名前呼び環境PCFの意味論

須　藤　正　人[†]　　西　崎　真　也[††]

ファーストクラス環境とは，実行状態の1つである環境をファーストクラスオブジェクトとしたり，それを戻したりできる機能である．環境 λ 計算は，λ 計算にそのような機能を組みこんだものである．PCF は，再帰演算子を持つ単純型付き λ 計算であり，評価戦略の研究のための枠組みとして用いられる．本研究では，ファーストクラス環境と名前呼び評価戦略との関連を研究するために，環境 PCF と PCF の名前呼び評価戦略を環境計算に拡張したものを定義する．そして，評価戦略と意味論に関する基本的性質である計算的適切さなど，理論的性質について考察する．

Semantics of Call-by-name Environment Calculus

Masato Suto[†] and Shin-ya Nishizaki[††]

The first-class environment is one of the evaluation states, which enables us to use meta-level environments as object-level entities, and oppositely, to use the object-level environments as meta-level ones. The environment calculus is a variant of lambda calculus, which is provided with such mechanism. Formal system PCF, a simply-typed lambda calculus with recursive operator, is a framework for semantical study of evaluation strategy. In this paper, we propose an extended system of PCF with first-class environments and study call-by-name strategy and its semantical properties, including computational adequacy.

1. はじめに

プログラミング言語の基本的な概念の1つに，環境がある．これは変数とそれに束縛されている値との対応を表す．一方，ファーストクラス・オブジェクトとは，数，リスト，文字列のように関数の引数や返値にすることができるデータのことである．たとえば，整数はほとんどの言語でファーストクラスなオブジェクトである．しかし，手続きや関数は，必ずしもそうではない．たとえば，プログラミング言語 Pascal では，手続き名や関数名を引数として別の関数や手続きに渡すことはできるものの，返値として返すことはできない．それに対して，言語 Lisp をはじめとして関数型言語では，関数をファーストクラスなオブジェクトして扱えることが最大の特徴の1つである．また，Lisp の方言の Scheme [3),8)] では，関数のみならず継続もファーストクラスとして扱うことができ，また，多くの Scheme の処理系では，環境もファーストクラスなオブジェクトとして扱うことができるように実現されている．

我々は，論文 5)，6) において，これまでファーストクラスな環境を λ 計算の枠組みのもとで形式化することに取り組んできた．環境を形式化する手法として Curien らにより提唱された明示的代入（explicit substitution）[1)] を用いた．従来の λ 計算では，代入がメタな概念として扱われていたのに対して，明示的代入のアイデアに基づく体系 $\lambda\sigma$ 計算では，代入の構文を与え，代入操作を体系の中で簡約規則として与えることにより，明示的に代入を扱う．これにより，環境が代入として形式化することが可能となった．しかし，代入がオブジェクトレベルで定義されていて，環境に関する操作がオブジェクトレベルで形式化されてはいるのであるが，項と代入とが異なる構文クラスとして定義されているために，環境をファーストクラスなオブジェクトとして扱うことができない．それを可能とするために，評価値としては従来の λ 項の正規形だけではなく，環境を表現する項も評価値になりうるように定義した．

論文 5) では単純型付の環境計算を提唱し，合流性，強正規化可能性定理，型推論アルゴリズム，主要型定理（principal typing theorem）について研究した．そ

† 松下電器産業株式会社
Matsushita Electric Industrial Co., Ltd.
†† 東京工業大学大学院情報理工学研究科
Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology

して，さらに論文 6) では，ML 多相型体系を持つ環境計算を提唱し，型推論アルゴリズムと主要型定理を研究した．

本論文では，環境計算の名前呼び評価戦略について研究することを目的とする．

λ 計算の評価戦略とその意味論の研究のための枠組みとしては，PCF（Programming language for Computable Function）[7),10)] が代表的である．これは，単純型付き λ 計算に，自然数，論理値，再帰演算子を追加したものである．本論文では，環境計算に対して，PCF に対応するものを提唱する．そして，名前呼び評価戦略の意味論的な性質として基本的なものの 1 つである，**計算的適切さ**（computational adequacy）を示す．これは，基底型の閉じた式に対して健全性の逆が成り立つ性質である．すなわち，式 M と値 V が意味論的に等しいならば，M を評価すると必ず停止して，値 V を結果とするというものである．またこの性質を利用すれば，基底型の式 M と値 V が等式系で等しいならば，必ず M を評価すると必ず停止して，その結果が V となる，という構文的な性質を導くことができる．

以下，本論文では，まず，2 章で単純型付環境計算に自然数，論理値，再帰的束縛の機能を付加した体系に，等価関係・名前呼び評価戦略を与えた名前呼び環境 PCF PCF_{env}を提唱する．3 章において，PCF_{env} に対して PCF 上で解釈することにより意味論を与える．そして，4 章で，健全性と計算的適切さなどの意味論的性質を解析していく．ここで用いた PCF の定義は，付録 A.1 で紹介する．

2. 名前呼び環境 PCF: PCF_{env}

定義 1（**PCF_{env}の型と式**）　PCF_{env}の型 A は以下のように再帰的に定義される．

$$\begin{aligned} A ::= {} & \iota \mid o \mid (A \to B) \\ & \mid \{x_1 : A_1\} \cdots \{x_n : A_n\} \end{aligned}$$

$n \geq 0$ とし，$x_1, \ldots, x_n$ は異なるものとする．変数の間には全順序を仮定する．これは 3 章で必要となる．それぞれ，自然数型，ブール値型（論理値型），関数型，環境型と呼ばれる．自然数型とブール値型をあわせて基底型と呼ぶ．環境型において，$n = 0$ のときは $\{\ \}$ と書く．環境型を表すメタ変数に $E, E', H, H', \ldots$ などを用いる．

PCF_{env}の式は次のように帰納的に定義される．

$$\begin{aligned} M ::= {} & 0 \mid tt \mid ff \mid succ(M) \mid pred(M) \\ & \mid zero?(M) \mid if\ L\ then\ M\ else\ N \\ & \mid x \mid (MN) \mid \lambda x{:}A.M \mid \mu x{:}A.M \\ & \mid id \mid (M/x) \cdot N \mid (M \circ N) \end{aligned}$$

それぞれ，零，真，偽，後者関数，前者関数，零判定，条件式，変数，関数適用，λ 抽象，再帰的定義（μ 束縛），恒等環境，環境拡張，環境合成と呼ばれる．

自然数 n は，0 を 1 つ，$succ$ を n つ用いて構成される式 $succ(\cdots(succ(0)))$ により表現し，これを $\overline{n}$ と書くこととする．

従来の PCF と比較して，新しく追加されたものは，id，$(M/x) \cdot N$，$M \circ N$ の 3 つである．id は恒等環境と呼ばれ，現在の環境をその評価値とする．$(M/x) \cdot N$ は環境拡張と呼ばれ，変数 x と M の評価値との束縛を環境 N に追加してできる環境である．$M \circ N$ は，環境合成と呼ばれ，環境 N のもとで M を評価した結果である．

定義 2（**PCF_{env}の型付け規則**）　PCF_{env}の型付けは，環境型 E，式 M，型 A の間の 3 項関係である（型付け）判別式 (typing judgement) $E \vdash M : A$ により与えられる．$E \vdash M : A$ を「式 M は（環境型 E の下で）型 A を持つ」と読む．$\{\ \} \vdash M : A$ は，単に $\vdash M : A$ と書くこともある．
判別式は以下の型付け規則により帰納的に定義される．

$$\frac{}{\{x : A\}E \vdash x : A}\ \{\mathbf{Var}\}$$

$$\frac{\{x : A\}E \vdash M : B}{E \vdash \lambda x{:}A.M : A \to B}\ \{\mathbf{Lam}\}$$

$$\frac{E \vdash M : A \to B \quad E \vdash N : A}{E \vdash (MN) : B}\ \{\mathbf{App}\}$$

$$\frac{}{E \vdash tt : o}\ \{\mathbf{True}\} \quad \frac{}{E \vdash ff : o}\ \{\mathbf{False}\} \quad \frac{}{E \vdash 0 : \iota}\ \{\mathbf{Zero}\}$$

$$\frac{E \vdash M : \iota}{E \vdash succ(M) : \iota}\ \{\mathbf{Succ}\} \quad \frac{E \vdash M : \iota}{E \vdash pred(M) : \iota}\ \{\mathbf{Pred}\}$$

$$\frac{E \vdash M : \iota}{E \vdash zero?(M) : o}\ \{\mathbf{IsZero}\}$$

$$\frac{E \vdash L : o \quad E \vdash M : A \quad E \vdash N : A}{E \vdash if\ L\ then\ M\ else\ N : A}\ \{\mathbf{If}\}$$

$$\frac{\{x : A\}E \vdash M : A}{E \vdash \mu x{:}A.M : A}\ \{\mathbf{Mu}\}$$

$$\frac{}{E \vdash id : E}\ \{\mathbf{Id}\} \quad \frac{E \vdash N : H \quad H \vdash M : A}{E \vdash (M \circ N) : A}\ \{\mathbf{Comp}\}$$

$$\frac{E \vdash M : A \quad E \vdash N : H}{E \vdash (M/x) \cdot N : \{x : A\}H}\ \{\mathbf{Extn}\}$$

注意　E が $\{x_1 : A_1\} \cdots \{x_n : A_n\}$ で，$\{x : A\}$ が $\{x_i : A_i\}$ のとき，$\{x : A\}E$ は，$\{x_1 : A_1\} \cdots \{x_i : A_i\} \cdots \{x_n : A_n\}$ となる．この論文では，何らかの型を持つものを扱い，特に注意がないときは暗黙に式は型を持つことを仮定することとする．

式と間の等価性は，以下で定義される等価関係 $M = N$ により与えられる．この定義は，おおまかにいえ

ば，これまでの環境計算[5),6)]の簡約の反射的推移的閉包に，μ 束縛や自然数に関する操作に関する規則を添加したものとなっている．

定義 3（PCF_{env}の等価関係） PCF_{env}の等価関係 $M = N$ は，PCF_{env}の式の間の 2 項関係であり，以下の規則から定義される．

基本演算に関する規則

$pred(0) = 0$ {**Pred1**}, $pred(succ(\overline{n})) = \overline{n}$ {**Pred2**},

$zero?(0) = tt$ {**IsZero1**},

$zero?(succ(\overline{n})) = ff$ {**IsZero2**},

$(if\ tt\ then\ M\ else\ N) = M$ {**If1**},

$(if\ ff\ then\ M\ else\ N) = N$ {**If2**},

ベータ規則

$((\lambda x{:}A.M) \circ L)N = M \circ ((N/x) \cdot L)$ {**Beta1**},

$(\lambda x{:}A.M)N = M \circ ((N/x) \cdot id)$ {**Beta2**},

再帰演算子に関する規則

$\mu x{:}A.M = M \circ ((\mu x{:}A.M/x) \cdot id)$ {**Mu**},

環境に関する規則

$id \circ M = M$ {**IdL**}, $M \circ id = M$ {**IdR**}

$((M/x) \cdot N) \circ L = (M \circ L/x) \cdot (N \circ L)$ {**DExtn**},

$0 \circ M = 0$ {**Zero'**},

$tt \circ M = tt$ {**True'**}, $ff \circ M = ff$ {**False'**},

$succ(M) \circ N = succ(M \circ N)$ {**Succ'**},

$pred(M) \circ N = pred(M \circ N)$ {**Pred'**},

$zero?(M) \circ N = zero?(M \circ N)$ {**Iszero'**},

$(if\ M\ then\ N\ else\ N') \circ L$
$\ = (if\ M \circ L\ then\ N \circ L\ else\ N' \circ L)$ {**If'**},

$(MN) \circ L = (M \circ L)(N \circ L)$ {**DApp**},

$x \circ ((M/x) \cdot N) = M$ {**VarRef**},

$y \circ ((M/x) \cdot N) = y \circ N$ {**VarSkip**},

$(\mu x{:}A.M) \circ N$
$\ = M \circ (((\mu x{:}A.M) \circ N/x) \cdot N)$ {**Mu'**},

$(M \circ N) \circ L = M \circ (N \circ L)$ {**Assoc**}.

同値性（equivalence）に関する規則

$$\frac{}{M = N}\ \{\mathbf{Refl}\}\quad \frac{N = M}{M = N}\ \{\mathbf{Sym}\}$$

$$\frac{M = L \quad L = N}{M = N}\ \{\mathbf{Trans}\}$$

合同性（congruence）に関する規則

$$\frac{M = N}{succ(M) = succ(N)}\ \{\mathbf{CongSucc}\}$$

$$\frac{M = N}{pred(M) = pred(N)}\ \{\mathbf{CongPred}\}$$

$$\frac{M = N}{zero?(M) = zero?(N)}\ \{\mathbf{CongIsZero}\}$$

$$\frac{L = L' \ M = M' \ N = N'}{if\ L\ then\ M\ else\ N = if\ L'\ then\ M'\ else\ N'}\{\mathbf{CongIf}\}$$

$$\frac{M = M' \quad N = N'}{(MN) = (M'N')}\ \{\mathbf{CongApp}\}$$

$$\frac{M = N}{\mu x{:}A.M = \mu x{:}A.N}\ \{\mathbf{CongMu}\}$$

$$\frac{M = N}{\lambda x{:}A.M = \lambda x{:}A.N}\ \{\mathbf{CongLam}\}$$

$$\frac{M = M' \quad N = N'}{(M/x) \cdot N = (M'/x) \cdot N'}\ \{\mathbf{CongExtn}\}$$

$$\frac{M = M' \quad N = N'}{(M \circ N) = (M' \circ N')}\ \{\mathbf{CongComp}\}$$

定義 4（PCF_{env}の名前呼び評価） PCF_{env}の名前呼び評価は，式の間の 2 項関係 $M \downarrow V$ により定義される．

$$\frac{}{0 \downarrow 0}\ \{\mathbf{Zero}\}\ \frac{}{tt \downarrow tt}\ \{\mathbf{True}\}\ \frac{}{ff \downarrow ff}\ \{\mathbf{False}\}$$

$$\frac{M \downarrow 0}{pred(M) \downarrow 0}\ \{\mathbf{Pred1}\}\ \frac{M \downarrow succ(V)}{pred(M) \downarrow V}\ \{\mathbf{Pred2}\}$$

$$\frac{M \downarrow V}{succ(M) \downarrow succ(V)}\ \{\mathbf{Succ}\}$$

$$\frac{M \downarrow 0}{zero?(M) \downarrow tt}\ \{\mathbf{IsZero1}\}\ \frac{M \downarrow succ(V)}{zero?(M) \downarrow ff}\ \{\mathbf{IsZero2}\}$$

$$\frac{M \downarrow tt \quad N \downarrow V}{(if\ M\ then\ N\ else\ L) \downarrow V}\ \{\mathbf{If1}\}$$

$$\frac{M \downarrow ff \quad L \downarrow V}{(if\ M\ then\ N\ else\ L) \downarrow V}\ \{\mathbf{If2}\}$$

$$\frac{M \downarrow (\lambda x{:}A.M') \circ L \quad M' \circ ((N/x) \cdot L) \downarrow V}{(MN) \downarrow V}\ \{\mathbf{Beta1}\}$$

$$\frac{M \downarrow (\lambda x{:}A.M') \quad M' \circ ((N/x) \cdot id) \downarrow V}{(MN) \downarrow V}\ \{\mathbf{Beta2}\}$$

$$\frac{}{\lambda x{:}A.M \downarrow \lambda x{:}A.M}\ \{\mathbf{Lam}\}$$

$$\frac{M \circ ((\mu x{:}A.M/x) \cdot id) \downarrow V}{\mu x{:}A.M \downarrow V}\ \{\mathbf{Mu}\}$$

$$\frac{}{id \downarrow id}\ \{\mathbf{Id}\}\quad \frac{}{(M/x) \cdot N \downarrow (M/x) \cdot N}\ \{\mathbf{Extn}\}$$

$$\frac{}{0 \circ M \downarrow 0}\ \{\mathbf{Zero'}\}$$

$$\frac{}{tt \circ M \downarrow tt}\ \{\mathbf{True'}\}\ \frac{}{ff \circ M \downarrow ff}\ \{\mathbf{False'}\}$$

$$\frac{M \downarrow (N/x) \cdot L \quad N \downarrow V}{x \circ M \downarrow V}\ \{\mathbf{VarRef}\}$$

$$\frac{M \downarrow (N/x) \cdot L \quad y \circ L \downarrow V \quad x \not\equiv y}{y \circ M \downarrow V}\ \{\mathbf{VarSkip}\}$$

$$\frac{succ(M \circ N) \downarrow V}{succ(M) \circ N \downarrow V}\ \{\mathbf{Succ'}\}\ \frac{pred(M \circ N) \downarrow V}{pred(M) \circ N \downarrow V}\ \{\mathbf{Pred'}\}$$

$$\frac{zero?(M \circ N) \downarrow V}{zero?(M) \circ N \downarrow V}\ \{\mathbf{IsZero'}\}$$

$$\frac{if\ (M \circ L)\ then\ (N \circ L)\ else\ (N' \circ L) \downarrow V}{if\ M\ then\ N\ else\ N' \circ L \downarrow V}\ \{\mathbf{DIf}\}$$

$$\frac{}{(\lambda x{:}A.M) \circ N \downarrow (\lambda x{:}A.M) \circ N}\ \{\mathbf{Lam'}\}$$

$$\frac{M \circ ((\mu x{:}A.M/x)\cdot N) \downarrow V}{(\mu x{:}A.M)\circ N \downarrow V}\ \{\textbf{Mu'}\}$$

$$\frac{(((M \circ L)/x)\cdot(N \circ L)) \downarrow V}{((M/x)\cdot N)\circ L \downarrow V}\ \{\textbf{DExtn}\}$$

$$\frac{M \circ (N \circ L) \downarrow V}{(M \circ N)\circ L \downarrow V}\ \{\textbf{Assoc}\}$$

名前呼び評価は型付けに関して次の性質を持つ．

命題 1 $E \vdash M : A$ かつ $M \downarrow V$ ならば，$E \vdash V : A$ が成り立つ．

$M \downarrow V$ の推論木の構造に関する帰納法により，簡単に証明できる．

PCF の関係 $M \downarrow V$ の構造に関する帰納法により，以下の性質は簡単に証明できる．

命題 2（値の構文的特徴付け） $M \downarrow V$ が成り立つような式 V は以下のいずれかの形をしている．
$\overline{n}, tt, f\!f, \lambda x{:}A.M, (\lambda x{:}A.M)\circ N, id, ((M/x)\cdot N)$.
このような形をした式のことを**値**と呼ぶ．値を表すメタ変数として V，W を用いる．

値について以下の性質が成り立つ．

命題 3 V を値とする．このとき，

- $\vdash V : \iota$ ならば，ある自然数 n に対して，$V \equiv \overline{n}$ が成り立つ．
- $\vdash V : o$ ならば，$V \equiv tt$，もしくは，$V \equiv f\!f$ が成り立つ．

また，2 項関係 $M \downarrow V$ を定義する推論規則において，第 1 引数 M はオーバラップしていないので，部分関数となる．すなわち，

命題 4（関係 $M \downarrow V$ の関数性） $M \downarrow V$ かつ $M \downarrow W$ ならば，$V \equiv W$ である．

PCF と同様に，式と名前呼び評価した結果の値は，等価である：

命題 5 $M \downarrow V$ ならば，$M = V$ である．

証明 $M \downarrow V$ の推論木の構造に関する帰納法により証明される．ここでは，$M \downarrow V$ が，規則 **Beta1** により導かれている場合についてのみ紹介しておく．この場合は

$M \equiv (M_1\ M_2)$,
$M_1 \downarrow (\lambda x{:}A.M')\circ L$,
$M' \circ ((M_2/x)\cdot L) \downarrow V$

とおくことができる．帰納法の仮定より，(i) $M_1 = (\lambda x{:}A.M')\circ L$ と (ii) $M' \circ ((M_2/x)\cdot L) = V$ を得る．等式 (ii) と等価性の規則 **Beta1**：

$((\lambda x{:}A.M')\circ N)M_2 = M' \circ ((M_2/x)\cdot L)$

より，

$((\lambda x{:}A.M')\circ N)M_2 = V$

さらに，等式 (i) より，

$(M_1\ M_2) = V$

がいえる． **証終**

3. PCF_{env}の PCF 上での解釈による意味論

本章では，PCF_{env}の *PCF* による解釈を与える．具体的には，PCF_{env}の型から *PCF* の型への変換と，PCF_{env}の項から *PCF* の項への変換を与える．

PCF の諸定義は付録 A.1 で紹介する．

前に述べたように，変数の間には全順序を仮定されている．この章では $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ と書いたときには，$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ と並んでいると暗黙に仮定する．

定義 5（型の解釈） PCF_{env} の型 A と，A に現れる変数をすべて含む変数の有限集合 $X \equiv \{x_1, \ldots, x_N\}$ に対して，型 A の解釈 $\langle A\rangle_X$ は *PCF* の型であり，以下のように定義される．

$$\langle\iota\rangle_X \equiv \iota,\quad \langle o\rangle_X \equiv o,$$
$$\langle A \to B\rangle_X \equiv \langle A\rangle_X \to \langle B\rangle_X$$
$$\langle E\rangle_X \equiv \sigma_1 \times (\sigma_2 \times (\cdots(\sigma_N \times \mathbf{1}))),$$

ただし，

$$\sigma_i = \begin{cases}\langle A_i\rangle_X, & (\{x_i : A_i\}\text{ が }E\text{ に出現する場合})\\ \mathbf{1}. & (\{x_i : A_i\}\text{ が }E\text{ に出現しない場合})\end{cases}$$

である．

直感的に説明すると次のとおり：変数の集合 X として十分大きいものを考える．そして，その変数の個数分だけ成分を持つ対により環境を解釈する．環境において束縛されていない変数に対応する成分のところには，シングルトン **1** を埋めておく．

式の解釈を与えるのに，環境値を *PCF* の式により表現することが必要となる．そのために以下の定義が用いられる．

定義 6（update_X，lookup_X，$\emptyset_X$） X を変数の有限集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ とする．

$\emptyset_X \equiv (\mathbf{1}, (\mathbf{1}, (\cdots(\mathbf{1}, \mathbf{1})\cdots)))$, (空の環境)
$\lceil x_i\rceil_X \equiv i - 1$,
$\mathsf{lookup}_X(r, i) \equiv (\pi^1(\pi^2(\cdots(\pi^2(r))\cdots)))$,
ただし,π^2は,i 個
$\mathsf{update}_X(r, i, M) \equiv$
$(\pi^1(r),\ (\pi^1(\pi^2(r)),\ (\pi^1(\pi^2(\pi^2(r))),\ \ldots$
$\cdots, (M,\ \pi^2(\pi^2(\cdots(\pi^2(r)))))\cdots))),$
ただし M は $(i+1)$ 番目でその右のπ^2は i 個

今，与えようとしている解釈では，PCF_{env}の変数名は，変数の集合 X における順位により表現され，環境は，変数の順番に従って束縛値を並べたリストによ

り表現されたものである．π^1，π^2 は，Lisp のコンストラクタ car，cdr に対応し，lookup は関数 nth に対応する．$\mathsf{update}_X(r,i,M)$ は，対 r において，i 番目の成分を M に差し替える．

update と lookup において次の性質が成り立つ．

命題 6 $\mathsf{lookup}_X(\mathsf{update}_X(r,i,M),i) = M$, $\mathsf{lookup}_X(\mathsf{update}_X(r,i,M),j) = \mathsf{lookup}_X(r,j)$ $(i \neq j)$

定義 7（式の解釈 $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r)$，$\langle M\rangle_X$） PCF_{env} の式 M，変数の有限集合 X，そして PCF の式 r に対して，式 M の解釈 $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r)$ は PCF の式であり，以下のように定義される．

また，$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(\emptyset_X)$ を $\langle M\rangle_X$ と書くこととする．

$\langle\!\langle 0\rangle\!\rangle_X(r) \equiv 0$，$\langle\!\langle tt\rangle\!\rangle_X(r) \equiv tt$,
$\langle\!\langle ff\rangle\!\rangle_X(r) \equiv ff$，$\langle\!\langle succ(M)\rangle\!\rangle_X(r) \equiv succ(\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r))$,
$\langle\!\langle pred(M)\rangle\!\rangle_X(r) \equiv pred(\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r))$,
$\langle\!\langle zero?(M)\rangle\!\rangle_X(r) \equiv zero?(\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r))$,
$\langle\!\langle if\ M\ then\ N\ else\ L\rangle\!\rangle_X(r)$
$\quad \equiv if\ \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r)\ then\ \langle\!\langle N\rangle\!\rangle_X(r)\ else\ \langle\!\langle L\rangle\!\rangle_X(r)$,
$\langle\!\langle x\rangle\!\rangle_X(r) \equiv \mathsf{lookup}_X(r, \lceil x\rceil_X)$,
$\langle\!\langle (MN)\rangle\!\rangle_X(r) \equiv (\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r)\ \langle\!\langle N\rangle\!\rangle_X(r))$
$\langle\!\langle \lambda x{:}A.M\rangle\!\rangle_X(r) \equiv$
$\quad \lambda x'{:}\langle A\rangle_X.\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(r, \lceil x\rceil_X, x')))$
$\langle\!\langle \mu x{:}A.M\rangle\!\rangle_X(r) \equiv$
$\quad \mu x'{:}\langle A\rangle_X.\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(r, \lceil x\rceil_X, x')))$
$\langle\!\langle id\rangle\!\rangle_X(r) \equiv r$,
$\langle\!\langle (M/x)\cdot N\rangle\!\rangle_X(r)$
$\quad \equiv \mathsf{update}_X(\langle\!\langle N\rangle\!\rangle_X(r), \lceil x\rceil_X, \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r))$,
$\langle\!\langle M\circ N\rangle\!\rangle_X(r) \equiv \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(\langle\!\langle N\rangle\!\rangle_X(r))$

以下の命題は，変換後，型付け可能性が保存されることを示すものである．

命題 7 PCF_{env}の式 M，PCF の式 r，変数の有限集合 X に対して，

- $E \vdash M : A$,
- $\Gamma \vdash r : \langle E\rangle_X$,
- X は，E，M，A，Γ，r に現れる変数をすべて含んでいる

ならば，

$$\Gamma \vdash \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r) : \langle A\rangle_X$$

が成り立つ．

「E，M，A，Γ，r に現れる変数」とは，字面上出現しているすべての変数を意味している．たとえば，$\lambda x{:}\{y:\iota\}.x$ の場合は，x と y がそのようなものである．

証明は，M の構造に関する帰納法を用いればよい．

また，変換により PCF_{env}の値は PCF の値へ写される：

命題 8 V が PCF_{env}の値で，$\{\} \vdash V : A$ であるならば，$\langle V\rangle_X$ は，PCF の値である．

証明 値の形の場合分けにより証明する．$\overline{n}$，tt，ff，$\lambda x{:}A.M$，$(\lambda x{:}A.M)\circ N$ の場合については，変換の定義より明らか．$\langle\!\langle id\rangle\!\rangle_X(\emptyset_X)$ は，$\emptyset_X$ に変換される．$\emptyset_X$ は定義により値である．$\langle\!\langle (M/x)\cdot N\rangle\!\rangle_X(\emptyset_X)$ は，$\mathsf{update}_X(\cdots)$ という式に変換される．update の定義によると，これは対である．したがって，PCF の値である． **証終**

変換結果の自由変数について次の性質が明らかに成り立つ．

命題 9 $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r)$ に出現する自由変数は，式 r に出現する．特に，$\langle M\rangle_X$ は閉じた式である．

また，変換と名前呼び評価に関して，以下の性質が成り立つ．

命題 10 V を PCF_{env}の値とし，X を V に現れる変数をすべて含む変数の有限集合とし，ある型 A に対して $\{\} \vdash V : A$ が成り立つとする．

(1) $\langle V\rangle_X \downarrow \overline{n}$ ならば，$V \equiv \overline{n}$ である．
(2) $\langle V\rangle_X \downarrow tt$ ならば，$V \equiv tt$ である．
(3) $\langle V\rangle_X \downarrow ff$ ならば，$V \equiv ff$ である．
(4) $\langle V\rangle_X \downarrow \lambda x{:}\sigma.e$ ならば，ある PCF_{env}の変数 x'，型 A，式 M_1 が存在して $V \equiv \lambda x'{:}A.M_1$ が成り立つ，もしくは，ある PCF_{env}の変数 x'，型 A，式 M_1，M_2 が存在して $V \equiv (\lambda x'{:}A.M_1)\circ M_2$ が成り立つ．
(5) $\langle V\rangle_X \downarrow (e_1, e_2)$ ならば，$V \equiv id$ となるか，もしくは，ある PCF_{env}の式 N_1，N_2 が存在して，$V \equiv (N_1/x)\cdot N_2$ となる．

証明 (1)〜(5) は同様に証明できるので，ここでは (1) を示しておく．

命題 8 により，$\langle V\rangle_X$ は PCF の値であるから，$\langle V\rangle_X \equiv \overline{n}$ である．式の変換の定義により，$V \equiv \overline{n}$ である． **証終**

空の環境型のもとで基底型を持つ値に対しては式の変換は単射になる：

命題 11 PCF_{env}の値 V, W が，ある基底型 A に対して $\{\} \vdash V : A, \{\} \vdash W : A$ をみたし，X を V, W に出現する変数をすべて含む変数の有限集合とする．このとき，$\langle V\rangle_X \equiv \langle W\rangle_X$ ならば，$V \equiv W$ である．

証明 命題 3 から，$V \equiv \overline{n}$，$V \equiv tt$，$V \equiv ff$ のいずれかであることが分かる．あとは，式の変換の定義から明らか． **証終**

4. PCF_{env}の意味論的性質

この論文で考えている PCF_{env}の意味論は，PCF 上での解釈によるものである．この意味論に関する，名前呼び評価の健全性，および，等価関係の健全性は以下のように定式化される．

定理 1（**等価関係の健全性**） M，N を $E \vdash M : A$，$E \vdash N : A$ を満たす PCF_{env}の式とし，X を M，N に出現する変数をすべて含む変数の有限集合とする．このとき $M = N$ ならば，型 $\langle E\rangle_X$ を持つ任意の PCF の式 r に対して，
$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r) = \langle\!\langle N\rangle\!\rangle_X(r)$
が成り立つ．

証明 等価関係 $M = N$ の構造に関する帰納法による．
規則 **Beta1** の場合：

$$M \equiv ((\lambda x{:}B.M_1) \circ M_2)M_3, \tag{1}$$
$$N \equiv M_1 \circ ((M_3/x) \cdot M_2), \tag{2}$$
$$E \vdash M : A,\ E \vdash N : A, \tag{3}$$

を仮定する．

r を型 $\langle E\rangle_X$ を持つ PCF の式とする．(1) より，

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r)\\ &\equiv (\lambda x'{:}\langle B\rangle_X.\langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r), \lceil x\rceil, x')))\\ &\qquad(\langle\!\langle M_3\rangle\!\rangle_X(r)).\end{aligned}$$

(2) より，

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle N\rangle\!\rangle_X(r)\\ &\equiv \langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X)(r), \lceil x\rceil_X, x')\\ &\qquad[x'{:=}\langle\!\langle M_3\rangle\!\rangle_X(r)].\end{aligned}$$

PCF の等価関係のベータ規則と合同性に関する規則によって，$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r) = \langle\!\langle N\rangle\!\rangle_X(r)$．また，これらの推論が型に関して整合性がとれているのは (3) から命題 7 を用いて導かれる．

規則 **Beta2** の場合もこの場合と同様．規則 **Mu**, **Mu'** については，ベータ規則のかわりに再帰演算子に関する規則を用いて，同様に証明できる．

VarRef の場合：

$$M \equiv x \circ ((M_1/x) \cdot M_2), \tag{4}$$
$$N \equiv M_1, \tag{5}$$
$$E \vdash M : A,\ E \vdash N : A, \tag{6}$$

と仮定する．(4) より，

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r)\\ &\equiv (\mathsf{lookup}_X(\mathsf{update}_X(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r), \lceil x\rceil, \langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r)),\\ &\qquad\lceil x\rceil)\end{aligned}$$

命題 6 によって，$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r) = \langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r))$ である．(5) より，$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r) = \langle\!\langle N\rangle\!\rangle_X(r)$ である．

一方，規則 **VarSkip** の場合は，命題 6 の後半部の方を用いて，同様に証明される．

基本演算に関する規則，同値性に関する規則，合同性に関する規則など，残りの場合は，簡単な計算により証明される． **証終**

命題 5 を適用すると，以下のことが導くことができる．

系 1（**名前呼び評価の健全性**） M，V を $M \downarrow V$，$E \vdash M : A$，$E \vdash V : A$ を満たす PCF_{env}の式とし，X を M，V に出現する変数をすべて含む変数の有限集合とする．
このとき，型 $\langle E\rangle_X$ を持つ任意の PCF の式 r に対して，
$\langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(r) = \langle\!\langle V\rangle\!\rangle_X(r)$
を満たす．

PCF と同様に PCF_{env}においても，上記の定理 1 の逆が基底型の式に制限した形で成り立つ．この性質は**計算的適切さ**（computational adequacy）と呼ばれる．

まず，その証明で用いられる補題を証明する：

補題 1 $\langle\!\langle x \circ (M_1/y) \cdot M_2\rangle\!\rangle_X(r) \downarrow V$ のとき，$x \equiv y$ ならば，$\langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r) \downarrow V$ であり，$x \not\equiv y$ ならば，$\langle\!\langle x \circ M_2\rangle\!\rangle_X(r) \downarrow V$ である．

証明 $\langle\!\langle x \circ (M_1/y) \cdot M_2\rangle\!\rangle_X(r) \downarrow V$ と仮定する．

$x \equiv y$ のとき：特に，$\lceil x\rceil = \lceil y\rceil = 1$ の場合を証明する．一般の場合については本質的に同様である．

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle x \circ (M_1/y) \cdot M_2\rangle\!\rangle_X(r)\\ &\equiv \pi^1(\pi^2(\\ &\quad(\pi^1(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r)),\\ &\quad(\langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r),\ \pi^2(\pi^2(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r)))))))\end{aligned}$$

名前付き評価の定義により，ある PCF の式 N_1^1，N_2^1 が存在して，

$$\begin{aligned}&(\pi^2((\pi^1(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r)),\\ &\quad(\langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r),\ \pi^2(\pi^2(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r))))))\\ &\downarrow (N_1^1, N_2^1),\end{aligned}$$
$$N_1^1 \downarrow V \tag{1}$$

が成り立つ．さらに，名前付き評価の定義から，ある PCF の式 N_1^2，N_2^2 が存在して，

$$(\pi^1(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r)), (\langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r),\ \pi^2(\pi^2(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r)))))$$
$$\downarrow (N_1^2, N_2^2), \tag{2}$$
$$N_2^2 \downarrow (N_1^1, N_2^1), \tag{3}$$

が成り立つ．(2) と PCF の名前付き評価規則 **Pair** により，

$N_2^2 \equiv (\langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r),\ \pi^2(\pi^2(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(r))))$

であり，さらに，(3) により，

$N_1^1 \equiv \langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r)$

といえる．これと (1) により，

$\langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(r) \downarrow V$

$x \not\equiv y$ の場合：$\lceil x\rceil = 1$，$\lceil y\rceil = 2$ の場合や $\lceil x\rceil = 2$，$\lceil y\rceil = 1$ の場合について証明すればよいのだが，前の場合と同様.

証終

補題 2 PCF_{env}の式 M，PCF_{env}の型 A，PCF の値 V，そして，有限集合 X が，

- $\{\} \vdash M : A$ （PCF_{env}において），
- $\langle\{\}\rangle_X \vdash V : \langle A\rangle_X$ （PCF において），
- $\langle M\rangle_X \downarrow V$，（$PCF$ において），
- X は，M，A に出現する変数をすべて含む，

とする．このとき，

- $\{\} \vdash W : A$ （PCF_{env}において），
- $M \downarrow W$ （PCF_{env}において），
- $\langle W\rangle_X \downarrow V$ （PCF において），

を満たす PCF_{env}の値 W が存在する.

証明 PCF_{env}の式 M，型 A，PCF の値 V，変数の有限集合 X に対して，$\{\} \vdash M : A$，$\langle\{\}\rangle_X \vdash V : \langle A\rangle_X$，$\langle M\rangle_X \downarrow V$ であり，X は，M，A に出現する変数をすべて含むものと仮定する.

$\{\} \vdash M : A$ の推論木の大きさに関する帰納法を用いて，M の形で場合分けをする.

• M が値のとき：単に，W として M をとればよい.

• M が $succ(M')$ のとき：

$\{\} \vdash succ(M') : \iota$，$\langle\{\}\rangle_X \vdash V : \iota$，

$$\langle succ(M')\rangle_X \downarrow V \qquad (1)$$

と仮定する．$\langle succ(M')\rangle_X \equiv succ(\langle M'\rangle_X)$ であるので，(1) と PCF の評価規則 **Succ** により，$V \equiv succ(V')$ を満たす PCF の値 V' が存在し，これは

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Pi\\ \langle M'\rangle_X \downarrow V'\end{matrix}}{\langle succ(M')\rangle_X \downarrow V}\ \{\mathbf{Succ}\}$$

を満たす．推論木 Π に対する帰納法の仮定から，

$$M' \downarrow W' \qquad (2)$$

かつ，

$$\langle W'\rangle_X \downarrow V' \qquad (3)$$

を満たすような PCF_{env}の式 W' が存在することが分かる．W を $succ(W')$ とする．(2) より，

$succ(M') \downarrow succ(W')$

が得られて，(3) より，

$\langle succ(W')\rangle_X \downarrow V$

すなわち，$M \downarrow W$ かつ $\langle W\rangle_X \downarrow V$ がえられた.

• M が $pred(M')$, $zero?(M')$, $if\, M_1\ then\, M_2\ else\, M_3$ などの形をしているときも，上の場合と同様に証明できる.

• M が再帰的束縛 $\mu x{:}A.M'$ の場合：

$\langle M\rangle_X \downarrow V$ と仮定すると，

$\langle M\rangle_X \equiv \mu x'{:}\langle A\rangle_X.\langle\!\langle M'\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(\emptyset_X, \lceil x\rceil, x'))$

であることから，PCF の評価規則 **Mu** を用いて

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Pi\\ \langle\!\langle M'\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(\emptyset_X, \lceil x\rceil, x'))[x' := \langle M\rangle_X] \downarrow V\end{matrix}}{\mu x'{:}\langle A\rangle_X.\langle\!\langle M'\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(\emptyset_X, \lceil x\rceil, x')) \downarrow V}\{\mathbf{Mu}\}$$

一方，

$\langle\!\langle M'\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(\emptyset_X, \lceil x\rceil, x'))[x' := \langle M\rangle_X]$

$\equiv \langle\!\langle M'\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(\emptyset_X, \lceil x\rceil, \langle M\rangle_X))$

$\equiv \langle\!\langle M'\rangle\!\rangle_X(\mathsf{update}_X(\langle\!\langle id\rangle\!\rangle_X(\emptyset_X), \lceil x\rceil, \langle\!\langle M\rangle\!\rangle_X(\emptyset_X)))$

$\equiv \langle\!\langle M' \circ ((M/x)\cdot id)\rangle\!\rangle_X(\emptyset_X)$

$\equiv \langle M' \circ ((M/x)\cdot id)\rangle_X.$

であるので，推論図 Π に対する帰納法の仮定により，

$M' \circ ((M/x)\cdot id) \downarrow W$，

$\langle W\rangle_X \downarrow V$

となる PCF_{env}の値 W が存在する．PCF_{env}の評価規則 **Mu** により，$M \downarrow W$ が成り立つことが分かる.

• M が環境合成のとき：

$M \equiv ((((M_1 \circ M_2) \circ M_3)\cdots) \circ M_n)$

（ただし，$n \geq 2$，M_1 は環境合成でない）

とおくことができる.

$\langle((((M_1 \circ M_2) \circ M_3)\cdots) \circ M_n)\rangle_X$

$\equiv \langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(\langle\!\langle M_2\rangle\!\rangle_X(\cdots(\langle\!\langle M_{n-1}\rangle\!\rangle_X(\langle M_n\rangle_X))))$

$$\equiv \langle\!\langle M_1\rangle\!\rangle_X(\langle(((M_2 \circ M_3)\cdots) \circ M_n)\rangle_X) \qquad (*)$$

である．M_1 の形で場合分けをすると，M_1 が変数以外の場合は，上の場合と同様に証明できる.

• M_1 が変数 x のとき：

$\langle M\rangle_X \downarrow V$ と仮定する．(*) により，$n = 2$ としても一般性を失わない．簡単のため，$\lceil x\rceil_X = 0$ とする．$\lceil x\rceil \geq 1$ についても基本的には同様に証明される.

$\langle x \circ M_2\rangle_X \equiv \mathsf{lookup}_X(\langle M_2\rangle_X, \lceil x\rceil) \equiv \pi^1(\langle M_2\rangle_X)$

仮定より，

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Pi_1\\ \langle M_2\rangle_X \downarrow (N_1, N_2)\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\ \Pi_2\\ N_1 \downarrow V\end{matrix}}{\pi^1(\langle M_2\rangle_X) \downarrow V}\ \{\mathbf{Fst}\}$$

推論図 Π_1 に対する帰納法の仮定より，

$$M_2 \downarrow W', \qquad (4)$$

$$\langle W'\rangle_X \downarrow (N_1, N_2) \qquad (5)$$

(5) より，

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Sigma\\ \langle W'\rangle_X \downarrow (N_1, N_2)\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\ \Pi_2\\ N_1 \downarrow V\end{matrix}}{\pi^1(\langle W'\rangle_X) \downarrow V}\ \{\mathbf{Fst}\}$$

(4) と命題 10 と $\lceil x\rceil \equiv 0$ により，$W' \equiv (L_1/x)\cdot L_2$ を満たす式 L_1, L_2 が存在する．$\{\} \vdash x \circ M_2 : A$ であり，$M_2 \downarrow W'$ である．もし，$W' \equiv id$ であったとすると，$\{\} \vdash W' : \{\}$ が成り立たなければならない．し

かしこれは $W' \equiv (L_1/x) \cdot L_2$ に矛盾する．したがって，$\lceil x \rceil \equiv 0$ により，

$\langle W' \rangle_X \equiv (\langle L_1 \rangle_X, \langle L_2 \rangle_X)$

（**注意** $\lceil x \rceil \equiv 0$ という条件は，環境を変換して得られた "リスト"$\langle W' \rangle_X$ において x の束縛値が先頭にあることを意味している）．したがって，上記の Σ は，PCF_{env}の評価規則 **Pair** だけからなる推論木であって，

$N_1 \equiv \langle L_1 \rangle_X$

であることが分かる．推論図 Π_2 に対する帰納法の仮定より，

$$L_1 \downarrow W, \tag{6}$$

$\langle W \rangle_X \downarrow V$

を満たす W が存在する．(6) より

$$\frac{\overset{\vdots\ (4)}{M_2 \downarrow (L_1/x) \cdot L_2} \quad \overset{\vdots}{L_1 \downarrow W}}{x \circ M_2 \downarrow W} \ \{\mathbf{VarRef}\}$$

証終

定理 2（**名前呼び評価の計算的適切さ**） PCF_{env}の式 M と値 V が，基底型 A により

$\{\} \vdash M : A,\ \ \{\} \vdash V : A$

として型付けられているとする．そして，変数の有限集合 X は，M と V に出現する変数すべてを含んでいると仮定する．このとき，

$\langle M \rangle_X = \langle V \rangle_X$

ならば，

$M \downarrow V$

が成り立つ．

証明 命題 7 により，

$\{\} \vdash \langle M \rangle_X : \langle A \rangle_X,\ \ \{\} \vdash \langle V \rangle_X : \langle A \rangle_X$

A が（PCF_{env}の）基底型であるので，$\langle A \rangle_X$ も（PCF の）基底型となる．よって，PCF の計算的適切さ（定理 4）により，

$\langle M \rangle_X \downarrow \langle V \rangle_X$

上の補題 2 により，

$M \downarrow W$ かつ $\langle W \rangle_X \downarrow \langle V \rangle_X$

を満たす値 W が存在する．命題 8 により，$\langle V \rangle_X$ も $\langle W \rangle_X$ も値であるので，

$\langle W \rangle_X \equiv \langle V \rangle_X$

命題 11 により，

$W \equiv V$

よって，$M \downarrow V$． **証終**

定理 3 PCF_{env}の式 M と値 V は，基底型 A により

$\{\} \vdash M : A, \{\} \vdash V : A$

として型付けられているとする．そして，変数の有限集合 X は，M と V に出現する変数すべてを含んでいると仮定する．このとき，

$M = V \iff M \downarrow V$

となる．

証明

必要性は，命題 5，そのものである．

十分性は以下のとおり：

$\{\} \vdash M : A, \{\} \vdash V : A, M = V$ と仮定する．このとき，定理 1 より，

$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_X(\emptyset_X) = \langle\!\langle V \rangle\!\rangle_X(\emptyset_X)$

である．すなわち，

$\langle M \rangle_X = \langle V \rangle_X$.

定理 2 により，

$M \downarrow V$

を得る． **証終**

5. おわりに

本論文では，名前呼び環境計算 PCF_{env}を提唱し，PCF_{env}を PCF 上で解釈することにより意味論を与え，健全性や計算的適切さ（computational adequacy）などを示した．PCFで計算的適切さを証明する際には，強正規化可能性定理のように，帰着可能性（reducibility）などの強い原理を用いなければならないが，本論文では，PCF 上で解釈することにより，より初等的な方法で示すことができた．PCF においては，計算的適切さ以外にも数多くの結果が得られている．それらの性質が環境計算で成り立つか否かを研究してゆくことは今後の課題である．また，評価戦略には名前呼び評価のほか，値呼び評価をはじめとしていろいろなものがこれまで提唱されてきた．それらについて研究することも必要であろう．

また，本論文および論文 5)，6) で研究してきた体系のほかに，環境計算の体系としては Sato らにより提唱された体系として，$\lambda\epsilon$ 計算[9] がある．彼らの体系において本論文のような手法が適用できるかどうか検討することは興味深い課題である．

参 考 文 献

1) Abadi, M., Cardelli, L., Curien, P.-L. and Lévy, J.-J.: Explicit Substitutions, *Journal of Functional Programming*, Vol.1, No.4, pp.375–416 (1991).
2) Gunter, C.A.: *Semantics of programming languages: Structures and techniques*, The MIT Press (1992).
3) Hanson, C.: *MIT Scheme Reference Manual*, 1.62 edition (1996).

4) Mitchell, J.C.: *Foundations for programming languages*, The MIT Press (1996).
5) Nishizaki, S.: Simply Typed Lambda Calculus with First-Class Environments, *Publication of Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University*, Vol.30, No.6, pp.1055–1121 (1995).
6) Nishizaki, S.: Polymorphic Environment Calculus and Its Type Inference Algorithm, *Higher-Order and Symbolic Computation*, Vol.13, No.3, pp.239–278 (2000).
7) Plotkin, G.: LCF as a programming language, *Theoretical Computer Science*, Vol.5, pp.223–257 (1977).
8) Kelsey, W.C.R. and Rees, J.: Revised^5 Report on the Algorithmic Language Scheme, *SIGPLAN Notices*, Vol.33, No.9, pp.26–76 (1998).
9) Sato, M., Sakurai, T. and Burstall, R.: Explicit Environments, *Typed Lambda Calculi and Applications* (1999).
10) Scott, D.: A type-theoretical alternative to ISWIM, CUCH, OWHY, *Theoretical Computer Science*, Vol.121, pp.411–440 (1993).

付　　録

A.1 プログラミング言語 *PCF*

本章ではプログラミング言語 *PCF* の諸定義を与える．ここで紹介する *PCF* は，Gunter [2] で紹介されたものに直積型・対に関する機能を付加したものである．再帰性は再帰的束縛（μ 束縛）により導入し，自然数は，定数 0 とコンストラクタ $succ(-)$ により導入する．

定義 8（*PCF* **の型と式**） *PCF* の型 A は以下のように再帰的に定義される．

$$A ::= \iota \mid o \mid \mathbf{1} \mid (A \to B) \mid (A \times B)$$

それぞれ，自然数型，ブール値型（論理値型），ユニット型，関数型，直積型と呼ばれる．
PCF の式は次のように帰納的に定義される．

$$\begin{aligned} M\ ::= & \ 0 \mid tt \mid \mathit{ff} \mid \mathbf{1} \mid succ(M) \mid pred(M) \\ & \mid zero?(M) \mid \mathit{if}\ L\ \mathit{then}\ M\ \mathit{else}\ N \\ & \mid x \mid (MN) \mid \lambda x{:}\sigma.M \mid \mu x{:}\sigma.M \\ & \mid (M, N) \mid \pi^1(M) \mid \pi^2(M) \end{aligned}$$

それぞれ，零，真，偽，ユニット，後者関数，前者関数，零判定，条件式，変数，関数適用，λ 抽象，再帰的定義式（μ 式），対，第 1 射影，第 2 射影と呼ばれる．式であるユニットと型であるユニット型とは便宜的に同じ記号を用いているが，混乱が生じるときは，$\mathbf{1}_{\mathrm{type}}, \mathbf{1}_{\mathrm{expr}}$ というふうに書くこととする．

記法 1（*PCF* **と** $\boldsymbol{PCF_{env}}$） 以下で紹介する推論規則など，定義のかなりの部分で，*PCF* と PCF_{env}とは字面上類似している．PCF_{env}と字面上同じ推論規則については，流用し，記述をできるだけ簡潔に済ます．そのために，以上の定義では，*PCF* と PCF_{env}とは式や型に対して同じメタ変数を用いた．このことにより混乱が生じるときには，*PCF* の式を $e, e_1, e_2, \ldots$ 型を $\sigma, \tau, \ldots$，型割当て（注：次の定義を参照）を $\Gamma, \Delta, \ldots$ を用いて区別することとする．

定義 9（*PCF* **の型付け規則**） 変数名から型への部分関数で，定義域が有限であるものを型割当てと呼び，$\{x_1 : A_1\} \cdots \{x_n : A_n\}$ と書く．メタ変数として，E，H を用いる．これらは PCF_{env} の環境型に対するメタ変数としても用いられている．混乱を避ける必要があるときには，*PCF* の型割当てのメタ変数として，Γ，Δ を用いる．
PCF の型付けは，型割り当て E，式 e，型 σ の間の 3 項関係である（型付け）判別式 $E \vdash e : \sigma$ により与えられる．判別式は型付け規則により帰納的に定義される．*PCF* と PCF_{env} は，式も型もまったく異なるが，*PCF* の型付け規則の多くはすでに紹介した PCF_{env} の型付け規則と字面上は同じである．
環境型を型割当てに読みかえ，PCF_{env} の式･型を *PCF* の式・型として読みかえることにより，*Id*，*Comp*，*Extn* 以外の PCF_{env} の型付け規則を *PCF* の型付け規則として用いる．これらの型付け規則以外には次のようなものがある．

$$\frac{E \vdash M : A \quad E \vdash N : B}{E \vdash (M, N) : A \times B}\ \mathit{Pair}$$

$$\frac{E \vdash M : A \times B}{E \vdash \pi^1(M) : A}\ \mathit{Proj1} \quad \frac{E \vdash M : A \times B}{E \vdash \pi^2(M) : B}\ \mathit{Proj2}$$

$$\frac{}{E \vdash \mathbf{1}_{\mathrm{expr}} : \mathbf{1}_{\mathrm{type}}}\ \mathit{Unit}$$

定義 10（*PCF* **の等価関係**） PCF_{env}の等価関係の規則と字面上同じものは規則名のみを記す．
同値性（equivalence）に関する規則：
Refl, **Sym**, **Trans**.
合同性（congruence）に関する規則：
CongSucc，**CongPred**，**CongIsZero**，**CongIf**，**CongApp**，**CongMu**，**CongLam**，

$$\frac{M = M' \quad N = N'}{(M, N) = (M', N')}\ \{\mathbf{CongPair}\}$$

$$\frac{M = N}{\pi^1(M) = \pi^1(N)}\ \{\mathbf{CongFst}\}$$

$$\frac{M = N}{\pi^2(M) = \pi^2(N)}\ \{\mathbf{CongSnd}\}$$

基本演算に関する規則：

Pred1, **Pred2**, **IsZero1**, **IsZero2**, **If1**, **If2**,

ベータ規則

$(\lambda x{:}A.M)N = M[x{:=}N]$ $\{\mathbf{Beta}\}$

再帰演算子に関する規則

$\mu x{:}A.M = M[x{:=}\mu x{:}A.M]$ $\{\mathbf{Mu}\}$

対に関する規則

$\pi^1(M, N) = M$ $\{\mathbf{Fst}\}$

$\pi^2(M, N) = N$ $\{\mathbf{Snd}\}$

注意 PCF_{env}とは異なり，PCF の式は通常どおり，α 同値性を仮定する．

定義 11（PCF **の名前呼び評価**） PCF_{env}の名前呼び評価の規則と字面上同じものは規則名のみを記す．

Zero, **True**, **False**, **Pred1**, **Pred2**, **Succ**, **IsZero1**, **IsZero2**, **If1**, **If2**, **Lam**,

$\mathbf{1} \downarrow \mathbf{1}$ $\{\mathbf{Unit}\}$

$$\frac{M \downarrow \lambda x{:}A.L \quad L[x{:=}N] \downarrow V}{(MN) \downarrow V}\ \{\mathbf{Beta}\}$$

$$\frac{M[x{:=}\mu x{:}A.M] \downarrow V}{\mu x{:}A.M \downarrow V}\ \{\mathbf{Mu}\}$$

$(M, N) \downarrow (M, N)$ $\{\mathbf{Pair}\}$

$$\frac{M \downarrow (N, L) \quad N \downarrow V}{\pi^1(M) \downarrow V}\ \{\mathbf{Fst}\}$$

$$\frac{M \downarrow (N, L) \quad L \downarrow V}{\pi^2(M) \downarrow V}\ \{\mathbf{Snd}\}$$

この定義より明らかに以下の性質が成り立っていることが分かる．

命題 12（**値の構文的特徴付け**） PCF の式 M，N に対して，$M \downarrow V$ が成り立っているならば，V の形は以下のうちのいずれかである．

$\overline{n}, tt, f\!f, \mathbf{1}, (M, N), \lambda x{:}A.M.$

このような形の（PCF の）式のことを（PCF の）値と呼ぶ．

また以下の性質は，文献 2)，4) などを参照してほしい．

定理 4（PCF **の計算的適切さ**） PCF の基底型の閉じた式 M と値 V に対して，$M = V$ と $M \downarrow V$ は必要十分である．

(平成 13 年 10 月 1 日受付)
(平成 13 年 12 月 28 日採録)

須藤　正人（正会員）

昭和 52 年生．平成 13 年東京工業大学大学院情報理工学研究科修士課程修了．同年松下電器（株）入社．

西崎　真也（正会員）

昭和 42 年生．平成 6 年京都大学大学院理学研究科数理解析専攻博士課程修了．同年岡山大学工学部情報工学科助手．平成 8 年千葉大学理学部数学・情報数理学科助教授．平成 10 年東京工業大学大学院情報理工学研究科計算工学専攻助教授．