma,\nu) \qquad (x\not\in\mathrm{cod}(\nu)\ \text{のとき})\\
\mathit{Clos}(\{x:\sigma\},(\tau,\Gamma,\nu\{x/y\})) &\stackrel{\triangle}{\equiv} (\tau,\Gamma\{y:\sigma\},\nu)\\
\mathit{Clos}(\Gamma\{x:\sigma\},(\tau,\Gamma',\nu)) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \mathit{Clos}(\Gamma,\mathit{Clos}(\{x:\sigma\},(\tau,\Gamma',\nu)))\\
\\
\mathit{Clos}(\Gamma,\emptyset) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \emptyset\\
\mathit{Clos}(\Gamma,\Delta\{X:(\tau,\Gamma',\nu)\}) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \mathit{Clos}(\Gamma,\Delta)\{X:\mathit{Clos}(\Gamma,(\tau,\Gamma',\nu))\}
\end{aligned}
$$

**図 1** *Clos* の定義
Fig. 1 Definition of *Clos*.

$$
\begin{array}{ll}
(\mathsf{var}) & \dfrac{}{\Gamma,\emptyset\vdash x:\tau}\ \Gamma(x)=\tau\\[2ex]
(\mathsf{abs}) & \dfrac{\Gamma\{x:\tau_1\},\Delta\vdash M:\tau_2}{\Gamma,\mathit{Clos}(\{x:\tau_1\},\Delta)\vdash\lambda x:\tau_1.M:\tau_1\to\tau_2}\\[2ex]
(\mathsf{app}) & \dfrac{\Gamma,\Delta_1\vdash M_1:\tau_1\to\tau_2 \quad \Gamma,\Delta_2\vdash M_2:\tau_1}{\Gamma,\Delta_1;\Delta_2\vdash M_1\ M_2:\tau_2}\\[2ex]
(\mathsf{hole}) & \dfrac{}{\Gamma,\{X:(\tau,\emptyset,\nu)\}\vdash X^{\nu}:\tau}\ \mathrm{cod}(\nu)\subset\mathrm{dom}(\Gamma)\\[2ex]
(\mathsf{habs}) & \dfrac{\Gamma_1,\Delta\{X:(\tau_1,\Gamma_2,\emptyset)\}\vdash M:\tau_2}{\Gamma_1,\Delta\vdash\delta X.M:(\tau_1,\Gamma_2)\Rightarrow\tau_2}\\[2ex]
(\mathsf{happ}) & \dfrac{\Gamma_1,\Delta_1\vdash M_1:(\tau_1,\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\})\Rightarrow\tau_2 \quad \Gamma_1\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\Delta_2\vdash M_2:\tau_1}{\Gamma_1,\Delta_1;\mathit{Clos}(\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\Delta_2)\vdash M_1\odot_{\{\widetilde{x}/\widetilde{x'}\}}M_2:\tau_2}
\end{array}
$$

**図 2** 型付文脈計算の型付け規則
Fig. 2 Typing rules of Typed Context Calculus.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{x:\mathtt{int}\},\{X:(\mathtt{int},\emptyset,\{x/a\})\}\vdash X^{\{x/a\}}:\mathtt{int}}}{\emptyset,\{X:(\mathtt{int},\{a:\mathtt{int}\},\emptyset)\}\vdash\lambda x:\mathtt{int}.X^{\{x/a\}}:\mathtt{int}\to\mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\emptyset,\emptyset\vdash 3:\mathtt{int}}}{\emptyset,\{X:(\mathtt{int},\{a:\mathtt{int}\},\emptyset)\}\vdash(\lambda x:\mathtt{int}.X^{\{x/a\}})\ 3:\mathtt{int}}}{\emptyset,\emptyset\vdash\delta X.(\lambda x:\mathtt{int}.X^{\{x/a\}})3:(\mathtt{int},\{a:\mathtt{int}\})\Rightarrow\mathtt{int}}
$$

**図 3** 型付文脈計算の型導出の例
Fig. 3 Example of type inference.

さらに $\lambda y'$ によって束縛された場合には，次の穴環境が対応する．

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Clos}(\{y':\sigma_2\},\{X:(\tau,\{x:\sigma_1\},\{y'/y\})\})\\
&\qquad\equiv\{X:(\tau,\{x:\sigma_1,y:\sigma_2\},\emptyset)\}
\end{aligned}
$$

**定義 4（型付け規則）** 型付文脈計算の型判定は 4 つ組 $\Gamma,\Delta\vdash M:\tau$ である．型付文脈計算の項の型付け規則を**図 2** で定義する．

型導出を表すメタ変数に $\mathcal{D},\mathcal{D}',\ldots$ などを用いる．$\Gamma,\Delta\vdash M:\tau$ を導く型導出 $\mathcal{D}$ を

$$
\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma,\Delta\vdash M:\tau\end{array}
$$

と書く．

特に，$\mathcal{D}$ から abs，habs を用いてできる型導出をそれぞれ $\lambda x:\tau_1.\mathcal{D}$, $\delta X.\mathcal{D}$ と略記する．$\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$ から app，happ を用いてできる型導出をそれぞれ $\mathcal{D}_1\ \mathcal{D}_2$ および

$$
\mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{x}/\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\}}\mathcal{D}_2
$$

と略記する．

**図 3** に型導出の例を示す．

前述したように，$f;g$ という表記は関数 $f$，$g$ が

$$
\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)=\emptyset
$$

を満たすときにのみ許される．型付文脈計算の型システムでは，$f;g$ と書いたときには，$f$，$g$ についての上の条件が暗黙に仮定されているとする．たとえば app では $\mathrm{dom}(\Delta_1)\cap\mathrm{dom}(\Delta_2)=\emptyset$ であると仮定する．この仮定により，項 $\delta X.M$ が型を持つとき $M$ に $X$ は

1 度だけ必ず出現する．

型付文脈計算の自由変数，束縛変数などを定義する．

$\lambda$ 抽象 $\lambda x:\tau.M$ では $M$ 中の変数 $x$ の自由な出現は束縛される．文脈適用 $M_1 \odot_\nu M_2$ では $\mathrm{dom}(\nu)$ の要素の $M_2$ 中の自由な出現は束縛される．$\delta X.M$ によって $M$ 中の $X$ の自由な出現が束縛される．

**定義 5** 項 $M$ に対し，$M$ に出現する自由変数の集合 $\mathrm{FV}(M)$，束縛変数の集合 $\mathrm{BV}(M)$，自由変数の候補の集合 $\mathrm{FVC}(M)$，インタフェース変数の候補の集合 $\mathrm{IVC}(M)$ および自由穴の集合 $\mathrm{FH}(M)$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FV}(x) &\triangleq \{x\}\\
\mathrm{FV}(\lambda x:\tau.M) &\triangleq \mathrm{FV}(M)-\{x\}\\
\mathrm{FV}(M_1\ M_2) &\triangleq \mathrm{FV}(M_1)\cup\mathrm{FV}(M_2)\\
\mathrm{FV}(X^\nu) &\triangleq \emptyset\\
\mathrm{FV}(\delta X.M) &\triangleq \mathrm{FV}(M)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FV}(M_1\odot_\nu M_2) \triangleq\ & \mathrm{FV}(M_1)\\
&\cup(\mathrm{FV}(M_2)-\mathrm{dom}(\nu))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BV}(x) &\triangleq \emptyset\\
\mathrm{BV}(\lambda x:\tau.M) &\triangleq \mathrm{BV}(M)\cup\{x\}\\
\mathrm{BV}(M_1\ M_2) &\triangleq \mathrm{BV}(M_1)\cup\mathrm{BV}(M_2)\\
\mathrm{BV}(X^\nu) &\triangleq \emptyset\\
\mathrm{BV}(\delta X.M) &\triangleq \mathrm{BV}(M)\\
\mathrm{BV}(M_1\odot_\nu M_2) &\triangleq \mathrm{BV}(M_1)\cup\mathrm{BV}(M_2)\cup\mathrm{dom}(\nu)\\
\mathrm{FVC}(x) &\triangleq \emptyset\\
\mathrm{FVC}(\lambda x:\tau.M) &\triangleq \mathrm{FVC}(M)-\{x\}\\
\mathrm{FVC}(M_1\ M_2) &\triangleq \mathrm{FVC}(M_1)\cup\mathrm{FVC}(M_2)\\
\mathrm{FVC}(X^\nu) &\triangleq \mathrm{cod}(\nu)\\
\mathrm{FVC}(\delta X.M) &\triangleq \mathrm{FVC}(M)\\
\mathrm{FVC}(M_1\odot_\nu M_2) &\triangleq \mathrm{FVC}(M_1)\\
&\quad\cup(\mathrm{FVC}(M_2)-\mathrm{dom}(\nu))\\
\mathrm{IVC}(x) &\triangleq \emptyset\\
\mathrm{IVC}(\lambda x:\tau.M) &\triangleq \mathrm{IVC}(M)\\
\mathrm{IVC}(M_1\ M_2) &\triangleq \mathrm{IVC}(M_1)\cup\mathrm{IVC}(M_2)\\
\mathrm{IVC}(X^\nu) &\triangleq \mathrm{dom}(\nu)\\
\mathrm{IVC}(\delta X.M) &\triangleq \mathrm{IVC}(M)\\
\mathrm{IVC}(M_1\odot_\nu M_2) &\triangleq \mathrm{IVC}(M_1)\cup\mathrm{IVC}(M_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FH}(x) &\triangleq \emptyset\\
\mathrm{FH}(\lambda x:\tau.M) &\triangleq \mathrm{FH}(M)\\
\mathrm{FH}(M_1\ M_2) &\triangleq \mathrm{FH}(M_1)\cup\mathrm{FH}(M_2)\\
\mathrm{FH}(X^\nu) &\triangleq \{X\}\\
\mathrm{FH}(\delta X.M) &\triangleq \mathrm{FH}(M)-\{X\}\\
\mathrm{FH}(M_1\odot_\nu M_2) &\triangleq \mathrm{FH}(M_1)\cup\mathrm{FH}(M_2)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{IVC}(M)$ をインタフェース変数の候補の集合と呼ぶのは，$\mathrm{IVC}(M)$ の要素が文脈の変数と，文脈を適用する項の変数を結び付けるためだけに使われるためである．たとえば文脈適用

$$\delta X.\lambda z'.X^{\{z'/z\}}\odot_{\{z/w\}}w\ x$$

では，$z$ は $z'$ と $w$ を結び付けるためだけに用いられる．

後に詳しく定義するが，文脈適用

$$\delta X.\lambda z'.X^{\{z'/z\}}\odot_{\{z/w\}}w\ x$$

は，次のように計算される．

$$\delta X.\lambda z'.X^{\{z'/z\}}\odot_{\{z/w\}}w\ x\rightarrow\lambda z'.z'\ x$$

ここでは，項 $(w\ x)$ の変数 $w$ がいったん $z$ に置きかえられ，さらにそれが $z'$ に置きかえられる．この変数の置きかえの操作を変数変換と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
\overline{\nu}(x) &= \begin{cases}\nu(x) & x\in\mathrm{dom}(\nu)\ のとき\\ x & x\notin\mathrm{dom}(\nu)\ のとき\end{cases}\\
\overline{\nu}(\lambda x:\tau.M) &= \lambda x:\tau.\overline{\nu|_{(\mathrm{dom}(\nu)-\{x\})}}(M)\\
\overline{\nu}(M_1\ M_2) &= \overline{\nu}(M_1)\ \overline{\nu}(M_2)\\
\overline{\nu}(X^{\nu'}) &= X^{\nu\circ\nu'}\\
\overline{\nu}(\delta X.M) &= \delta X.\overline{\nu}(M)\\
\overline{\nu}(M_1\odot_{\nu'}M_2) &= \overline{\nu}(M_1)\\
&\quad\odot_{\nu'}\overline{\nu|_{(\mathrm{dom}(\nu)-\mathrm{dom}(\nu'))}}(M_2)
\end{aligned}
$$

**図 4** 変数変換の定義
Fig. 4 Definition of variable renaming.

**定義 6（変数変換）** 変数変換子 $\nu$ および項 $M$ に対し，$M$ に $\nu$ を適用して得られる項 $\overline{\nu}(M)$ を**図 4** で定義する．

項の間の $\alpha$ 合同性を変数変換を用いて定義する．たとえば，次の両辺は $\alpha$ 合同である．

$$
\begin{aligned}
&\delta X.\lambda z'.X^{\{z'/z\}}\odot_{\{z/w\}}w\ x\\
&\equiv_\alpha \delta X.\lambda v.X^{\{v/z\}}\odot_{\{z/u\}}u\ x
\end{aligned}
$$

**定義 7（$\alpha$ 合同性）** 項の合同関係 $\equiv_\alpha$ を次の等式を含む最小の合同関係とする．

- 変数 $y$ が $M$ に出現しないとき，

$$\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda y.\overline{\{y/x\}}(M)$$

- $\{\widetilde{x'}\}$ の各変数が $M_2$ に出現しないとき，

$$M_1 \odot_{\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}} M_2 \equiv_\alpha M_1 \odot_{\{\widetilde{y}/\widetilde{x'}\}} \overline{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\}}(M_2)$$

$\alpha$ 合同性について，次が成り立つ．

**補題 1** $\Gamma, \Delta \vdash M : \tau$ かつ $M \equiv_\alpha M'$ ならば $\Gamma, \Delta \vdash M' : \tau$.

$\alpha$ 合同な項を同一視することにより，必要に応じて束縛変数の名前を変えることができる．これにより，以降では項に出現する束縛変数はすべて互いに異なり，項に出現する束縛変数の集合は同じ項に出現する自由変数の集合，自由変数の候補の集合，インタフェース変数の候補の集合と共通部分を持たないものと仮定する．

型付文脈計算の簡約規則は代入と穴埋めを用いて定義される．穴と穴埋めの関係は，$\lambda$ 計算の変数と代入の関係と同じである．

**定義 8（型付文脈計算の代入，穴埋め）** 型付文脈計算の代入および穴埋めを次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\{M/x\}x &\triangleq M \\
\{M/x\}(\lambda x:\tau.N) &\triangleq \lambda x:\tau.\{M/x\}N \\
\{M/x\}(N_1\ N_2) &\triangleq \{M/x\}N_1\ \{M/x\}N_2 \\
\{M/x\}(X^\nu) &\triangleq X^\nu \\
\{M/x\}(\delta X.N) &\triangleq \delta X.\{M/x\}N \\
\{M/x\}(N_1 \odot_\nu N_2) &\triangleq (\{M/x\}N_1) \odot_\nu \{M/x\}N_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x[M/X] &\triangleq x \\
(\lambda x:\tau.N)[M/X] &\triangleq \lambda x:\tau.(N[M/X]) \\
(N_1\ N_2)[M/X] &\triangleq N_1[M/X]\ (N_2[M/X]) \\
Y^\nu[M/X] &\triangleq \begin{cases} \overline{\nu}(M) & Y = X \text{ のとき} \\ Y^\nu & Y \neq X \text{ のとき} \end{cases} \\
(\delta Y.N)[M/X] &\triangleq \begin{cases} \delta Y.N & Y = X \text{ のとき} \\ \delta Y.(N[M/X]) & Y \neq X \text{ のとき} \end{cases} \\
(N_1 \odot_\nu N_2)[M/X] &\triangleq N_1[M/X] \odot_\nu (N_2[M/X])
\end{aligned}
$$

型付文脈計算の簡約関係を定義する．

**定義 9（型付文脈計算の簡約関係）** 型付文脈計算の項の簡約関係 $\to_\beta$ および $\to_{fill}$ をそれぞれ

- ($\beta$ 簡約) $\mathrm{FH}(M_1) = \mathrm{FH}(M_2) = \emptyset$ のとき
  $(\lambda x:\tau.M_1)M_2 \to_\beta \{M_2/x\}M_1$
- ($fill$ 簡約)
  $(\delta X.M_1) \odot_\nu M_2 \to_{fill} M_1[X^\nu/X][M_2/X]$

から生成される簡約関係とする．また $\to \triangleq \to_\beta \cup \to_{fill}$ と定義する．以降では，関係 $R$ の推移閉包，反射推移閉包をそれぞれ $R^+$，$R^*$ と書く．

$\to_\beta$ に関する条件のうち，$\mathrm{FH}(M_1) = \emptyset$ は

$$(\lambda x'.X^{\{x'/x\}})\ M$$

のような関数適用は $X$ に項が埋められるまで簡約を遅らせるためのものである．また $\mathrm{FH}(M_2) = \emptyset$ は，

$$\delta X.(\lambda x.f\ x\ x)\ X^\nu \to_\beta \delta X.\lambda x.f\ X^\nu\ X^\nu$$

のような簡約を許したときに $X$ が複数出現してしまうのを禁止するためのものである．

型付文脈計算の簡約関係について，型保存定理および合流性が成り立つ．

**定理 1（型保存定理）** $\Gamma, \Delta \vdash M : \tau$ かつ $M \to^* M'$ ならば $\Gamma, \Delta \vdash M' : \tau$.

**定理 2（合流性）** 項 $M_0$ が型を持つとき，項 $M_1$，$M_2$ について $M_0 \to^* M_1$，$M_0 \to^* M_2$ ならば，$M_1 \to^* M_3$，$M_2 \to^* M_3$ を満たす $M_3$ が存在する．

## 3. 型付文脈計算の型導出の簡約

本章では前章で項に対して定義した代入，変数変換，穴埋め，$\alpha$ 合同性および簡約関係を，型付文脈計算の型導出に対しても定義する．

**定義 10（拡張）** 型導出

$$\overset{\mathcal{D}}{\Gamma, \Delta \vdash M : \tau}$$

が

$$x \notin \mathrm{dom}(\Gamma) \cup \mathrm{BV}(M)$$

を満たすとき，$\mathcal{D}$ に出現する型判定

$$\Gamma_0, \Delta_0 \vdash M_0 : \tau_0$$

をすべて

$$\Gamma_0\{x:\tau'\}, \Delta_0 \vdash M_0 : \tau_0$$

で置きかえて得られる型導出もまた正しい型導出になる．この型導出を $\mathcal{D}\{x:\tau'\}$ と書く．また，

$$\mathcal{D}\{x_1:\tau_1, \cdots, x_n:\tau_n\} \triangleq \mathcal{D}\{x_1:\tau_1\} \cdots \{x_n:\tau_n\}$$

と定義する．

**定義 11（変数変換）** 型導出

$$\overset{\mathcal{D}}{\Gamma\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}, \Delta \vdash M : \tau}$$

および変数変換子 $\nu = \{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\}$ が

$$\mathrm{cod}(\nu) \cap (\mathrm{dom}(\Gamma) \cup \mathrm{BV}(M) \cup \mathrm{IVC}(M)) = \emptyset$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\nu}\left(\overline{\Gamma\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\},\emptyset\vdash y:\tau}\right) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \overline{\Gamma\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\emptyset\vdash\overline{\nu}(y):\tau}\\
\overline{\nu}\,(\lambda y:\tau_1.\mathcal{D}_1) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \lambda y:\tau_1.\overline{\nu}(\mathcal{D}_1)\\
\overline{\nu}\,(\mathcal{D}_1\ \mathcal{D}_2) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \overline{\nu}(\mathcal{D}_1)\ \overline{\nu}(\mathcal{D}_2)\\
\overline{\nu}\left(\overline{\Gamma\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\},\{X:(\tau,\emptyset,\mu)\}\vdash X^{\mu}:\tau}\right) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \overline{\Gamma\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\{X:(\tau,\emptyset,\nu\circ\mu)\}\vdash X^{\nu\circ\mu}:\tau}\\
\overline{\nu}\,(\delta X.\mathcal{D}_1) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \delta X.\overline{\nu}(\mathcal{D}_1)\\
\overline{\nu}\left(\mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{y'}/\widetilde{y:\sigma}\}}\mathcal{D}_2\right) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \overline{\nu}(\mathcal{D}_1)\odot_{\{\widetilde{y'}/\widetilde{y:\sigma}\}}\overline{\nu}(\mathcal{D}_2)
\end{aligned}
$$

**図 5** 型導出の変数変換
Fig. 5 Variable renaming of type derivation.

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{D}'/x\}\left(\overline{\Gamma\{x:\tau'\},\emptyset\vdash y:\tau}\right) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \begin{cases} \mathcal{D}' & \text{if } x=y\\ \overline{\Gamma,\emptyset\vdash y:\tau} & \text{otherwise}\end{cases}\\
\{\mathcal{D}'/x\}\,(\lambda y:\tau_1.\mathcal{D}_1) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \lambda y:\tau_1.\{\mathcal{D}'\{y:\tau_1\}/x\}\mathcal{D}_1\\
\{\mathcal{D}'/x\}\,(\mathcal{D}_1\ \mathcal{D}_2) &\stackrel{\triangle}{\equiv} (\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}_1\ \{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}_2)\\
\{\mathcal{D}'/x\}\left(\overline{\Gamma\{x:\tau'\},\{X:(\tau,\emptyset,\nu)\}\vdash X^{\nu}:\tau}\right) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \overline{\Gamma,\{X:(\tau,\emptyset,\nu)\}\vdash X^{\nu}:\tau}\\
\{\mathcal{D}'/x\}\,(\delta X.\mathcal{D}_1) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \delta X.\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}_1\\
\{\mathcal{D}'/x\}\left(\mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x:\sigma}\}}\mathcal{D}_2\right) &\stackrel{\triangle}{\equiv} \left(\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x:\sigma}\}}\{\mathcal{D}'\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}/x\}(\mathcal{D}_2)\right)
\end{aligned}
$$

**図 6** 型導出の代入
Fig. 6 Substitution of type derivation.

を満たすとき，型導出

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\nu}(\mathcal{D})}{\Gamma\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\nu(\Delta)\vdash\overline{\nu}(M):\tau}$$

を**図 5** で定義する．ただし，

$$\Delta=\{X_1:(\tau_1,\Gamma_1,\nu_1),\ldots\}$$

のとき，

$$\nu(\Delta)\stackrel{\triangle}{\equiv}\{X_1:(\tau_1,\Gamma_1,\nu\circ\nu_1),\ldots\}$$

とする．

**定義 12（代入）** 型導出

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}'}{\Gamma,\emptyset\vdash M':\tau'}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}}{\Gamma\{x:\tau'\},\Delta\vdash M:\tau}$$

が

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BV}(M)\cap\mathrm{BV}(M')&=\emptyset\\
x&\notin\mathrm{FVC}(M)
\end{aligned}
$$

を満たすとき，代入 $\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}$ を**図 6** のように定義する．

**定義 13（型導出の穴埋め）** 型導出

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}}{\Gamma\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\Delta\{X:(\tau',\Gamma',\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\})\}\vdash M:\tau}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}'}{\Gamma;\Gamma'\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\},\Delta'\vdash M':\tau'}$$

について

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{BV}(M)\cup\{\widetilde{x'}\})\cap(\mathrm{IVC}(M')\cup\mathrm{BV}(M'))&=\emptyset\\
\mathrm{BV}(M)\cap(\mathrm{dom}(\Gamma')\cup\{\widetilde{x}\})&=\emptyset
\end{aligned}
$$

が成り立つとき，穴埋め

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}[\mathcal{D}'/X]}{\Gamma\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\Delta;\Delta''\vdash M[M'/X]:\tau}$$

を**図 7** で定義する．ただし，

$$\Delta''=\mathit{Clos}(\Gamma',\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\}(\Delta'))$$

とする．

**定義 14** 型導出の $\alpha$ 合同性を**図 8** の等式から生成される合同関係として定義する．

以下，$\alpha$ 合同な型導出は同一視する．この同一視のもとで，型導出の簡約関係を定義する．

**定義 15（簡約関係）** 型導出の簡約関係 $\rightarrow_{\beta}$，$\rightarrow_{fill}$

$$
\begin{aligned}
(\lambda y:\tau_1.\mathcal{D}_1)\,[\mathcal{D}'/X] &\triangleq \lambda y:\tau_1.\mathcal{D}_1[\mathcal{D}'\{y:\tau_1\}/X]\\
(\mathcal{D}_1\ \mathcal{D}_2)\,[\mathcal{D}'/X] &\triangleq \mathcal{D}_1[\mathcal{D}'/X]\ \mathcal{D}_2\\
& \quad X{\in}\mathrm{FH}(\mathcal{D}_1)\text{ のとき}\\
(\mathcal{D}_1\ \mathcal{D}_2)[\mathcal{D}'/X] &\triangleq \mathcal{D}_1\ (\mathcal{D}_2[\mathcal{D}'/X])\\
& \quad X{\in}\mathrm{FH}(\mathcal{D}_2)\text{ のとき}\\
\left(\overline{\Gamma\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\{X:(\tau,\emptyset,\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\})\}\vdash X^{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\}}:\tau}\right)[\mathcal{D}'/X] &\triangleq \overline{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\}}(\mathcal{D}')\\
(\delta Y.\mathcal{D}_1)\,[\mathcal{D}'/X] &\triangleq \delta Y.\mathcal{D}_1[\mathcal{D}'/X]\\
\left(\mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}}\mathcal{D}_2\right)[\mathcal{D}'/X] &\triangleq \mathcal{D}_1[\mathcal{D}'/X]\odot_{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}}\mathcal{D}_2\\
& \quad X{\in}\mathrm{FH}(\mathcal{D}_1)\text{ のとき}\\
\left(\mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}}\mathcal{D}_2\right)[\mathcal{D}'/X] &\triangleq \mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}}(\mathcal{D}_2[\mathcal{D}'\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}/X])\\
& \quad X{\in}\mathrm{FH}(\mathcal{D}_2)\text{ のとき}
\end{aligned}
$$

**図 7** 型導出の穴埋め
Fig. 7 Hole filling of type derivation.

$$
\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\Gamma\{x:\tau_1\},\Delta\vdash M:\tau_1}}{\Gamma,\mathit{Clos}(\{x:\tau_1\},\Delta)\vdash\lambda x:\tau_1.M:\tau_1{\to}\tau_2}\ \equiv_\alpha\ \lambda y:\tau_1.\overline{\{y/x\}}(\mathcal{D})
$$

$$
y{\notin}\mathrm{BV}(M){\cup}\mathrm{dom}(\Gamma){\cup}\{x\}{\cup}\mathrm{IVC}(M)\text{ のとき}
$$

$$
\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma,\Delta_1\vdash M_1:(\tau_1,\widetilde{x}){\Rightarrow}\tau_2}\quad \overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\},\Delta_2\vdash M_2:\tau_1}}{\Gamma,\Delta_1;\mathit{Clos}(\Gamma_2,\Delta_2)\vdash M_1\odot_{\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}}M_2:\tau_2}\ \equiv_\alpha\ \mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{y}/\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\}}\overline{\{\widetilde{x}/\widetilde{x'}\}}(\mathcal{D}_2)
$$

$$
\mathrm{BV}(\{\widetilde{x'}\}){\cap}(\mathrm{BV}(M_2){\cup}\mathrm{dom}(\Gamma){\cup}\{\widetilde{x}\}{\cup}\mathrm{IVC}(M_2))=\emptyset\text{ のとき}
$$

**図 8** 型導出の $\alpha$ 合同性
Fig. 8 $\alpha$-congruence between type derivations.

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{x:\tau_1\},\emptyset\vdash M_1:\tau_2}}{\Gamma,\emptyset\vdash\lambda x:\tau_1.M_1:\tau_1{\to}\tau_2}\quad \overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma,\emptyset\vdash M_2:\tau_1}}{\Gamma,\emptyset\vdash(\lambda x:\tau_1.M_1)\ M_2:\tau_2}\ \to_\beta\ \{\mathcal{D}_2/x\}\mathcal{D}_1
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma,\Delta_1;\{X:(\tau_1,\{\widetilde{y}:\widetilde{\sigma}\})\}\vdash M_1:\tau_2}}{\Gamma,\Delta_1\vdash\delta X.M_1:(\tau_1,\{\widetilde{y}:\widetilde{\sigma}\}){\Rightarrow}\tau_2}\quad \overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\},\Delta_2\vdash M_2:\tau_1}}{\Gamma,\Delta_1,\mathit{Clos}(\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\},\Delta_2)\vdash M_1\odot_{\{\widetilde{y:x}\}}\delta X.M_2:\tau_2}\ \to_{fill}\ \mathcal{D}_1[X^{\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}}/X][\mathcal{D}_2/X]
$$

**図 9** 型導出の簡約関係
Fig. 9 Reduction relation between type derivations.

を，それぞれ**図 9** の 2 つの等式から生成される簡約関係とする．また，$\to\triangleq\to_\beta\cup\to_{fill}$ と定義する．

以上のように定義した簡約関係について次が成り立つ．これにより，型導出の簡約関係が，項の簡約関係を自然に拡張したものであることが分かる．

**補題 2** 型導出

$$\overset{\mathcal{D}}{\Gamma,\Delta\vdash M:\tau}$$

および項 $M'$ が

$$M{\to}M'$$

を満たすならば，次を満たす型導出 $\mathcal{D}'$ が存在する．

$$\Gamma,\Delta \overset{\mathcal{D}}{\vdash} M:\tau \to \Gamma,\Delta \overset{\mathcal{D}'}{\vdash} M':\tau$$

## 4. 環境計算：$\lambda\varepsilon$

本章では文献 11) に従って $\lambda\varepsilon$ を定義する．

$\lambda\varepsilon$ は単純型付き $\lambda$ 計算にファーストクラスの環境を追加した体系である．

$\lambda\varepsilon$ では変数 $x_1,\ldots,x_n$ を項 $M_1,\ldots,M_n$ に束縛する環境を

$\{M_1/x_1,\ldots,M_n/x_n\}$

と書き，この環境のもとでの項 $N$ の評価を

$\{M_1/x_1,\ldots,M_n/x_n\}[\![N]\!]$

と書く．これは LISP の

```
(let ((x1  M1)
         ...
      (xn  Mn))
  N)
```

というプログラムに対応する．$\lambda\varepsilon$ はファーストクラスの環境を持つので，環境を引数にとるような関数を書くことができる．たとえば環境を引数にとり，その環境での変数 $x$ の値を返す関数を次のように書くと，

$\lambda y.[\![y[\![x]\!]]\!]$

$x$ が $y$ によって束縛されるかどうかが引数が与えられるまで分からず，$\alpha$ 変換などができなくなる．$\lambda\varepsilon$ では，各変数に型を明示的に書くことでこの問題を解決している．上の例では，次のように書く．

$$\lambda y^{\{x^\sigma\}}.[\![y^{\{x^\sigma\}}[\![x^\sigma]\!]]\!]$$

ここでは，$\{x^\sigma\}$ は型 $\sigma$ を持つ変数 $x^\sigma$ を束縛する環境の型である．このようにして設計された体系 $\lambda\varepsilon$ を以下で定義する．

あらかじめ基底型の集合および型無しの変数の集合が与えられているとする．基底型を表すメタ変数に $b,b',\cdots$ などを用いる．型無しの変数を表すメタ変数に $x,y,\cdots$ などを用いる．

**定義 16（型，項）** $\lambda\varepsilon$ の型，環境型，項を次のように定義する．

$$\begin{array}{lcll}
\tau & ::= & b & ;\text{基底型}\\
 & | & \tau\to\tau & ;\text{関数型}\\
 & | & \{x^\tau,\ldots,x^\tau\} & ;\text{環境型}\\
M & ::= & x^\tau & ;\text{変数}\\
 & | & \lambda x.M & ;\lambda\ \text{抽象}\\
 & | & M\ M & ;\text{関数適用}\\
 & | & \{M/x^\tau,\ldots,M/x^\tau\} & ;\text{環境}\\
 & | & M[\![M]\!] & ;\text{評価}
\end{array}$$

変数 $x^\tau$ はその型も変数の一部であるとする．すなわち，$\tau\neq\tau'$ ならば $x^\tau \not\equiv x^{\tau'}$ である．また，誤解のないときに限り $x^\tau$ を単に $x$ と書く．

環境型は変数の集合である．したがって，たとえば $\{x^\tau,y^\sigma\}$ と $\{y^\sigma,x^\tau\}$ を同一視する．環境型は，変数に型を対応させる関数と見なすことができる．たとえば環境型

$\{x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}\}$

は，各変数 $x_i^{\tau_i}$ に型 $\tau_i$ を対応させる関数である．このため環境型のことを型環境と呼び，メタ変数 $\Gamma,\Gamma',\cdots$ などを用いて表すことがある．誤解のないときに限り，

$\{x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}\}$

を $\{\widetilde{x^\tau}\}$ のように省略する．

環境 $\{M_1/x_1^{\tau_1},\ldots,M_n/x_n^{\tau_n}\}$ は 2 つ組 $M_i/x_i^{\tau_i}$ の集合である．したがって，たとえば $\{M/x^\tau,N/y^\sigma\}$ と $\{N/y^\sigma,M/x^\tau\}$ を同一視する．環境を変数に項を対応させる関数と見なすことがある．誤解のないときに限り，

$\{M_1/x_1^{\tau_1},\ldots,M_n/x_n^{\tau_n}\}$

を $\{\widetilde{M}/\widetilde{x^\tau}\}$ のように省略する．

**定義 17（型付け規則）** $\lambda\varepsilon$ の型判定は 3 つ組 $\Gamma\vdash M:\tau$ で与えられる．$\lambda\varepsilon$ の型付け規則を**図 10** で定義する．

上の型付け規則では，型を持つ項に対して，その型導出は一意に定まる．これにより次のように定義できる．

**定義 18（自由変数，項の型）** 型を持つ項 $M$ に出現する自由変数 $\mathrm{FV}(M)$，$M$ の型 $\mathrm{TY}(M)$ を次のように定義する．$\Gamma\vdash M:\tau$ のとき，

$$\mathrm{TY}(M) \triangleq \tau$$
$$\mathrm{FV}(M) \triangleq \Gamma$$

と定義する．

本稿では以下，型を持つ項のみを考える．項に出現する自由変数の集合，項の型を定義しておく．

項の $\alpha$ 合同性を定義するために，型付文脈計算で定義されていた変数変換子および変数変換を $\lambda\varepsilon$ にも導入する．

**定義 19（変数変換子，変数変換）** 次の形をした環境 $E$ を変数変換子と呼ぶ．

$E \equiv \{x_1'^{\sigma_1}/x_1^{\sigma_1},\ldots,x_n'^{\sigma_n}/x_n^{\sigma_n}\}$

変数変換子 $E$ および変数の集合

$\Gamma=\{x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\}\subset\{x_1,\ldots,x_n\}$

に対し，$E$ の $\Gamma$ への制限 $E|_\Gamma$ を

$$E|_\Gamma \equiv \{x_{i_1}'^{\sigma_{i_1}}/x_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\ldots,x_{i_m}'^{\sigma_{i_m}}/x_{i_m}^{\sigma_{i_m}}\}$$

と定義する．

| | |
|---|---|
| (var) | $\overline{\{x^\tau\}\vdash x^\tau : \tau}$ |
| (abs) | $\dfrac{\Gamma\vdash M : \tau_2}{\Gamma - \{x:\tau_1\}\vdash \lambda x^{\tau_1}.M : \tau_1\rightarrow\tau_2}$ |
| (app) | $\dfrac{\Gamma_1\vdash M_1 : \tau_1\rightarrow\tau_2 \quad \Gamma_2\vdash M_2 : \tau_1}{\Gamma_1\cup\Gamma_2\vdash M_1\ M_2 : \tau_2}$ |
| (env) | $\dfrac{\Gamma_1\vdash M_1 : \tau_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n\vdash M_n : \tau_n}{\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_n\vdash\{M_1/x_1^{\tau_1},\ldots,M_n/x_n^{\tau_n}\} : \{x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}\}}$ |
| (eval) | $\dfrac{\Gamma_1\vdash M_1 : \Gamma_2 \quad \Gamma_3\vdash M_2 : \tau}{\Gamma_1\cup(\Gamma_3-\Gamma_2)\vdash M_1[\![M_2]\!] : \tau}$ |

**図 10** $\lambda\varepsilon$ の型付け規則
Fig. 10 Typing of $\lambda\varepsilon$.

変数変換子 $E=\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\}$ に対し，各 $x'_i$ が $M$ に出現しないとき，$E$ による項 $M$ の変数変換 $\overline{E}(M)$ を次のように定義する．

$$\overline{E}(y) \triangleq \begin{cases} x'_i & y=x_i\in\{\widetilde{x}\} \text{ のとき} \\ y & y\notin\{\widetilde{x}\} \text{ のとき}\end{cases}$$
$$\overline{E}(\lambda w.M) \triangleq \lambda w.\overline{E|_{(\mathrm{TY}(E)-\{x\})}}(M)$$
$$\overline{E}(M_1\ M_2) \triangleq \overline{E}(M_1)\ \overline{E}(M_2)$$
$$\overline{E}(\{\widetilde{N}/\widetilde{y}\}) \triangleq \{\overline{E}(\widetilde{N})/\widetilde{y}\}$$
$$\overline{E}(F[\![M]\!]) \equiv F[\![\overline{E|_{(\mathrm{TY}(E)-\mathrm{TY}(F))}}(M)]\!]$$

変数変換 $\overline{E}(M)$ は型を保存する．

**補題 3** 変数変換子 $E$，項 $M$ に対し $\overline{E}(M)$ が定義されているものとする．このとき，
$\{x_1{}^{\sigma_1},\ldots,x_n{}^{\sigma_n}\}\vdash M:\tau$
ならば
$\{\overline{E}(x_1{}^{\sigma_1}),\ldots,\overline{E}(x_n{}^{\sigma_n})\}\vdash\overline{E}(M):\tau$
である．

**証明** $M$ の構成に関する帰納法． □

項の $\alpha$ 合同関係を変数変換を用いて定義する．

**定義 20（$\alpha$ 合同性）** 項の $\alpha$ 合同関係 $\equiv_\alpha$ を次の等式から生成される合同関係とする．

$$\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda y.\overline{\{y/x\}}(M)$$

以下，$\alpha$ 合同な項を同一視する．

項の簡約関係を定義する．簡約関係は明示的代入[1)]の簡約関係と同様に，$\beta$ 変換を表す $\rightarrow_\beta$ と代入操作を表す $\rightarrow_\varepsilon$ の 2 つからなる．$\lambda\varepsilon$ では環境がファーストクラスであるため，
$\{\{M/x\}/y\}[\![y[\![x]\!]]\!]$
のように，環境の変数への代入を扱うことができる．この点がこれまでの明示的代入の体系と大きく異なる点である．

**定義 21（簡約規則）** $\lambda\varepsilon$ の簡約関係 $\rightarrow_\beta$，$\rightarrow_\varepsilon$ をそれぞれ**図 11** の $\rightarrow_\beta$，$\rightarrow_\varepsilon$ から生成される簡約関係とする．また，$\rightarrow\triangleq\rightarrow_\beta\cup\rightarrow_\varepsilon$ と定義する．$\rightarrow_\varepsilon$ から生成される同値関係を $=_\varepsilon$ 書く．

$$\begin{array}{rll}
(\lambda x.M_1)\ M_2 & \rightarrow_\beta & \{M_2/x\}[\![M_1]\!] \\
M_1[\![M_2]\!] & \rightarrow_\varepsilon & M_2 \\
& & \mathrm{TY}(M_1)\cap\mathrm{FV}(M_2)=\emptyset \text{ のとき} \\
\{\widetilde{M}/\widetilde{x}\}[\![x_i]\!] & \rightarrow_\varepsilon & M_i \qquad x_i\in\{\widetilde{x}\} \text{ のとき} \\
M_1[\![\lambda x.M_2]\!] & \rightarrow_\varepsilon & \lambda x.M_1[\![M_2]\!] \\
& & x\notin\mathrm{TY}(M_1)\cup\mathrm{FV}(M_2) \text{ のとき} \\
M_1[\![N_1\ N_2]\!] & \rightarrow_\varepsilon & M_1[\![N_1]\!]\ M_1[\![N_2]\!] \\
M[\![\{\widetilde{N}/\widetilde{x}\}]\!] & \rightarrow_\varepsilon & \{M[\![\widetilde{N}]\!]/\widetilde{x}\} \\
M[\![N[\![x]\!]]\!] & \rightarrow_\varepsilon & M[\![N]\!][\![x]\!] \quad x\in\mathrm{TY}(N) \text{ のとき}
\end{array}$$

**図 11** $\lambda\varepsilon$ の簡約関係
Fig. 11 Reduction relation of $\lambda\varepsilon$.

項 $M$，$N$ に対し，$M\rightarrow_\varepsilon{}^*N$ かつ，$N\rightarrow_\varepsilon L$ なる $L$ が存在しないとき，$N$ を $M$ の $\varepsilon$ 正規形であるといい，これを $\varepsilon(M)$ と書く．

$\lambda$ 抽象の評価
$M_1[\![\lambda x.M_2]\!]\rightarrow\lambda x.M_1[\![M_2]\!]$
の際の条件
$x\notin\mathrm{TY}(M_1)\cup\mathrm{FV}(M_2)$
は，$\alpha$ 合同な項を適当にとることによりつねに満たすことができる．

$\varepsilon$ 正規形は次のように特徴付けられることが知られている．

**補題 4** $\varepsilon$ 正規形の集合は次の文法で生成される項の集合と一致する．
$N ::= x \mid \lambda x.N \mid N_1\ N_2 \mid M[\![x]\!]$
ただし，$M$ は $\{\widetilde{M}/\widetilde{x}\}$ の形をしていない $\varepsilon$ 正規形で，$x\in\mathrm{TY}(M)$ であるとする．

以下，この文法に従った帰納法を $\varepsilon$ 正規形の構成に関する帰納法と呼ぶ．

$\lambda\varepsilon$ の簡約関係に対し，型保存定理が成り立つこと

が知られている．

**定理 3（型保存定理）** $\Gamma \vdash M : \tau$ かつ $M \to M'$ ならばある $\Gamma' \subset \Gamma$ に対し $\Gamma' \vdash M' : \tau$.

$\to_\varepsilon$ は合流性と強正規性を満たす．これにより，任意の項 $M$ に対して $\varepsilon$ 正規形 $\varepsilon(M)$ がただ 1 つ存在することが分かる．

**定理 4（$\to_\varepsilon$ の合流性）** 型を持つ項 $M$ について，$M \to_\varepsilon{}^* M_1$，$M \to_\varepsilon{}^* M_2$ ならば，$M_1 \to_\varepsilon{}^* M_3$, $M_2 \to_\varepsilon{}^* M_3$ を満たす $M_3$ が存在する．

**定理 5（$\to_\varepsilon$ の強正規性）** $\Gamma \vdash M : \tau$ ならば

$$M \to_\varepsilon M_1 \to_\varepsilon M_2 \to \cdots$$

を満たす無限列 $M, M_1, M_2, \ldots$ は存在しない．

また，$\to$ についても合流性と強正規性が成り立つ．

**定理 6（$\to$ の合流性）** $\Gamma \vdash M : \tau$ かつ，$M \to^* M_1$, $M \to^* M_2$ ならば，$M_1 \to^* M_3$, $M_2 \to^* M_3$ を満たす $M_3$ が存在する．

**定理 7（強正規性）** $\Gamma \vdash M : \tau$ ならば

$$M \to M_1 \to M_2 \to \cdots$$

を満たす無限列 $M_1, M_2, \ldots$ は存在しない．

以上で $\lambda\varepsilon$ を定義し，その性質をいくつか紹介した．以下では，後の健全性の証明に必要な補題をいくつか証明する．

$F[\![E[\![M]\!]]\!]$ のような入れ子になった評価について，次が成り立つことが知られている．

**補題 5** $\varepsilon$ 正規形 $M$ および，項 $E$, $N$ が

$$x \notin \mathrm{TY}(E) \cup \mathrm{FV}(E)$$

を満たすとき，

$$E[\![\{N/x\}[\![M]\!]]\!] =_\varepsilon \{E[\![N]\!]/x\}[\![E[\![M]\!]]\!]$$

**補題 6** 型を持つ項 $M$, $M'$ に対し $M \to M'$ ならば $\varepsilon(M) \to^* \varepsilon(M')$

**証明** 項の集合上の関係 $\Rightarrow$ を文献 11) と同様に定義する．いま，$M \to M'$ とする．$M \to_\beta M'$ ならば，文献 11) の補題 5 より，$\varepsilon(M) \Rightarrow \varepsilon(M')$. $M \to_\varepsilon M'$ ならば $\varepsilon(M) \equiv \varepsilon(M')$ なので，いずれの場合も $\varepsilon(M) \Rightarrow^* \varepsilon(M')$. また，文献 11) の補題 2 より，$\varepsilon(M) \to^* \varepsilon(M')$. □

変数変換と，評価，簡約関係および $\varepsilon$ 正規形の関係について補題をいくつか証明する．

**補題 7** 変数変換子 $E$ および 項 $M$ が

$$\mathrm{FV}(E) \cap (\mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{BV}(M)) = \emptyset$$

を満たすとき，

$$E[\![M]\!] =_\varepsilon \overline{E}(M)$$

**証明** $\varepsilon$ 正規形についての帰納法によって，$M$ が $\varepsilon$ 正規形の場合を示せる．これを用いて，

$$E[\![M]\!] =_\varepsilon E[\![\varepsilon(M)]\!] =_\varepsilon \overline{E}(\varepsilon(M)) =_\varepsilon \overline{E}(M)$$

□

**補題 8** $\overline{E}(M)$ が定義されているとき，$M \to_\varepsilon M'$ ならば $\overline{E}(M) \to_\varepsilon \overline{E}(M')$

**証明** $M$ の構成に関する帰納法．□

**補題 9** $\mathrm{dom}(E) \cap (\mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{BV}(M)) = \emptyset$ を満たす変数変換子 $E$, 項 $M$ について，

$$\overline{E}(\varepsilon(M)) \equiv \varepsilon(\overline{E}(M)).$$

**証明**

$$\begin{aligned}\overline{E}(\varepsilon(M)) &=_\varepsilon \overline{E}(M) \qquad (\text{補題 } 8)\\ &=_\varepsilon \varepsilon(\overline{E}(M))\end{aligned}$$

$\overline{E}(\varepsilon(M))$, $\varepsilon(\overline{E}(M))$ はともに $\varepsilon$ 正規形なので，$\overline{E}(\varepsilon(M)) \equiv \varepsilon(\overline{E}(M))$ □

## 5. 型付文脈計算の $\lambda\varepsilon$ での解釈

1 章で説明した方針で，型付文脈計算を $\lambda\varepsilon$ で解釈する．我々の解釈は，直感的には文脈

$$(\delta X.\cdots X^{\{\widetilde{y'}/\widetilde{y}\}}\cdots)\odot_\nu M$$

に対して項

$$(\lambda x.\cdots x\ \{\widetilde{y'}/\widetilde{y}\}\cdots)\ \lambda e.e[\![\nu(M)]\!]$$

を対応させるものである．しかし，型付文脈計算の項に対して $\lambda\varepsilon$ の項を対応させようとすると，型情報が不足してしまう．たとえば，型付文脈計算の最も簡単な項である変数 $x$ の解釈は $\lambda\varepsilon$ の変数であるべきだが，$\lambda\varepsilon$ の変数は型情報を明示的に持つため，$x$ の型が分からなければ解釈を与えることができない．このため，解釈を型付文脈計算の型導出 $\mathcal{D}$ に対して $\lambda\varepsilon$ の項 $\langle\mathcal{D}\rangle$ を対応させる関数 $\langle\cdot\rangle$ によって与える．

以下，型付文脈計算の型，型導出および変数変換子に対して順に $\lambda\varepsilon$ での解釈を与える．

解釈に先だって，型付文脈計算の変数 $x$, 穴変数 $X$ をそれぞれ $\lambda\varepsilon$ の型無しの変数 $\langle x\rangle$, $\langle X\rangle$ に対応させる単写 $\langle\cdot\rangle$ が与えられているとする．また，型付文脈計算の基底型 $b$ についても $\lambda\varepsilon$ の基底型 $\langle b\rangle$ が存在するものとする．

**定義 22（型の解釈）** 対応 $\langle\cdot\rangle$ を型付文脈計算の型に対し次のように拡張する．

$$\langle\tau_1 \to \tau_2\rangle \triangleq \langle\tau_1\rangle \to \langle\tau_2\rangle$$

$$\begin{aligned}&\langle(\tau_1, \{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n\}) \Rightarrow \tau_2\rangle\\ &\triangleq (\{\langle x_1\rangle^{\langle\sigma_1\rangle}, \ldots, \langle x_n\rangle^{\langle\sigma_n\rangle}\} \to \langle\tau_1\rangle) \to \langle\tau_2\rangle\end{aligned}$$

型付文脈計算の型導出 $\mathcal{D}$ の解釈 $\langle\mathcal{D}\rangle$ を次のように定義する．

**定義 23（型導出の解釈）** 型付文脈計算の型導出 $\mathcal{D}$ に対し，$\lambda\varepsilon$ の項 $\langle\mathcal{D}\rangle$ を**図 12** のように対応させる．

$$\left\langle \frac{}{\Gamma, \emptyset \vdash x : \tau} \right\rangle \stackrel{\triangle}{\equiv} \langle x \rangle^{\langle \tau \rangle}$$

$$\left\langle \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma\{x : \tau_1\}, \Delta \vdash M : \tau_2\end{array}}{\Gamma, \mathit{Clos}(\{x : \tau_1\}, \Delta) \vdash \lambda x : \tau_1.M : \tau_1 \rightarrow \tau_2} \right\rangle \stackrel{\triangle}{\equiv} \lambda \langle x \rangle^{\langle \tau_1 \rangle}.\langle \mathcal{D}_1 \rangle$$

$$\left\langle \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma, \Delta_1 \vdash M_1 : \tau_1 \rightarrow \tau_2\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ \Gamma, \Delta_2 \vdash M_2 : \tau_1\end{array}}{\Gamma, \Delta_1; \Delta_2 \vdash M_1 \ M_2 : \tau_2} \right\rangle \stackrel{\triangle}{\equiv} \langle \mathcal{D}_1 \rangle \ \langle \mathcal{D}_2 \rangle$$

$$\left\langle \frac{}{\Gamma, \{X : (\tau, \emptyset, \{\widetilde{y}/\widetilde{x}\})\} \vdash X^{\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}} : \tau} \right\rangle \stackrel{\triangle}{\equiv} \langle X \rangle^{\left\{\langle \Gamma(\widetilde{y}) \rangle\right\} \rightarrow \langle \tau \rangle}$$

$$\left\langle \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \Gamma, \Delta\{\tau_1, \Gamma_2, \emptyset\} \vdash M : \tau_2\end{array}}{\Gamma_1, \Delta \vdash \delta X.M : \{\tau_1, \Gamma_2\} \Rightarrow \tau_2} \right\rangle \stackrel{\triangle}{\equiv} \lambda \langle X \rangle^{\langle \Gamma \rangle \rightarrow \langle \tau_2 \rangle}.\langle \mathcal{D} \rangle$$

$$\left\langle \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma_1, \Delta_1 \vdash M_1 : (\tau_1, \{\widetilde{x} : \widetilde{\sigma}\}) \Rightarrow \tau\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ \Gamma_1\{\widetilde{x'} : \widetilde{\sigma}\}, \Delta_2 \vdash M_2 : \tau_1\end{array}}{\Gamma_1, \Delta_1; \mathit{Clos}(\Gamma_2, \Delta_2) \vdash M_1 \odot_{\{\widetilde{x}/\widetilde{x'}\}} M_2 : \tau} \right\rangle \stackrel{\triangle}{\equiv} \varepsilon((\lambda \langle X \rangle.\langle \mathcal{D}_1 \rangle \ \ \lambda e.e[\![\langle \mathcal{D}_3 \rangle]\!]) \ (\lambda e'.e'[\![\langle \mathcal{D}_2 \rangle]\!]))$$

**図 12** 解釈 $\langle \cdot \rangle$
Fig. 12 Interpretation $\langle \cdot \rangle$.

$$\left\langle \frac{\dfrac{\dfrac{}{\{x : \mathtt{int}\}, \{X : (\mathtt{int}, \emptyset, \{x/a\})\} \vdash X^{\{x/a\}} : \mathtt{int}}}{\emptyset, \{X : (\mathtt{int}, \{a : \mathtt{int}\}, \emptyset)\} \vdash \lambda x : \mathtt{int}.X^{\{x/a\}} : \mathtt{int} \rightarrow \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\emptyset, \emptyset \vdash 3 : \mathtt{int}}}{\dfrac{\emptyset, \{X : (\mathtt{int}, \{a : \mathtt{int}\}, \emptyset)\} \vdash (\lambda x : \mathtt{int}.X^{\{x/a\}}) \ 3 : \mathtt{int}}{\emptyset, \emptyset \vdash \delta X.(\lambda x : \mathtt{int}.X^{\{x/a\}}) 3 : (\mathtt{int}, \{a : \mathtt{int}\}) \Rightarrow \mathtt{int}}} \right\rangle$$

$$\equiv \lambda \langle X \rangle^{\{\langle a \rangle^{\langle \mathtt{int} \rangle}\} \rightarrow \langle \mathtt{int} \rangle}.(\lambda \langle x \rangle.\langle X \rangle \ \ \{\langle x \rangle / \langle a \rangle\}) \ 3$$

**図 13** 解釈の例
Fig. 13 Example of interpretation.

ただし，$\langle \mathcal{D}_1 \odot \mathcal{D}_2 \rangle$ の解釈では $e$，$e'$，$\langle X \rangle$ はそれぞれ型 $\{\langle \widetilde{x}' \rangle^{\widetilde{\langle \sigma \rangle}}\}$，$\{\langle \widetilde{x}' \rangle^{\widetilde{\langle \sigma \rangle}}\}$，$\{\langle \widetilde{x} \rangle^{\widetilde{\langle \sigma \rangle}}\} \rightarrow \langle \tau_1 \rangle$ を持つ新しい変数．$\mathcal{D}_3$ は次の型導出とする．

$$\mathcal{D}_3 \equiv \frac{}{\Gamma\{\widetilde{x} : \widetilde{\sigma}\}, \{X : (\tau_1, \emptyset, \widetilde{\sigma})\} \vdash X^{\{x/x'\}} : \tau_1}$$

**図 13** に解釈の例を示す．

**定義 24（変数変換子）** $\mathrm{cod}(\nu) \subset \mathrm{dom}(\Gamma)$ のとき，$\lambda\varepsilon$ の環境 $\langle \Gamma, \nu \rangle$ を次のように定義する．

$$\langle \Gamma, \{y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n\} \rangle$$
$$\stackrel{\triangle}{\equiv} \{\langle y_1 \rangle^{\langle \sigma_1 \rangle} / \langle x_1 \rangle^{\langle \sigma_1 \rangle}, \ldots, \langle y_n \rangle^{\langle \sigma_1 \rangle} / \langle x_n \rangle^{\langle \sigma_1 \rangle}\}$$

ただし，$\sigma_i \equiv \Gamma(y_i)$ とする．

## 6. 解釈の健全性

本章では，前節で定義した解釈が両体系の簡約規則について健全であることを証明する．具体的には，型付文脈計算で

$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$

ならば，

$\langle \mathcal{D} \rangle \rightarrow^{+} \langle \mathcal{D}' \rangle$

であることを証明する．

以下，次のような方針で証明する．まず，型付文脈計算の変数変換が $\lambda\varepsilon$ の変数変換に対応するすること（補題 10）を示し，これを用いて $\alpha$ 合同性に関しての健全性（補題 11）を示す．次に，型付文脈計算の代入と穴埋めについての補題を証明する（補題 12，13）．これらを用いて $\rightarrow_{\beta}$，$\rightarrow_{fill}$ および $\rightarrow$ が $\lambda\varepsilon$ の $\rightarrow^{+}$ に対応することを証明する（定理 8，9，10）．

**補題 10（変数変換についての健全性）** 型付文脈計算の型導出

$$\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \Gamma\{\widetilde{x} : \widetilde{\sigma}\}, \Delta \vdash M : \tau\end{array}$$

および，変数変換子 $\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}$ に対し $\overline{\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}}(\mathcal{D})$ が定義されているとき，

$$\left\langle \overline{\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}}(\mathcal{D}) \right\rangle \equiv \overline{\{\langle \widetilde{y} \rangle^{\widetilde{\langle \sigma \rangle}} / \langle \widetilde{x} \rangle^{\widetilde{\langle \sigma \rangle}}\}}(\langle \mathcal{D} \rangle)$$

**証明** $\mathcal{D}$ の構成に関する帰納法で証明する．最後に用いた推論規則が happ のときのみ示す．$\mu$，$E$，$\mu'$，$E'$ を

$$\begin{aligned}\mu &= \overline{\{\widetilde{y}/\widetilde{x}\}}\\ E &= \{\langle\widetilde{y}\rangle^{\widetilde{\langle\sigma\rangle}}/\langle\widetilde{x}\rangle^{\widetilde{\langle\sigma\rangle}}\}\\ \mu' &= \mu|_{(\mathrm{dom}(\mu)-\mathrm{TY}(e))}\\ E' &= E|_{(\mathrm{dom}(E)-\mathrm{TY}(e))}\end{aligned}$$

とする．変数変換の定義と帰納法の仮定により次がいえる．

$$\begin{aligned}&(\lambda\langle X\rangle.\langle\overline{\mu}(\mathcal{D}_1)\rangle\ \lambda e.e[\![\mathcal{D}_3]\!])\\ &\quad\lambda e.e[\![\overline{\mu'}(\mathcal{D}_2)]\!])\\ &\equiv(\lambda\langle X\rangle.\overline{E}(\langle\mathcal{D}_1\rangle)\ \lambda e.e[\![\mathcal{D}_3]\!])\\ &\quad\lambda e.e[\![\overline{E'}(\langle\mathcal{D}_2\rangle)]\!]\\ &\quad(\text{帰納法の仮定})\\ &\equiv\overline{E}((\lambda\langle X\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle\ \lambda e.e[\![\mathcal{D}_3]\!])\\ &\quad\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!])\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}&\langle\overline{\mu}(\mathcal{D})\rangle\\ &\equiv\varepsilon(\overline{E}((\lambda\langle X\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle\ \lambda e.e[\![\mathcal{D}_3]\!])\ \lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]))\\ &\equiv\overline{E}(\varepsilon((\lambda\langle X\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle\ \lambda e.e[\![\mathcal{D}_3]\!])\ \lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]))\\ &\quad(\text{補題 }9)\\ &\equiv\overline{E}(\langle\mathcal{D}\rangle)\end{aligned}$$

□

型付文脈計算では互いに $\alpha$ 合同な型導出を同一視した．同一視した 2 つの型導出の解釈もまた $\alpha$ 合同性によって同一視できなければならない．

**補題 11（$\alpha$ 合同性についての健全性）** 型付文脈計算の型導出 $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$ について，$\mathcal{D}_1\equiv_\alpha\mathcal{D}_2$ ならば $\langle\mathcal{D}_1\rangle\equiv_\alpha\langle\mathcal{D}_2\rangle$

**証明** $\alpha$ 合同性の定義に関する帰納法．補題 10 を用いて

$$\langle\lambda x:\tau.\mathcal{D}\rangle\equiv_\alpha\left\langle\lambda y:\tau.\overline{\{y/x\}}\mathcal{D}\right\rangle$$

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{y}/\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\}}\mathcal{D}_2\right\rangle\\ &\equiv\left\langle\mathcal{D}_1\odot_{\{\widetilde{y}/\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\}}\overline{\{\widetilde{y'}/\widetilde{x}\}}\mathcal{D}_2\right\rangle\end{aligned}$$

がいえる． □

型付文脈計算の代入と $\lambda\varepsilon$ の評価は，$\rightarrow_\varepsilon$ を通して次のように対応する．

**補題 12（代入についての健全性）** 型導出

$$\dfrac{\mathcal{D}}{\Gamma\{x:\tau'\},\Delta\vdash M:\tau}\qquad\dfrac{\mathcal{D}'}{\Gamma,\emptyset\vdash M':\tau'}$$

および変数 $x$ に対して代入 $\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}$ が定義されているとき，

$$\{\langle\mathcal{D}'\rangle/\langle x\rangle^{\langle\tau'\rangle}\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]\rightarrow_\varepsilon{}^+\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\right\rangle$$

**証明** $\mathcal{D}$ の構成に関する帰納法．(happ) のときのみ示す．$E\equiv\{\langle\mathcal{D}'\rangle/\langle x\rangle\}$ として，

$$\begin{aligned}E[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]\ &\equiv\ E[\![\varepsilon((\lambda\langle X\rangle.\langle\mathcal{D}\rangle\\ &\qquad\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!])\\ &\qquad\quad\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!])]\!]\\ &=_\varepsilon\ E[\![(\lambda\langle X\rangle.\langle\mathcal{D}\rangle\\ &\qquad\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!])\\ &\qquad\quad\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]]\!]\\ &\rightarrow_\varepsilon{}^+\ (\lambda\langle X\rangle.E[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]\\ &\qquad\lambda e.E[\![e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!]]\!])\\ &\qquad\quad\lambda e.E[\![e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]]\!]\\ &=_\varepsilon\ (\lambda\langle X\rangle.E[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]\\ &\qquad\lambda e.e[\![E[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!]]\!])\\ &\qquad\quad\lambda e.e[\![E[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]]\!]\\ &\qquad(\text{補題 }5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\rightarrow_\varepsilon{}^+\ (\lambda\langle X\rangle.\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\right\rangle\\ &\qquad\lambda e.e[\![\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}_3\right\rangle]\!])\\ &\qquad\quad\lambda e.e[\![\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}_2\right\rangle]\!]\\ &\quad(\text{帰納法の仮定})\\ &\rightarrow_\varepsilon{}^*\ \varepsilon((\lambda\langle X\rangle.\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\right\rangle\\ &\qquad\lambda e.e[\![\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}_3\right\rangle]\!])\\ &\qquad\quad\lambda e.e[\![\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}_2\right\rangle]\!])\\ &\rightarrow_\varepsilon{}^*\ \left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\right\rangle.\end{aligned}$$

ここで，$\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\rangle$ が $\varepsilon$ 正規形であることと，$\rightarrow_\varepsilon{}^*$ の合流性（定理 4）を用いて，

$$\{\langle\mathcal{D}'\rangle/\langle x\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]\rightarrow^*\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\right\rangle.$$

また，$\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\rangle$ が評価 $-[\![-]\!]$ の形になることはないので，

$$\{\langle\mathcal{D}'\rangle/\langle x\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]\not\equiv\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\right\rangle.$$

したがって

$$\{\langle\mathcal{D}'\rangle/\langle x\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]\rightarrow_\varepsilon{}^+\left\langle\{\mathcal{D}'/x\}\mathcal{D}\right\rangle.$$

□

型付文脈計算の穴埋めと $\lambda\varepsilon$ の評価は，$\rightarrow^+$ を通して次のように対応する．

**補題 13（穴埋めについての健全性）** 型導出

$$\dfrac{\mathcal{D}}{\Gamma_1\{\widetilde{x'}:\widetilde{\sigma}\},\Delta\{X:(\tau_1,\Gamma_2,\{\widetilde{x'}/\widetilde{x}\})\}\vdash M:\tau_2}$$

および，$\mathcal{D}'$ に対して穴埋め $\mathcal{D}[\mathcal{D}'/X]$ が定義されているとき，

$$\begin{aligned}&\{\lambda e^{\Gamma_2\left\{\widetilde{\langle x\rangle}^{\widetilde{\langle\sigma\rangle}}\right\}}.e[\![\langle\mathcal{D}'\rangle]\!]/\langle X\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]\\ &\rightarrow^+\langle\mathcal{D}[\mathcal{D}'/X]\rangle.\end{aligned}$$

**証明** $\mathcal{D}$ についての帰納法．hole，happ のときのみ示す．$N\equiv\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}'\rangle]\!]$ とおく．

(hole)

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\{N/\langle X\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]} \\
\equiv & \{N/\langle X\rangle\}[\![\langle X\rangle\ \{\langle\widetilde{x}'\rangle/\langle\widetilde{x}\rangle\}]\!] \\
\to_{\varepsilon}{}^{+} & N\ \{\langle\widetilde{x}'\rangle/\langle\widetilde{x}\rangle\} \\
\to_{\beta} & \{\{\langle\widetilde{x}'\rangle/\langle\widetilde{x}\rangle\}/e\}[\![e[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]]\!] \\
\to_{\varepsilon}{}^{+} & \varepsilon(\{\{\langle\widetilde{x}'\rangle/\langle\widetilde{x}\rangle\}/e\}[\![e[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!]]\!]) \\
\equiv & \varepsilon(\{\langle\widetilde{x}'\rangle/\langle\widetilde{x}\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!])\quad (*) \\
\equiv & \varepsilon(\overline{\{\langle\widetilde{x}'\rangle/\langle\widetilde{x}\rangle\}}(\langle\mathcal{D}\rangle))\quad (\text{補題 }7) \\
\equiv & \left\langle\overline{\{\widetilde{x}'/\widetilde{x}\}}(\mathcal{D})\right\rangle\quad (\text{補題 }10)
\end{array}
$$

ただし，(*) では，$\varepsilon$ 正規形 $M$ について

$$\{\{\langle\widetilde{x}'\rangle/\langle\widetilde{x}\rangle\}/e\}[\![e[\![M]\!]]\!]{=_{\varepsilon}}\{\langle\widetilde{x}'\rangle/\langle\widetilde{x}\rangle\}[\![M]\!]$$

であることを用いた．これは $\varepsilon$ 正規形 $M$ についての帰納法で証明できる．

(happ-1)

$$
\begin{array}{l}
\{N/X\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!] \\
\equiv\{N/\langle X\rangle\}[\![\varepsilon((\lambda\langle Y\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle \\
\quad \lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!])\ \lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!])]\!] \\
\equiv\{N/\langle X\rangle\}[\![(\lambda\langle Y\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle \\
\quad \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!]))\ \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!])]\!] \\
\to_{\varepsilon}{}^{+}(\lambda\langle Y\rangle.\{N/\langle X\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}_1\rangle]\!] \\
\quad \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!]))\ \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]) \\
\to^{+}(\lambda\langle Y\rangle.\left\langle\mathcal{D}_1[\mathcal{D}'/X]\right\rangle \\
\quad \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!]))\ \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]) \\
\equiv[\![\left\langle\mathcal{D}[\mathcal{D}'/X]\right\rangle]\!]
\end{array}
$$

(happ-2)

$$
\begin{array}{l}
\{N/X\}[\![\langle\mathcal{D}\rangle]\!] \\
\equiv\{N/\langle X\rangle\}[\![\varepsilon((\lambda\langle Y\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle \\
\qquad \lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!]) \\
\qquad\qquad \lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!])]\!] \\
\equiv\{N/\langle X\rangle\}[\![(\lambda\langle Y\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle \\
\qquad \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!])) \\
\qquad\qquad \lambda e.\varepsilon(e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!])]\!] \\
\to_{\varepsilon}{}^{+}(\lambda\langle Y\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle \\
\qquad \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!])) \\
\qquad\qquad \lambda e.\{N/\langle X\rangle\}[\![\varepsilon(e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!])]\!] \\
\to_{\varepsilon}{}^{+}(\lambda\langle Y\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle \\
\qquad \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!])) \\
\qquad\qquad \lambda e.\varepsilon(\{N/\langle X\rangle\}[\![e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]]\!]) \\
\equiv(\lambda\langle Y\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle \\
\qquad \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!])) \\
\qquad\qquad \lambda e.\varepsilon(e[\![\{N/\langle X\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]]\!]) \\
\qquad (\text{補題 }5) \\
\to^{*}(\lambda\langle Y\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle \\
\qquad \varepsilon(\lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!])) \\
\qquad\qquad \lambda e.\varepsilon(e[\![\left\langle\mathcal{D}_2[\mathcal{D}'/X]\right\rangle]\!]) \\
\qquad (\text{帰納法の仮定および補題 }6) \\
\equiv\left\langle\mathcal{D}[\mathcal{D}'/X]\right\rangle
\end{array}
$$

□

**定理 8（$\to_{\beta}$ についての健全性）** 型導出 $\mathcal{D}$，$\mathcal{D}'$ について，$\mathcal{D}\to_{\beta}\mathcal{D}'$ ならば $\langle\mathcal{D}\rangle\to^{+}\langle\mathcal{D}'\rangle$．

**証明**

$$
\mathcal{D}=\cfrac{\cfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\tau_1\},\emptyset\vdash M_1:\tau_2}}{\Gamma,\emptyset\vdash\lambda x:\tau_1.M_1:\tau_1\to\tau_2}\quad \overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma,\emptyset\vdash M_2:\tau_1}}{\Gamma,\emptyset\vdash(\lambda x:\tau_1.M_1)\ M_2:\tau_2}
$$

かつ $\mathcal{D}'=\{\mathcal{D}_2/x\}\mathcal{D}_1$ のときのみを考えればよい．補題 12 を用いて，

$$
\begin{array}{lll}
\langle\mathcal{D}\rangle & \equiv & (\lambda\langle x\rangle^{\langle\tau_1\rangle}.\langle\mathcal{D}_1\rangle)\ \langle\mathcal{D}_2\rangle \\
 & \to & \{\langle\mathcal{D}_2\rangle/\langle x\rangle^{\langle\tau_1\rangle}\}[\![\langle\mathcal{D}_1\rangle]\!] \\
 & \to^{+} & \langle\{\mathcal{D}_2/x\}\mathcal{D}_1\rangle
\end{array}
$$

□

**定理 9（$\to_{fill}$ についての健全性）** 型導出 $\mathcal{D}$，$\mathcal{D}'$ について，$\mathcal{D}\to_{fill}\mathcal{D}'$ ならば $\langle\mathcal{D}\rangle\to^{+}\langle\mathcal{D}'\rangle$．

**証明**

$$\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma,\Delta_1\{X:(\tau_1,\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\},\emptyset)\}\vdash M_1:\tau_2}$$

$$\overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\widetilde{x}':\widetilde{\sigma}\},\Delta_2\vdash M_2:\tau_1}$$

また，$\mathcal{D}_3$ を次の型導出として，

$$\cfrac{}{\Gamma\{\widetilde{x}:\widetilde{\sigma}\},\{Y:(\tau_1,\emptyset,\{\widetilde{x}/\widetilde{x}'\})\}\vdash Y^{\{\widetilde{x/x'}\}}:\tau_1}$$

次を示せばよい．

$$(\delta X.\mathcal{D}_1)\odot_{\{\widetilde{x}/\widetilde{x}':\widetilde{\sigma}\}}\mathcal{D}_2\to^{+}\mathcal{D}_1[\mathcal{D}_3/X][\mathcal{D}_2/Y]$$

ここで

$$N_2\ \equiv\ \lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_2\rangle]\!]$$
$$N_3\ \equiv\ \lambda e.e[\![\langle\mathcal{D}_3\rangle]\!]$$

とおくと，

$$
\begin{array}{lll}
\text{左辺} & \equiv & \varepsilon((\lambda\langle Y\rangle.(\lambda\langle X\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle)\ N_3)\ N_2) \\
 & \equiv & (\lambda\langle Y\rangle.(\lambda\langle X\rangle.\langle\mathcal{D}_1\rangle)\ \varepsilon(N_3))\ \varepsilon(N_2) \\
 & \to_{\beta}{}^{+} & \{\varepsilon(N_2)/\langle Y\rangle\}[\![\{\varepsilon(N_3)/\langle X\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}_1\rangle]\!]]\!] \\
 & \to_{\varepsilon} & \varepsilon(\{N_2/\langle Y\rangle\}[\![\{N_3/\langle X\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}_1\rangle]\!]]\!])
\end{array}
$$

ここで，

$$
\begin{array}{ll}
\{N_2/\langle Y\rangle\}[\![\{N_3/\langle X\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}_1\rangle]\!]]\!] & \\
\to^{+}\{N_2/\langle Y\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}_1[\mathcal{D}_3/X]\rangle]\!] & (\text{補題 }13) \\
\to^{+}\langle\mathcal{D}_1[\mathcal{D}_3/X][\mathcal{D}_2/Y]\rangle & (\text{補題 }13)
\end{array}
$$

より，

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{D}\rangle &\to^{+} \varepsilon(\{N_2/\langle Y\rangle\}[\![\{N_3/\langle X\rangle\}[\![\langle\mathcal{D}_1\rangle]\!]]\!])\\ &\to^{*} \varepsilon(\langle\mathcal{D}_1[\mathcal{D}_3/X][\mathcal{D}_2/Y]\rangle) \quad (\text{補題 6})\\ &\equiv \langle\mathcal{D}_1[\mathcal{D}_3/X][\mathcal{D}_2/Y]\rangle\end{aligned}$$

□

$\to_\beta$，$\to_{fill}$ についての健全性からただちに $\to$ についての健全性がいえる．

**定理 10（健全性）** 型導出 $\mathcal{D}$，$\mathcal{D}'$ について

$$\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$$

ならば，

$$\langle\mathcal{D}\rangle\to^{+}\langle\mathcal{D}'\rangle.$$

また，これを用いて，型付文脈計算の強正規化性がいえる．

**系 1（型付文脈計算の強正規化性）** 型を持つ任意の型付文脈計算の項 $M$ に対し，

$$M\to M_1\to M_2\to\cdots$$

なる無限列 $\{M_1, M_2, \ldots\}$ は存在しない．

**証明** $M$ の型導出を

$$\overset{\mathcal{D}}{\Gamma,\Delta\vdash M:\tau}$$

とする．項の簡約の無限列

$$M\to M_1\to M_2\to\cdots$$

が存在すると仮定すると．補題 2 を繰り返し用いることにより，型導出の簡約の無限列

$$\overset{\mathcal{D}}{\Gamma,\Delta\vdash M:\tau}\to\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma,\Delta\vdash M_1:\tau}\to\overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma,\Delta\vdash M_2:\tau}\to\cdots$$

が存在する．したがって定理 10 より，

$$\langle\mathcal{D}\rangle\to^{+}\langle\mathcal{D}_1\rangle\to^{+}\langle\mathcal{D}_2\rangle\to^{+}\cdots$$

が存在する．これは $\lambda\varepsilon$ の強正規化性に矛盾する．□

## 7. まとめ

本稿では，ファーストクラスの文脈を持つ $\lambda$ 計算である型付文脈計算をファーストクラスの環境を持つ $\lambda$ 計算である $\lambda\varepsilon$ を用いて解釈し，その健全性を示した．また，その応用として型付文脈計算の強正規性を示した．

本稿で与えた解釈は，直感的には文脈

$$(\delta X.\cdots X^{\{\widetilde{y'}/\widetilde{y}\}}\cdots)\odot M$$

に対して項

$$(\lambda x.\cdots x\ \{\widetilde{y'}/\widetilde{y}\}\cdots)\ \lambda e.e[\![M]\!]$$

を対応させるものである．この対応から，穴 $X^{\{\widetilde{y'}/\widetilde{y}\}}$ の変数変換子 $\{\widetilde{y'}/\widetilde{y}\}$ はファーストクラスの環境を用いて自然に表現できることが分かる．この解釈のもとでは，穴抽象，文脈適用はそれぞれ $\lambda$ 抽象，関数適用にすぎないことが分かる．Sato らはこのようなアイディアに基づいて，ファーストクラスの文脈とファーストクラスの環境を同時に持つような体系について研究している[12)]．

本稿では項の型に関する情報を補うため，型付文脈計算の型判定の導出木を解釈した．しかし，型情報を補うためには，型判定があれば十分であると予想される．具体的には，型判定からその導出木が一意に決まることが示されれば，型判定の解釈を与えればよいことになる．この場合，健全性の証明などをより簡潔に与えることができる．この点についての改良は今後の課題である．

また，文脈と環境の計算体系は，動的束縛を持つ $\lambda$ 計算[2)] や，モジュールを持つ言語[4)] との関連も深い．これらの体系の関係を調べることは今後の課題である．

そして，実際に環境と文脈を関数型言語に実装し，それを基にしたモジュールシステムの構築も興味深いテーマである．

**謝辞** 本研究をご指導いただいた京都大学の佐藤雅彦教授，亀山幸義助教授，竹内泉氏，日頃よりご指導いただいている NTT コミュニケーション科学基礎研究所の勝野裕文グループリーダ，塚田恭章氏に感謝いたします．貴重なご意見をいただいたプログラミング研究会の皆様，査読者の皆様に感謝いたします．

## 参 考 文 献

1) Abadi, M., Cardelli, L., Curien, P.-L. and Lévy, J.-J.: Explicit Substitutions, *Journal of Functional Programming*, Vol.1, No.4, pp.375–416 (1991).
2) Dami, L.: A Lambda-Calculus for Dynamic Binding, *Theoretical Computer Science*, Vol.192, No.2, pp.201–231 (1998).
3) Felleisen, H., Friedman, D.P., Kohlbecker, E. and Duba, B.: A Syntactic Theory of Sequential Control, *Theoretical Computer Science*, Vol.52, No.3, pp.205–237 (1987).
4) Flatt, M. and Felleisen, M.: Units: Cool Modules for HOT Languages, *SIGPLAN Notices*, Proc. ACM SIGPLAN '98 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI), Vol.33, No.5, pp.236–248 (1998).
5) Hanson, C.: MIT Scheme Reference Manual, Technical Report, MIT (1996).
6) Hashimoto, M. and Ohori, A.: A Typed Context Calculus, Technical Report, Preprint RIMS-1098, Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University (1996).
7) Jagannathan, S.: Metalevel Building Blocks for Modular Systems, *ACM Trans. Program-*

*ming Languages and Systems*, Vol.16, No.3, pp.456–492 (1994).

8) Lee, S.-D. and Friedman, D.P.: Enriching the Lambda Calculus with Contexts: Toward a Theory of Incremental Program Construction, *Proc. 1996 ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming*, Philadelphia, Pennsylvania, pp.239–250 (1996).

9) McCarthy, J.: Recursive Functions of Symbolic Expressions and their Computation by Machine (Part I), *Comm. ACM*, Vol.3, No.4, pp.184–195 (1960).

10) Nishizaki, S.: Simply Typed Lambda Calculus with First-Class Environments, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Vol.30, No.6, pp.1055–1121 (1994).

11) Sato, M., Sakurai, T. and Burstall, R.: Explicit Environments, *TLCA '99* (*Typed Lambda Calculi and Applications*), Lecture Notes in Computer Science, Vol.1581, pp.340–354 (1999).

12) Sato, M., Sakurai, T. and Kameyama, Y.: A simply typed context calculus, Draft (1999).

13) 大堀　淳，加藤岳臣，橋本政朋，吉田信明：型付高階モーバイル言語の設計，夏の DB ワークショップ '98 in 福井，電子情報通信学会データ工学研究専門委員会，情報処理学会データベースシステム研究会 (1998).

(平成 11 年 12 月 29 日受付)
(平成 12 年 2 月 21 日採録)

**櫻田　英樹**（正会員）

1974 年生．1999 年京都大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．同年日本電信電話（株）入社．現在 NTT コミュニケーション科学基礎研究所に所属．セキュリティプロトコルの検証技術に興味を持つ．