振幅制限を受けた任意不規則変動波形に関する一信号処理法*

江田卓永†　南原英生††
†岡山理科大学大学院　工学研究科　††岡山理科大学　工学部

１．緒言

不規則変動波形に関する各種の統計量や評価量は、通常、実測データに基づいて算出される。しかし、現実の実測状況では、原波形が何らかの原因により信号波形の上部や下部が振幅制限を受けた状態でデータ記録される場合がある。このような振幅情報が失われたデータから元の波形に関する統計情報を正確に算出することは困難であり何らかのデータ処理が必要である [1)]。

このような見地から、本研究では振幅制限を受けた観測波形から元の不規則波形に関する平均値や相関関数などの各種統計量の推定を行うものである。具体的には、振幅制限を受けた観測波の確率密度関数を、ガウス分布あるいは標準ガウス分布を初項とする直交展開表現とディラックのデルタ関数を用いて表現する [2)]。次いで、振幅制限を受けた観測波から求めたモーメント統計量と仮定した確率密度関数のモーメント統計量を比較することにより、振幅制限の影響を軽減した平均値や標準偏差、および展開係数を推定する。最後に、実測データを用いて本手法の有効性や適用範囲を確認する。

２．理論的考察

2.1 振幅制限を受けたデータからの平均値、標準偏差および展開係数の推定

今、考察対象とする不規則信号 $x(t)$ が平均値 μ 、標準偏差 σ をもつガウス分布に従うとする。このとき、 $x(t)$ の下限レベルが α_1 、上限レベルが α_2 で振幅制限された波形 $x_t(t)$ の確率密度関数 $p_t(x)$ は、ガウス分布およびデルタ関数 $\delta(x)$ を用いて次のように表される。

$$p_t(x) = p_0(x)u(x) + \beta_1\delta(x-\alpha_1) + \beta_2\delta(x-\alpha_2) \quad (1)$$

ただし

$$p_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$u(x) \equiv \begin{cases} 1 & \alpha_1 < x < \alpha_2 \\ 0 & x \le \alpha_1,\ \ x \ge \alpha_2 \end{cases}$$

$$\beta_1 \equiv \int_{-\infty}^{\alpha_1} p_0(x)dx, \quad \beta_2 \equiv \int_{\alpha_2}^{\infty} p_0(x)dx$$

ここで、 $x_t(t)$ の１次および２次の各モーメント統計量 m_1, m_2 は定義により、それぞれ

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x p_t(x)dx$$
$$= \sigma^2\{N(\alpha_1) - N(\alpha_2)\} + \mu(1-\beta_1-\beta_2) + \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 \quad (2)$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_t(x)dx$$
$$= \sigma^2 N(\alpha_1)(\alpha_1+\mu) - \sigma^2 N(\alpha_2)(\alpha_2+\mu)$$
$$+ (\sigma^2+\mu^2)(1-\beta_1-\beta_2) + \beta_1\alpha_1^2 + \beta_2\alpha_2^2 \quad (3)$$

となる。(2), (3)式において、 α_1, α_2 はあらかじめ与えられ、 m_1, m_2 は $x_t(t)$ から直接計算できる統計量である。従って、 β_1, β_2 が振幅制限を受けた観測データの時間率から推定することができるなら、数値計算手法を用いることにより μ, σ に関する非線形連立方程式：

$$\left.\begin{aligned} f(\mu,\sigma) &= \sigma_2\{N(\alpha_1)-N(\alpha_2)\} + \mu(1-\beta_1-\beta_2) \\ &\quad + \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 - m_1 = 0 \\ g(\mu,\sigma) &= \sigma^2 N(\alpha_1)(\alpha_1+\mu) - \sigma^2 N(\alpha_2)(\alpha_2+\mu) \\ &\quad + (\sigma^2+\mu^2)(1-\beta_1-\beta_2) + \beta_1\alpha_1^2 + \beta_2\alpha_2^2 - m_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

を解くことができる。つまり、振幅制限を受けたデータに基づいて、元の信号の平均値および標準偏差の推定が可能となる。

一方、原波形 $x(t)$ の振幅分布がガウス分布とは限らない任意の確率密度関数を持つときには、エルミート多項式 $H_n(x)$ を導入し、展開係数を $A_1, A_2, \cdots, A_N$ とすれば $x(t)$ の確率密度関数 $p(x)$ は次式のように直交展開表現される。

$$p(x) = N_0(x)\left\{1 + \sum_{n=1}^{N} A_n H_n(x)\right\} \quad (5)$$

ただし、

$$N_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad A_n \equiv \frac{1}{n!}\langle H_n(x)\rangle$$

上式は平均値 0、標準偏差 1 の標準ガウス分布を展開の基幹にしているために、実際の平均値、標準偏差からのずれは展開係数に反映されることになる。

---

* A Signal Processing for Arbitrary Random Signals with Amplitude Limitations
Takahisa KOUDA† and Hideo MINMIHARA††
† Graduate School of Engineering, Okayama University of Science,
††Faculty of Engineering, Okayama University of Science.

振幅制限を受けた波形 $x_t(t)$ の確率密度関数 $p_t(t)$ は、ガウス形の場合と同様、(5)式とデルタ関数を用いて表現することが可能であり、その１次から N 次モーメントが次のように計算される。

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= I_1 + A_1 I_2 + A_2\left(I_3 - I_1\right) + \cdots + \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 \\ m_2 &= I_2 + A_1 I_3 + A_2\left(I_4 - I_2\right) + \cdots + \beta_1\alpha_1^2 + \beta_2\alpha_2^2 \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ m_N &= I_N + A_1 I_{N+1} + A_2\left(I_{N+2} - I_N\right) + \cdots \beta_1\alpha_1^N + \beta_2\alpha_2^N \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ここで、I_n は次式で定義される標準ガウス分布に関する n 次モーメントで、あらかじめ計算しておくことができる。

$$I_n = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} N_0(x)\, x^n dx$$

したがって、(6)式を展開係数について解くことができ、振幅制限の影響を取り除いた展開係数は次の N 元連立方程式の解として求められる。これを用いて振幅制限の影響を取り除いた平均値、標準偏差、確率密度関数などの統計量の算出が可能になる。

$$\left.\begin{aligned} K_{11}A_1 + K_{12}A_2 + K_{13}A_3 + \cdots + K_{1N}A_N &= B_1 \\ K_{21}A_1 + K_{22}A_2 + K_{23}A_3 + \cdots + K_{2N}A_N &= B_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots \\ K_{N1}A_1 + K_{N2}A_2 + K_{N3}A_3 + \cdots + K_{NN}A_N &= B_N \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ここで、K_{ij}, B_i は定数で

$$K_{i1} \equiv I_{i+1},\quad K_{i2} \equiv I_{i+2} - I_i,\quad K_{i3} \equiv I_{i+3} - 3I_{i+2},$$

$$K_{iN} \equiv I_{i+N} - \frac{N(N-1)}{2} I_{i+N-2} + \cdots,$$

$$B_i \equiv m_i - I_i - \beta_1\alpha_1^i - \beta_2\alpha_2^i, \quad (i = 1, 2, \cdots N)$$

で定義される。

2.2 条件付平均に基づく相関関数の推定

相関関数を計算する方法としては、定義式に基づく方法やフーリエ変換に基づく方法などがあるが、これらの適用に当たってはデータの全振幅情報を必要とする。別の方法として、$x(t)$ がある条件レベル値 ξ に合致した瞬間から τ だけ離れたレベル瞬時値の条件付平均値 $m(\xi)$ や展開係数に基づいて計算する方法があり、次式のように表される[3]。

$$\rho(\tau) = \frac{m(\xi) - \mu}{\xi - \mu}\frac{p(\xi)}{p_0(\xi)} - \frac{\sigma}{\xi - \mu}\sum_{n=2}^{\infty} A(1, n) H_n\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right) \quad (8)$$

ここで、対象とする不規則信号がガウス分布を示すときは

$$p(x) = p_0(x),\quad A(1, n) = 0 \quad (n \geq 2)$$

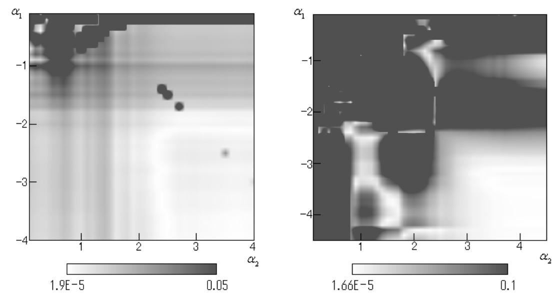
となり、(8)式は次のように簡易表現される。

$$\rho(\tau) = \frac{m(\xi) - \mu}{\xi - \mu} \quad (9)$$

(8)式および(9)式は相関情報が全振幅情報を必要とせず、原波形の平均値や条件付平均値などの統計量に基づいて算出されることを示している。従って、前節で平均値や展開係数が推定できると、振幅制限の影響を取り除いた相関関数の推定が可能となる。

３．実験的考察

まず、ガウス分布をもつ実測データを基準化し、人為的に振幅制限を施したデータに本手法を適用し平均値を推定した。α_1, α_2 を種々変化させて誤差を求めた結果を図１(a)に示す。誤差の大きさは色の濃さで表しており、色が薄いほど誤差が小さいことを示している。図の左上は振幅制限が大きく、右下ほど小さくなっている。誤差が大きくなっている箇所も存在するがかなり広範囲の振幅制限に対して適用可能となっている。図１(b)は、非ガウス分布をもつデータに本手法を適用した場合で、ガウス分布の場合より適用範囲が狭くなっているが、全データの約２割程度のデータが振幅制限された場合でも平均値の推定が可能となっている。



(a)ガウス形信号の場合　(b)非ガウス形信号の場合

図１　平均値推定における誤差

次に、基準化されたデータが下限のみで制限されているとして本手法に基づいて相関関数を計算した。α_1 を-1.0～1.0 まで変化させて平均二乗誤差(MSE)を求めた結果を図２に示す。本手法に基づく方法は、定義式どおりに相関関数を計算した場合比べて、振幅制限を大きくしても誤差が大きく変化しないことから本手法の有効性が伺える。

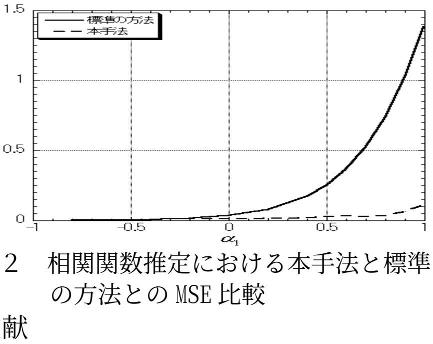


図２　相関関数推定における本手法と標準の方法とのMSE比較

参考文献

1)太田他：電子情報通信学会論文誌，Vol.72-A, 1451-1460 (1989).

2)H.Minamihara et al., J. Acoust. Soc. Jpn(E) 16(3) 185-188(1995).

3)H.Minamihara et al., Acoustics Letters, 10(11) 186-190 (1987).