ショートノート

デシジョンテーブルの完備性と重複性†

守屋慎次†† 斉藤　剛†† 平松啓二††

デシジョンテーブル（以後は判断表[1]と呼ぶ）は，複雑な判断を含む処理の流れを明確に表現する手法として知られている．判断表への関心は，効率のよい変換アルゴリズムの開発を中心に，多岐にわたっている．本論文では，文献2）で構成した判断表の数学モデルに基づき，判断表の完備性と重複性の概念を形式化し，判断表が各々の性質を持つための必要十分条件を求め，それらの応用について述べる．判断表の完備性と重複性の概念は，基本的ではあるが，判断表が表わす論理の解釈や検証，および，処理系作成時には考慮しなければならない重要な概念である．

1. はじめに

筆者等は，文献2）で，限定記入，拡張記入，混合記入の各判断表を包括した判断表のブール代数モデルを構成し，従来，非形式的に用いられてきた諸概念の理論体系への位置付けを行い，ルールとアクションに関する諸性質を導いた．

本論文では，判断表の基本的ではあるが重要な性質である完備（completeness）と重複（overlap）なる概念について，以下の順に述べる．

初めに，文献2）で構成された数学モデルに，“論理原子”なる新しい概念を導入し，論理原子に関するいくつかの性質を導く．次に，完備と重複なる概念を数学モデルの上に位置付け，判断表が完備であるための必要十分条件，および，重複であるための必要十分条件を導く．そして，最後に，これらの応用について述べる．

完備性，重複性についての，非形式的もしくはやや形式的議論は，文献3）等に散見されるが，形式的かつ厳密な議論は本論文が最初である．なお，本論文は，文献4）のより詳細な報告である．

2. 原子と論理原子

本章において，本論文の主題である完備と重複についての議論に用いる道具として，原子と論理原子なる概念を，数学モデルに導入する．

判断表の，ブール代数に基づいた形式化とその基本的性質は，文献2）に詳細に述べられている．本論文では，形式化については省略し，文献2）の定義・定理を，そのまま利用する．本論文で定義される用語と記号以外は文献2）を参照されたい．

[定義 1][5]　$a \in X_i$ は，$a \neq O_i$ であり，しかも，任意の $b \in X_i$ に対して，$a \cdot b = a$ または $a \cdot b = O_i$ であるとき，X_i の原子と呼ばれる．また，$A_i \triangleq \{a | a$ は X_i の原子$\}$ と置く．

原子に関して，次の性質が知られている．

[補題 1][5]　$C_i = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ とし，$x_j \in C_i$ に対して，$x_j^0 \triangleq \bar{x}_j$，$x_j^1 \triangleq x_j$ と定めるとき*，

$$A_i = \{x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{b_n} | (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in B^{\#C_i}\}$$

である．■

代数系 χ は，代数系 X_i の直積として求められた[2]．

[定義 2]　$\boldsymbol{a} \in \chi$ を，$\boldsymbol{a} \in \chi_r$ であり，しかも，任意の $\boldsymbol{b} \in \chi$ に対して，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in \chi_o$ であるとき，論理原子と呼ぶ．また $\chi_a = \{\boldsymbol{a} | \boldsymbol{a}$ は χ の論理原子$\}$ と置く．

論理原子に対して，次の性質が成立つ．

[補題 2]　$\chi_a = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N$　（証明略）■

3. 完備性と重複性

本章では，従来，非形式的もしくはやや形式的に論じられてきた完備と重複なる2つの概念を，ブール代数モデルへ位置付ける．次いで，判断表が完備であるための必要十分条件，および，重複であるための必要十分条件を導く．

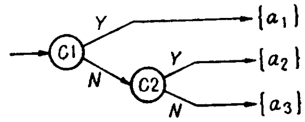
---

† Completeness and Overlap of Decision Tables by SHINJI MORIYA, TSUYOSHI SAITOH and KEIJI HIRAMATSU (Faculty of Engineering, Tokyo Denki University).

†† 東京電機大学工学部電気通信工学科

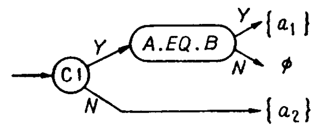
* $\#C_i$ は有限集合 C_i の元の数を表わす．

	R1	R2	R3
C1	Y	N	N
C2	—	Y	N
perform	a_1	a_2	a_3



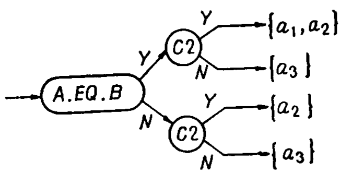
(a) 完備であり，重複でない判断表

	R1	R2
C1	Y	N
A.EQ.	B	—
perform	a_1	a_2



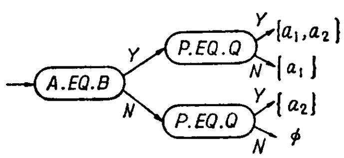
(b) 完備でなく，重複でない判断表

	R1	R2	R3
A.EQ.	B	—	—
C2	Y	Y	N
perform	a_1	a_2	a_3



(c) 完備であり，重複である判断表

	R1	R2
A.EQ.	B	—
P.EQ.	—	Q
perform	a_1	a_2



(d) 完備でなく，重複である判断表

図 1 判断表の例

Fig. 1 Illustrative example of decision tables.

図1に，完備と重複に関する4種類の判断表と，各判断表が表わす論理を流れ図の形で示した．

3.1 完備性

［定義 3］ ある任意の $\beta\in\mathscr{B}$ に関して，真となる $\boldsymbol{r}\in R$ が必ず存在するとき，またそのときのみ，その判断表（のルール）は完備である．

［例 1］ 図1(a)の場合，$R=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3\}$，$\boldsymbol{r}_1=(C1, I_2)$，$\boldsymbol{r}_2=(\overline{C1}, C2)$，$\boldsymbol{r}_3=(\overline{C1}, \overline{C2})$．したがって，C1 および C2 が真偽いずれであっても，$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ のいずれか1つは真となる．したがって完備である． ∎

判断表が完備であるとき，またそのときのみ，その判断表の論理を表わす流れ図が構成する木のすべての葉にアクションが対応している（図1の流れ図参照）．

［定理 1］ 判断表が完備であるとき，またそのときのみ，任意の $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ に対して，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}$ なる $\boldsymbol{r}\in R$ が存在する．

［証明］ 付録参照 ∎

［例 2］ 図1(b)において，$x\triangleq A.EQ.B$ と置くと，$\chi_a=\{(C1, x), (\overline{C1}, x), (C1, \bar{x}), (\overline{C1}, \bar{x})\}$，$R=\{(C1, x), (\overline{C1}, I_2)\}$ である．$(C1, \bar{x})\leqq\boldsymbol{r}$ なる $\boldsymbol{r}\in R$ が存在しない．よって，完備ではない． ∎

3.2 重複性

図1(c)では，$A.EQ.B$ と $C2$ が共に真であるとき，2つのルール $R1$ と $R2$ が同時に満たされる．このように，判断表に書かれた関係式の真偽の組合せの中に，2つ以上のルールを同時に満たす組合せが存在する場合，その判断表の論理はあいまい (ambiguous) であると称し，誤りとして扱ってきた．つまり，もし満たされるルールが存在するならば，それは唯一でなければならないという約束（これを「単一ルールの約束」と呼ぶことにする）が採用されていた[6]．文献2)にも述べたように，King と Johnson は，同時に複数個のルールが満たされることのある判断表の利点と，単一ルールの約束に基づく判断表の欠点を示し，単一ルールの約束が一般的でないことを指摘している[3]．本論文においても，文献2)と同様に，King と Johnson の考え方に基づいて議論を進める．しかし，「あいまい」という言葉からは「誤り」が連想されやすいので，従来の「あいまい」の代りに「重複」なる言葉の使用を提案し，以後これを使用する．

［定義 4］ 2つ以上の $\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{r}_j$，$\cdots\in R(i\neq j)$ を同時に真とする $\beta\in\mathscr{B}$ が存在するとき，またそのときのみ，その判断表（のルール）は重複である．

判断表が重複であるとき，またそのときのみ，その判断表の論理を表わす流れ図が構成する木に，2つ以上のアクションの対応する葉が存在する（図1の流れ図参照）．

［定理 2］ 判断表が重複であるとき，またそのときのみ，ある $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ に対して，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j$ なる $\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j\in R(i\neq j)$ が存在する．

［証明］ 付録参照 ∎

［例 3］ 図1(d)の場合，$R=\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$，$\boldsymbol{r}_1=(A.EQ.B, I_2)$，$\boldsymbol{r}_2=(I_1, P.EQ.Q)$．ここで，$\boldsymbol{a}=(A.EQ.B, P.EQ.Q)\in\chi_a$ に対して，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2$ である．よって，重複である． ∎

［系 1］ 判断表が重複であるとき，またそのときのみ，$\prod_{\boldsymbol{r}\in S}\boldsymbol{r}\in\chi_r$ かつ $\#S\geqq2$ なる $S\subsetneqq R$ が存在する*． ∎

このような S のすべての元を共に真とする $\beta\in\mathscr{B}$ が存在することは明らかである．

4. 応用

判断表が，論理を正しく表わしているか否かを検査するとき，次の二点が検査の主点となるであろう．す

* $S=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n\}$ とするとき，$\prod_{\boldsymbol{r}\in S}\boldsymbol{r}\triangleq\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{r}_n$

なわち，(i)その判断表に書かれた関係式の真偽のすべて組合せに対する処置が，アクションとして記述されているか否か，(ii)関係式の真偽のある組合せに関して，満たされるルールはどれ（複数個ある場合もある）であるか，である．(i)は，判断表が完備であるか否かと同値である．したがって，定理1が直接利用できる．また，真偽の組合せの中に，ルールとして記述されていない組合せが存在する場合，定理1からそれらを知ることもできる．(ii)は，判断表の重複性と密接な関係がある．系1に示したSのすべての元（ルール）は，ある$\beta\in\mathscr{B}$（真偽の組合せ）に関して，共に真となる(満たされる)．(ii)では，このようなSを求めることが必要となる．定理2および系1より，関係式の真偽のある組合せに関して，満たされるルールのすべてを知ることができる．

上記(i)，(ii)の検査は，人手と機械により，従来からも行われている．文献7）等で用いられている方法の正しさは，明確に示されていないが，直感的に明らかなものといえる．しかし，従来は，拡張記入行を含む判断表においては，その判断表と等価な論理を示す限定記入判断表へ変換し，その限定記入判断表を検査することにより行われているにすぎなかった．

定理1，定理2は，(i)，(ii)の検査における正しさの保証された，しかも，限定記入および拡張記入の各判断表を統一した検査基準として利用できよう．

5. むすび

本論文では，文献2）で構成された判断表のブール代数モデル上に，論理原子なる概念を導入し，完備と重複なる概念を理論体系の上に位置付け，判断表が完備であるための必要十分条件と，重複であるための必要十分条件を導いた．完備と重複の概念は，従来から使用されているが，扱いはいずれも形式的でない．特に，混合記入判断表を含めた統一的な議論はなされていなかった．本論文の議論は，混合記入判断表に関するそのような2つの概念の厳密な形式化である．応用として，4章で述べたような実用面での利用，および，判断表の存在性[8]がある．

参考文献

1) 情報処理学会編：情報処理ハンドブック，オーム社 (1972).
2) 守屋：デシジョンテーブルの形式化，情報処理，Vol. 19, No. 5 (May 1978).
3) King and Johnson: Some Comments on the Use of Ambiguous Decision Tables and Their Conversion to Computer Program, C. ACM, Vol. 16, No. 5 (May 1973).
4) 守屋，斉藤，平松：デシジョンテーブルの完備性と重複性，情報処理学会第18回全国大会 (1977).
5) Harrison, M. A.: Introduction to Switching and Automata Theory, p. 63, McGraw-Hill (1965).
6) Pollack et al.: Decision Table: Theory and Practice, John Willey & Son (1971).
7) Pooch: Translation of Decision Tables, ACM Computing Survery, Vol. 16, No. 2 (June 1974).
8) 守屋，斉藤，平松：デシジョンテーブルの存在性とその応用，情報処理学会第20回全国大会 (1979).

付　録

定理1，定理2の証明に先立ち，次の補題を述べる．

［補題3］ $n=\#C_i$ とするとき，任意の $a\in A_i$ に対して，$F_i(a,\boldsymbol{b})=1$ なる $\boldsymbol{b}\in B^n$ が，必ず一つだけ存在する．また，任意の $\boldsymbol{b}\in B^n$ に関して，$F_i(a,\boldsymbol{b})=1$ なる $a\in A_i$ が，必ず一つだけ存在する．(証明略)

［補題4］ 任意の $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ に対して，$\boldsymbol{a}$ が真となる $\beta\in\mathscr{B}$ が，必ず一つだけ存在する．また，任意の $\beta\in\mathscr{B}$ に関して真となる $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ が，必ず一つだけ存在する．(証明略)

［定理1の証明］ (i)完備であるとする．すなわち，ある任意の $\beta\in\mathscr{B}$ に関して，真となる $\boldsymbol{r}\in R$ が存在したと仮定する．このとき，補題4より，真となる $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ が唯一存在する．このような $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$ に対して，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}$ と置くとき，定義10[2)]および系6[2)]から，$\boldsymbol{d}$ は β に関して真となる．したがって，$\boldsymbol{d}\in\chi_r$ であり，定義2より，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}$ である．したがって，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}$ が導かれる．任意の $\beta\in\mathscr{B}$ に関して真となる $\boldsymbol{r}\in R$ が存在すれば，補題4より，任意の $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ に対して $\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}$ なる $\boldsymbol{r}\in R$ が存在する．

(ii) 任意の $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ に対して，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}$ なる $\boldsymbol{r}\in R$ が存在したとする．補題4より $\boldsymbol{a}$ を真とする $\beta\in\mathscr{B}$ が存在し，この β に関して $\boldsymbol{r}$ も真となる（定理12[2)]）．任意の $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ に対して $\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}$ なる $\boldsymbol{r}\in R$ が存在すれば，補題4より，任意の $\beta\in\mathscr{B}$ に関して真となる $\boldsymbol{r}\in R$ が存在する．よって完備である．

［定理2の証明］ (i)重複であるとする．すなわち，ある $\beta\in\mathscr{B}$ に関して，$\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_j\in R$ が共に真となったと仮定する．このとき，定義10[2)]および系6[2)]から，$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j$ も β に関して真となる．したがって，$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\in\chi_r$ であり，補題2より，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j$ なる $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ が存在する．

(ii) ある $\boldsymbol{a}\in\chi_a$ に対して，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j$ なる $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_j\in R$ が存在したとする．このとき，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}_i$ かつ $\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{r}_j$ である．補題4より，この $\boldsymbol{a}$ を真とする $\beta\in\mathscr{B}$ が存在し，この β に関して $\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j$ は共に真となる（定理12[2)]）．よって重複である．

(昭和55年4月11日受付)
(昭和55年6月19日採録)