Vol. 21 No. 1 情報処理学会論文誌 Jan. 1980

ショートノート

Deques による順列のソーティングについて†

野 崎 昭 弘††

本論文では，任意の順列を deques の直列結合によってソートするために必要な deques の個数について論じた．そしてひとつの deque からの出力が，その deque へのすべての入力が完了してからでなければ行われない場合について，すべての順列がソートできるためには $(\log_2 n)/2$ 個の deques が必要であり，$\lceil \log_2 n \rceil$ 個の制限つき deques で十分であることを示した．なお上の条件のもとでは，deques の直列列結合は２個の deques の両方向結合によってシミュレートでき，上記の個数はソートに要するパスの回数と解釈できる．

1. ま え が き

Knuth 等は，実用上よく使われる簡単なデータ構造であるキューやスタックに注目して，その機能を「どのような順列のソーティングができるか」という観点から研究している．そしてたとえば次のような結果を示した[1),2)]．

（1） 順列 $a_1, a_2 \cdots a_n$ が

$i<j<k,\ a_k<a_i<a_j$

という形の部分列を含むとき，これを１個のスタックでソートすることはできない．

（2） $\lceil \log_2 n \rceil$ 個のスタックの直列結合によって，長さ n の任意の順列がソートできる．

（3） 長さ n の任意の順列をスタックの直列結合によってソートするためには，$\log_4 n$ 個のスタックが必要である．

今宮はこの問題を，スタックの一般化である「制限つき deques」と呼ばれる装置に拡張して，ソーティングの可能性を論じた[3),4)]．彼の結果のひとつは，次のように述べることができる．

（4） $2\lceil \log_2 n \rceil$ 個の制限つき deques の直列結合によって，長さ n の任意の順列をソートすることができる．

この結果は，Knuth の結果（2）に比べると，一見はなはだ奇妙である．より特殊な装置であるスタックの方が，少ない個数ですんでいるからである．しかし両者のソーティングのアルゴリズムを少しくわしく観察してみると，次のような差があることがわかる．すなわち，Knuth のやりかたでは，n 個の要素がすべてのスタックに散らばることになるが，今宮の方法ではデータはいつでも隣接する高々２個の deques にしかない．詳しくいえば，ある deque からの出力は，その deque への入力が完全にすんでからでなければ始められない，ということである．

前者の方法を分散方式，後者を集団方式と呼ぶことにしよう．明らかに集団方式の方が機能が落ちるか，「２個の deques でシミュレートできる」という利点があり，いちがいに無視はできないと思われる．

では集団方式で n 個の要素をソートする場合，どれくらいの時間が必要であろうか．それはひとつの要素が何回 deques を通過するかで決まる．我々はそこで，n 個の要素を「情報が一方向にしか流れない」直列結合（**図１**）によってソートする場合，何個のdeques が必要であるかを調べてみた．その結果，n 個の要素は $\lceil \log_2 n \rceil$ 個の制限つき deques でソートできることがわかった（第２節．これは今宮の結果（4）の改良になっている）．また我々の結果にはほとんど改良の余地がないことも示せる（第３節）．結局 n 個の要素を集団方式でソートするには，およそ $2n\log_2 n$ 回の要素の入出力が必要とされる．

2. ソーティングの十分条件

deque（以下 DQ と略す）とは，データの１次元的な列を記憶する装置で，新しいデータの入力やその中のデータの出力が，列の両端でしか行われないものをいう．個々のデータをビー玉にたとえれば，ちょうど

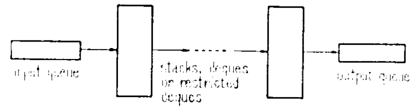

図１ DQ の直列結合

Fig. 1 A series network.

† A Note on Sorting Using Deques by AKIHIRO NOZAKI (Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Yamanashi University).

†† 現在，国際基督教大学理学科

1個が通過できる太さのパイプと考えればよい．新しいビー玉を入れるのはパイプの両端からしかできず，その際，中の玉の順序は変わらない．ビー玉を出すときも同様である．特に，入力が一方の端からしかできない DQ を入力制限 DQ (input-restricted deque, **IRDQ** と略す) といい，出力が一方の端からしかできない DQ を出力制限 DQ (output-restricted deque, **ORDQ** と略す) という．入出力ともに同じ一端からしかできない DQ (片端が閉じているパイプ) がスタックである．

さて，DQ あるいは I(O) RDQ の直列結合を考えてみよう (図1)．矢印は一方向のデータ転送線を示し，ここにデータを貯えることはできないと仮定する．左端はソートすべきデータを供給する**入力キュー**で，右端はソートの結果を送りこむ**出力キュー**である．

この回路で，順列 $a_1a_2\cdots a_n$ を $a_{i(1)}a_{i(2)}\cdots a_{i(n)}$ にならべかえることができたとしよう．すると，全く逆向き・逆順の操作によって，$a_{i(n)}\cdots a_{i(2)}a_{i(1)}$ を $a_n\cdots a_2a_1$ にならべかえることができるはずである (図の矢印を逆にし，入力と出力を完全に入れかえるのである)．この操作において，もとの回路の I(O) RDQ は O(I) RDQ として働く，そこで次のことがいえる[2),4)]．

m 個の IRDQ の直列結合によってある変換ができるならば，m 個の ORDQ の直列結合によってその (一種の) 逆変換ができる．

一方が集団方式なら，他方も集団方式と考えてよい．一方で長さ n の任意の列がソートできるなら，他方も同様である．ゆえに，制限つき DQ の能力を調べるときは，IRDQ か ORDQ のどちらか一方についてだけ考えれば充分である．

〔定理 1〕 $\lceil \log_2 n \rceil$ 個の制限つき DQ の直列結合を使って，集団方式で，長さ n の任意の整数列をソートすることができる．

(証明) 便宜上，IRDQ の直列結合について考える．k 個の IRDQ の直列結合を使えば，2^k 個以下のデータのソーティングができる．それには**図2**に例示したような併合法を使えばよい．まずすべてのデータを第1の IRDQ に移し，それらを n 個の単調部分列の集まりとみる (増加・減少の方向は，交互になっているとする：長さ1か空の列であるから，方向はどう考えてもさしつかえない)．そしてふたつの出口を利用して，併合を行う，1回の「集団的移動」によって列の数は半分になるから，2^k 個までのデータならソートできる，ゆえに，

$n \leq 2^k$

ならば，n 個のデータのソートができる．

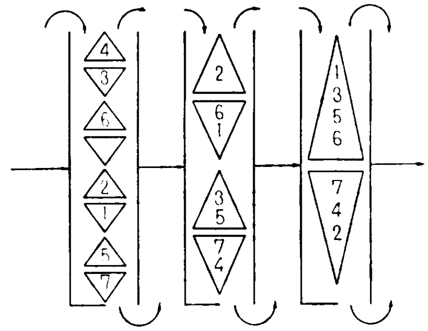

図 2 併合法によるソート
Fig. 2 Merge sort by IRDQ's in series.

3. ソーティングの必要条件

〔定理 2〕 制限つき DQ の直列結合を使って，集団方式で長さ n の任意の整数列をソートするには，

$\lceil \log_2 n - 1.45 \rceil$

個の制限つき DQ が必要である．

(証明) n 個の整数のすべてがひとつの制限つき DQ を通過するには，2^n 通りのしかたがある．たとえば IRDQ なら，入力のしかたはひと通りしかないから，ふた通りの出力の n 回の組みあわせだけある (集団方式であるから，入力と出力の混在は許されない)．したがって k 個の制限つき DQ では，高々 2^{nk} 通りの異なった処理しかできない．それで $n!$ 通りの順列がすべてソートできるためには

$2^{nk} \geq n!$

すなわち

$$nk \geq \log_2 n!$$
$$\fallingdotseq \left(n+\frac{1}{2}\right)(\log_2 n - \log_2 \boldsymbol{e}) + \boldsymbol{c}$$
$$\geq n \log_2 n - (\log_2 \boldsymbol{e})n$$

ゆえに

$k \geq \log_2 n - 1.45.$ ⊠

注意 $\log_2 \boldsymbol{e} = 1.44\cdots$,

$\boldsymbol{c} = 2.047\cdots\cdots$

〔定理 3〕 DQ の直列結合を使って，集団方式で長さ n の任意の整数列をソートするには，

$(\log_2 n - 1.45)/2$

個の DQ が必要である．

(証明) 上の証明中，2^n が 4^n に変わる．そのため

$nk \geqq \log_4 n!$

となり，標記の結果が得られる. ☒

4. むすび

制限つき DQ の直列結合を使った，集合方式による長さ n の任意の順列のソーティングについて，必要かつ十分な制限つき DQ の個数がほとんど決定された（改良の余地は，どんな n についても，高々 2 個である）. また，制限つき DQ を一般の DQ におきかえても，$O(\log_2 n)$ 個の DQ が必要であることがわかった.

一般の DQ について，必要な DQ の個数のよりよい上限，下限が得られるかどうかは，今のところ不明である.

謝辞 貴重な資料のコピーを下さった山梨大学今宮淳美助教授に感謝の意を表明いたします.

参考文献

1) Knuth, D. E.: Fundamental Algorithms, Addison-Wesley (1968).
2) Knuth, D. E.: Sorting and Searching, Addison-Wesley (1973).
3) 今宮淳美：制限つき Deque システムによる順列生成とソーティング，電子通信学会技報，AL 75-61, pp. 57-64 (1975).
4) 今宮淳美，野崎昭弘：制限つき Deques による順列の生成とソーティング，情報処理，Vol. 17, No. 12, pp. 1128-1134 (1976).

（昭和 53 年 4 月 10 日受付）
（昭和 54 年 7 月 19 日採録）