平野の変形 Newton 法の大域的収束性†

室 田 一 雄††

代数方程式の解法として平野によって提案され，変形 Newton 法とも呼ばれる算法は，任意の初期値から出発して必ずどれか１つの解に収束する系列をつくり出すことが経験的に知られているが，その厳密な数学的証明は与えられていない．本論文では，この算法が，基本的には複素関数論の最大値の原理に立脚していることに注意しつつ，任意の初期値から出発して必ずどれか１つの解に収束する系列を作り出すこと，さらに，関数値は大域的に０に一次収束し，その収束率および１つの近似解から次の近似解を得るための計算量が，初期値のとり方や，個々の方程式とは無関係に，方程式の次数だけで定まる上界をもつことを証明する．

1. はじめに

複素数体上での一変数多項式の零点，すなわち代数方程式の解を求めるために，古来，多くの算法が提案されてきた．最近，研究と改良が行われている連立型の方法（いわゆる DKA 法など）は，ほかの方法に比べて種々の点で優れた算法であるようである[1)~3)]．そして，ほとんどすべての初期値から出発して解に収束するという大域的収束性も示されている．一方，Newton 法の改良版として平野によって提案され，変形 Newton 法とも呼ばれる算法[*4)~6)]は，Newton 法の局所的な二次収束性を保ちつつ，Newton 法に見られる逐次近似解の不安定な振舞いを抑えるように工夫したもので，任意の初期値から出発して，必ずどれか１つの解に収束する列を生成することが経験的に知られているが，大域的収束性についての厳密な数学的証明は与えられていない．

本論文では，平野の方法が基本的には複素関数論の最大値の原理に立脚していることに注意しつつ，この方法が厳密な意味での大域的収束性を持つこと，すなわち，任意の初期値から出発して必ずどれか１つの解に収束する近似解の系列を作り出すことを示す．さらに，近似解の系列に対応する関数値の系列は，０に少なくとも一次収束して，その収束率および１つの近似解から次の近似解を求めるのに必要な計算量が，初期値のとり方や，個々の方程式とは無関係に，方程式の次数だけで定まる上界をもつことを証明する．

2. 変形 Newton 法の算法

複素数体上での一変数 n 次多項式

$$p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

の零点の１つを求めるために，任意の初期値 $z^{(0)}$ から始めて，近似解の列 $\{z^{(\nu)}\}_{\nu=0}^{\infty}$ を生成する．第 ν 近似解 $z^{(\nu)}$ から，第 $(\nu+1)$ 近似解 $z^{(\nu+1)}$ を求める手順（これを第 ν 段と呼ぶ）は，以下に示す通りである．

S1：$p(z^\nu+\Delta z)=\sum_{k=0}^{n} a_k{}^{(\nu)}(\Delta z)^k$

　の係数 $a_n{}^{(\nu)}(=1), a_{n-1}{}^{(\nu)}, \cdots, a_0{}^{(\nu)}$ を計算する．

S2：$\mu\leftarrow 1$

S3：$\zeta_k(\mu)\leftarrow(-\mu a_0{}^{(\nu)}/a_k{}^{(\nu)})^{1/k}$　$(k=1,\cdots,n)$

　（ここで $(\ \ )^{1/k}$ は任意の分枝を選んでよい）

S4：$\min_{1\leq k\leq n}|\zeta_k(\mu)|$ を与える k を m とする．

S5：$\left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq m}} a_k{}^{(\nu)}\zeta_m(\mu)^k\right|\leqslant\beta\mu|a_0{}^{(\nu)}|$

　ならば[**]，$z^{(\nu+1)}\leftarrow z^{(\nu)}+\zeta_m(\mu)$ として第 ν 段を終了する．そうでなければ，$\mu\leftarrow\mu/(1+\delta)$ として S3 に戻る．ただし，$\beta\,(0<\beta<1)$ および $\delta\,(>0)$ はあらかじめ与えられた定数である．

この算法において，S5 の判定条件が満たされて，第 ν 段が終了したときの μ の値を $\mu^{(\nu)}$ と書くと，次の不等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}|p(z^{(\nu+1)})|&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n} a_k{}^{(\nu)}\zeta_m(\mu^{(\nu)})^k+\mu^{(\nu)}a_0{}^{(\nu)}\right|\\&\quad+(1-\mu^{(\nu)})|a_0{}^{(\nu)}|\\&=\left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq m}} a_k{}^{(\nu)}\zeta_m(\mu^{(\nu)})^k\right|\\&\quad+(1-\mu^{(\nu)})|a_0{}^{(\nu)}|\\&\leqslant\beta\mu^{(\nu)}|a_0{}^{(\nu)}|+(1-\mu^{(\nu)})|a_0{}^{(\nu)}|\\&=(1-(1-\beta)\mu^{(\nu)})|p(z^{(\nu)})|.\end{aligned}\qquad(2.1)$$

---

† Global Convergence of Hirano's Modification of the Newton Method for Solving Algebraic Equations by KAZUO MUROTA (Department of Mathematical Engineering and Instrumentation Physics, University of Tokyo).

†† 東京大学工学部計数工学科

* 類似の算法が Nickel[7)] によって提案されている．

** 実際に平野法を用いるときには，S5 の判定条件を

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k{}^{(\nu)}\zeta_m(\mu)^k\right|\leqslant(1-(1-\beta)\mu)|a_0{}^{(\nu)}|$$

とした方がよい．このときも以下の証明は成立する．

この不等式は，各段が終了したとすれば，関数値が確実に減少することを示している．文献によっては，S5の判定基準を

$$|p(z^{(\nu+1)})|<|p(z^{(\nu)})|$$

としているものもあり，従来，この不等式だけを根拠として，平野の変形 Newton 法の大域的収束性が主張されてきた．しかし，関数値の列が減少列を成すからといって，それが0に収束する保証はないし，各段ごとに(2.1)が満たされたとしても，$\mu^{(\nu)}$ が ν の増加とともに十分速く0に収束してしまうならば，$p(z^{(\nu)})$ が0に収束しないこともありうる．しかし，不等式(2.1)によれば，変形 Newton 法の大域的収束性を示すには，各段が有限回の反復で終了し，さらに，ν について一様な下界 $\theta(>0)$ が存在して，$\mu^{(\nu)}>\theta$ となることを示せば十分であることがわかる．以下の証明においては，これよりさらに強く，この下界 θ は，多項式の次数 n およびパラメータ β, δ だけによって定まり，個々の多項式や初期値の与え方とは無関係であることが示される．

3. 予備的考察

平野の変形 Newton 法の基本方針は，十分良い近似解が得られた後は Newton 法と同じ挙動をするようにしながら，しかも近似解が真の解からいかに遠いところにあっても，反復1段ごとに関数の絶対値が徐々に減少するようにすることによって，局所的収束率を損わずに，大域的に確実に収束させようとすることである．この基本方針は，複素関数論における“最大値の原理”(に同値な命題)「正則関数の絶対値は零以外の極小値を有しない」によって正当化される．すなわち，ある初期値から始めて関数の絶対値を減らしていくならば，0でない極小値に落ち込んで動きがとれなくなるようなことは決して起こらない．この事実は平野法にとって最も基本的であることはいうまでもないが，従来の文献では明示的には述べられていなかったようである．

次に，算法の各段内で反復される S3〜S5 のループについては，μ が十分小さくなると，S4 で $m=k_0$ (k_0 は，$a_k^{(\nu)}\neq 0$ なる最小の k) が選ばれ，S5 の判定基準を満足して脱出できる．すなわち，各段は有限回の反復の後に終了する．次節において，低次方程式を例にしてこの部分の挙動を具体的に解析して，第 ν 段内のループの反復回数は，ν について一様な上界をもつこと，言いかえれば，ν によらない θ が存在して，$\mu^{(\nu)}>\theta$ となることを示し，一般の場合への布石とする．

この算法は，元来 Newton 法の改良版として考案されたものであり，近似解が真の解に十分近くなると，その解の重複度とは無関係に S4 において $m=1$ となり，Newton 法に一致する．したがって，局所的収束性は，単根ならば二次収束，重根ならば一次収束である．

4. 低次方程式の場合

変形 Newton 法の第 ν 段での S3〜S5 の反復回数が ν に依らない上界を持つことを，2次方程式と3次方程式について具体的に計算する．このことは，ν によらない θ が存在して，$\mu^{(\nu)}>\theta$ となることと同値であるが，以下においては，さらに強く，θ が初期値のとり方や個々の方程式とは無関係にとれることを示す．以下，第 ν 段だけを考えるので，上添字 $^{(\nu)}$ は省略する．

まず，次の記号を用意する：

$$M_m=\{\mu \mid |\zeta_m(\mu)|\leqslant|\zeta_k(\mu)|,\ k=1,\cdots,n\} \quad (4.1)$$

$$D_m=\{\mu \mid |\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq m}} a_k\zeta_m(\mu)^k|\leqslant\beta\mu|a_0|\} \quad (4.2)$$

ここで，M_m は S4 において，$m=m$ が選ばれるような μ の範囲を表わし，D_m は S5 の判定条件が満たされるような μ の範囲を表わす．S3〜S5 のループを脱出するのは，等比的に減少する μ の数列 $\{(1+\delta)^{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ が，はじめて $\bigcup_{m=1}^{n}(M_m\cap D_m)$ にはいったときである．以下，$a_0\neq 0$ と仮定してよい．

4.1 2次方程式の場合

算法の S3 によって

$$\zeta_1(\mu)=\frac{-\mu a_0}{a_1},\qquad \zeta_2(\mu)=(-\mu a_0)^{1/2}$$

となるので，簡単な計算により，

$$|\zeta_1(\mu)|\leqslant|\zeta_2(\mu)| \Leftrightarrow \mu\leqslant|a_1|^2/|a_0|$$

となることがわかる．すなわち，(4.1)の記号によれば，

$$M_1=\{\mu \mid \mu\leqslant|a_1|^2/|a_0|\}$$

$$M_2=\{\mu \mid \mu\geqslant|a_1|^2/|a_0|\}$$

であり，μ と $|a_1|^2/|a_0|$ の大小関係に応じて，S4で選ばれる m の値が定まる．$\mu\leqslant|a_1|^2/|a_0|$ ならば $m=1$ となり，$\zeta_1(\mu)$ が修正量の候補者となるが，これが S5 の判定条件を満たすには，さらに，

$$\mu^2|a_0|^2/|a_1|^2\leqslant\beta\mu|a_0|,$$

すなわち，

$\mu\leqslant\beta|a_1|^2/|a_0|$

となっていなければならない．$m=2$ となる場合も同様に計算すると，

$D_1=\{\mu|\mu\leqslant\beta|a_1|^2/|a_0|\}$,

$D_2=\{\mu|\mu\geqslant\beta^{-2}|a_1|^2/|a_0|\}$

を得る．以上をまとめると，

$$\bigcup_{m=1}^{2}(M_m\cap D_m)$$
$$=[0,\beta|a_1|^2/|a_0|]\cup[\beta^{-2}|a_1|^2/|a_0|,\infty)$$

となる．ここで，下側の区間の上限と上側の区間の下限の比は β^3 であるから，初項1，公比 $(1+\delta)^{-1}$ で減少する μ の列は，高々，第 $(\lceil -3\log\beta/\log(1+\delta)\rceil)$ 項までの間に上の集合の中に一度は属する．すなわち，S3～S5のループの反復回数は$(\lceil -3\log\beta/\log(1+\delta)\rceil)$を越えない．したがって，$\mu$ の下界 θ は，各段の S1 で定められる展開係数 a_0, a_1 とは無関係に，

$$\theta=\frac{\beta^3}{1+\delta}$$

で与えられる．

4.2 3次方程式の場合

算法の S3 によって，

$$\zeta_1(\mu)=\frac{-\mu a_0}{a_1},\quad \zeta_2(\mu)=\left(\frac{-\mu a_0}{a_2}\right)^{1/2},$$
$$\zeta_3(\mu)=(-\mu a_0)^{1/3}$$

となる．ここで，

$$\xi\equiv|a_1||a_0a_2|^{-1/2},\quad \eta\equiv|a_2|^{1/2}|a_0|^{-1/6}$$

とおくと，M_m の定義(4.1)により，ただちに，

$M_1=\{\mu|\mu\leqslant\min(\xi^2,(\xi\eta)^{3/2})\}$,

$M_2=\{\mu|\xi^2\leqslant\mu\leqslant\eta^6\}$,

$M_3=\{\mu|\mu\geqslant\max((\xi\eta)^{3/2},\eta^6)\}$

を得る．次に，D_m の定義(4.2)より，

$$D_m\subset\{\mu|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 3\\ k\neq m}}|a_k\zeta_m(\mu)^k|\leqslant\beta\mu|a_0|\}$$
$$\subset\left\{\mu\,\middle|\,|a_k\zeta_m(\mu)^k|\leqslant\frac{1}{2}\beta\mu|a_0|,\,k\neq m\right\}$$

($\equiv B_m$ とおく)．

若干の計算の結果，

$$B_1=\left\{\mu\,\middle|\,\mu\leqslant\min\left(\frac{\beta}{2}\xi^2,\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/2}(\xi\eta)^{3/2}\right)\right\},$$
$$B_2=\left\{\mu\,\middle|\,\frac{4}{\beta^2}\xi^2\leqslant\mu\leqslant\frac{\beta^2}{4}\eta^6\right\},$$
$$B_3=\left\{\mu\,\middle|\,\mu\geqslant\max\left(\left(\frac{2}{\beta}\right)^{3/2}(\xi\eta)^{3/2},\left(\frac{2}{\beta}\right)^3\eta^6\right)\right\}$$

となること，さらに，各mに対して，$B_m\subset M_m\cap D_m$ となることがわかる．場合を分ける．

(i) $\xi\geqslant(2/\beta)\eta^3$ のとき

$$B_1=\left\{\mu\,\middle|\,\mu\leqslant\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/2}(\xi\eta)^{3/2}\right\},$$
$$B_3=\left\{\mu\,\middle|\,\mu\geqslant\left(\frac{2}{\beta}\right)^{3/2}(\xi\eta)^{3/2}\right\}$$

となり，B_1 の上限と B_3 の下限の比は $(\beta/2)^2$ であるから，

$$\theta=\frac{\beta^2}{4(1+\delta)} \tag{4.3}$$

にとれる．

(ii) $\xi\leqslant(2/\beta)\eta^3$ のとき

$$B_1=\left\{\mu\,\middle|\,\mu\leqslant\frac{\beta}{2}\xi^2\right\},$$
$$B_2=\left\{\mu\,\middle|\,\frac{4}{\beta^2}\xi^2\leqslant\mu\leqslant\frac{\beta^2}{4}\eta^6\right\}\ \left(\xi>\frac{\beta^2}{4}\eta^3\text{ なら空集合}\right),$$
$$B_3=\left\{\mu\,\middle|\,\mu\geqslant\left(\frac{2}{\beta}\right)^3\eta^6\right\}$$

となる．初項1，公比 $(1+\delta)^{-1}$ の等比数列を成す μ の系列が $B_1\cup B_2\cup B_3$ に初めてはいる点が最も小さくなるのは，$(2/\beta)^3\eta^6>1$ となって，$\mu=1$ が B_3 に属さず，ある k に対して，

$$(1+\delta)^{-k}>\frac{\beta^2}{4}\eta^6,\quad (1+\delta)^{-k-1}<\frac{4}{\beta^2}\xi^2$$

となって，等比数列が区間 B_2 を飛び越して，B_1 に達する場合であるが，このとき，B_1 の上限は，

$$\frac{\beta}{2}\xi^2\geqslant\frac{\beta^3}{8}(1+\delta)^{-k-1}\geqslant\frac{\beta^5\eta^6}{32(1+\delta)}$$
$$\geqslant\frac{\beta^8}{256(1+\delta)}$$

を満たすので，

$$\theta=\frac{\beta^8}{256(1+\delta)^2} \tag{4.4}$$

が下界を与える．

以上の2つの場合 (4.3), (4.4) を合わせると，3次方程式に対しては，S1 で定まる a_0, a_1, a_2 とは無関係に

$$\theta=\frac{\beta^8}{256(1+\delta)^2}$$

が μ の下界を与えることがわかる．

次節において，一般の次数の方程式に対しても同様の事実が成り立つことを，θ の具体的な表式を与えることによって証明する．

5. 大域的収束性の証明

平野の変形 Newton 法の第 ν 段が終了したときの

μ の値を $\mu^{(\nu)}$ とするとき，ν によらない θ が存在して，$\mu^{(\nu)}>\theta$ となることを示すことによって，平野の変形 Newton 法の大域的収束性を証明する．この節でも，第 ν 段だけを考えるので，上添字$^{(\nu)}$ は省略する．

$\zeta_k(1)=\zeta_k$ と書くと，$\zeta_k(\mu)=\mu^{1/k}\zeta_k$ となり，(4.1)，(4.2)で定義される集合 M_m, D_m は，

$$M_m=\left\{\mu\left|\mu^{\frac{1}{m}-\frac{1}{k}}\leqslant\left|\frac{\zeta_k}{\zeta_m}\right|,\ k=1,\cdots,n\right.\right\},$$

$$D_m=\left\{\mu\left|\left|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\k\neq m}}\mu^{\frac{k}{m}-1}\left(\frac{\zeta_m}{\zeta_k}\right)^k\right|\leqslant\beta\right.\right\}$$

と表わされる．μ の区間 B_m を

$$B_m=\left\{\mu\left|\mu^{\frac{1}{m}-\frac{1}{k}}\leqslant c\left|\frac{\zeta_k}{\zeta_m}\right|,\ k=1,\cdots,n\right.\right\},\quad(5.1)$$

$$c\equiv\beta/(1+\beta),$$

で定義すると，$B_m\subset M_m\cap D_m$ となる．実際，$B_m\subset M_m$ は $0<c<1/2$ であることによって明らかであり，$B_m\subset D_m$ は，

$$\mu\in B_m\Rightarrow\mu^{\frac{k}{m}-1}\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_k}\right|^k\leqslant c^k,\ k=1,\cdots,n$$

$$\Rightarrow\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\k\neq m}}\mu^{\frac{k}{m}-1}\left|\frac{\zeta_k}{\zeta_m}\right|^k\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\k\neq m}}c^k\leqslant\frac{c}{1-c}=\beta$$

による．ゆえに，$\bigcup_{m=1}^{n}B_m\subset\bigcup_{m=1}^{n}(M_m\cap D_m)$ となる．

次の定理は，任意の $(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ に対して，

$$\{B_m\cap[\theta,1]\}_{m=1}^{n}$$

の中に，対数的長さ（=上限と下限の比）が $(1+\delta)$ 以上の区間が存在することを主張する．

〔定理〕

任意の $\beta\,(0<\beta<1)$，任意の $\delta\,(>0)$，任意の $(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ に対して，ある $m\,(1\leqslant m\leqslant n)$ が存在して，

$$B_m\cap[\theta,1]\neq\phi$$

であって，

$$\frac{\sup(B_m\cap[\theta,1])}{\inf(B_m\cap[\theta,1])}>1+\delta,\quad(5.2)$$

ただし，

$$\theta=\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{2n^3}(1+\delta)^{-n}.\quad(5.3)$$

任意の $(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ を考えることは，任意の係数 $(a_0,\cdots,a_n)$ を考えることと等価であるから，この定理は，変形 Newton 法のパラメータ $\beta\,(0<\beta<1)$，$\delta\,(>0)$ を任意に指定するとき，各段において定まる $\mu^{(\nu)}$ が，初期値のとり方や，解くべき個々の方程式の係数とは無関係に，方程式の次数だけによって定まる下界 θ をもつこと，すなわち，すべての ν に対して，

$$\mu^{(\nu)}>\theta$$

を意味し，したがって，変形 Newton 法の大域的収束性を保証する．同時に，各段における S3～S5 のループの反復回数が

$$N\equiv\frac{-\log\theta}{\log(1+\delta)}=n+\frac{2n^3\log(1+1/\beta)}{\log(1+\delta)}\quad(5.4)$$

で上から抑えられていることも示す．

〔定理の証明〕

B_m の定義(5.1)により，

$$\mu\in B_m\Leftrightarrow$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m-1}\left(\frac{1}{c}\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_j}\right|\right)^{\frac{mj}{m-j}}\leqslant\mu$$

$$\leqslant\min_{m+1\leqslant k\leqslant n}\left(c\left|\frac{\zeta_k}{\zeta_m}\right|\right)^{\frac{km}{k-m}}.\quad(5.5)$$

定理が成り立たないと仮定すると，ある $\beta\,(0<\beta<1)$，$\delta\,(>0)$，$(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ が存在して，すべての $m\,(1\leqslant m\leqslant n)$ に対して，

（i） $B_m\neq\phi$ で $B_m\subset[0,(1+\delta)\theta)$，

（ii） $B_m\neq\phi$ で $B_m\subset((1+\delta)^{-1},\infty)$，

（iii） B_m の対数的長さが $(1+\delta)$ 未満（$B_m=\phi$ も含むものと解釈する）

の少なくとも 1 つが成り立つ．B_m の定義(5.5)を用いると，これらは次のように書ける．

（i） $B_m\neq\phi$ で，

$$\exists k\,(>m):\left(c\left|\frac{\zeta_k}{\zeta_m}\right|\right)^{\frac{km}{k-m}}<(1+\delta)\theta.$$

両辺の対数をとると，

$$-\frac{\log|\zeta_m|-\log|\zeta_k|}{\frac{1}{m}-\frac{1}{k}}<\log\theta+\log(1+\delta)$$

$$+\frac{\log(1/c)}{\frac{1}{m}-\frac{1}{k}}.$$

したがって

$$-\Delta(m,k)<\log\theta+\log(1+\delta)+n^2\log(1/c),\quad(5.6)$$

ただし，

$$\Delta(m,k)=\frac{\log|\zeta_m|-\log|\zeta_k|}{\frac{1}{m}-\frac{1}{k}}.$$

（ii） $B_m\neq\phi$ で，

$$\exists j\,(<m):(1+\delta)^{-1}<\left(\frac{1}{c}\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_j}\right|\right)^{\frac{mj}{m-j}}.$$

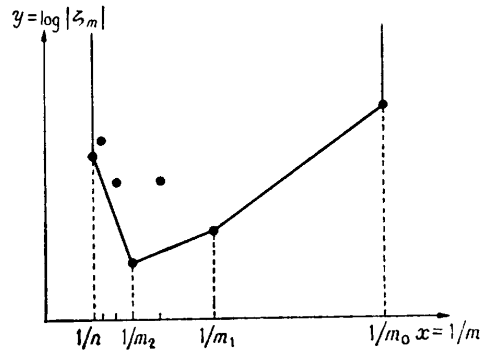

図 1 証明に用いる凸多角形
Fig. 1 The convex polytope used in the proof.

これより

$$\Delta(j,m)<\log(1+\delta)+n^2\log(1/c). \qquad (5.7)$$

(iii) $\exists j\,(<m),\ \exists k\,(>m)$:

$$(1+\delta)\left(\frac{1}{c}\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_j}\right|\right)^{\frac{mj}{m-j}}>\left(c\left|\frac{\zeta_k}{\zeta_m}\right|\right)^{\frac{km}{k-m}}.$$

上と同様にして,

$$\Delta(j,m)-\Delta(m,k)<\log(1+\delta)+2n^2\log(1/c). \qquad (5.8)$$

さて, xy 平面上の n 個の点 $(1/m, \log|\zeta_m|)\,(m=1,\cdots,n)$, および 2 つの半直線 $x=1/k_0\,(y\geqslant\log|\zeta_1|)$, $x=1/n\,(y\geqslant\log|\zeta_n|)$ の凸閉包の頂点の座標を $1/m_0, 1/m_1, \cdots, 1/m_L\,(m_0<m_1<\cdots<m_L)$ とする (k_0 は, $a_k\neq0$ なる最小の k) (**図 1 参照**). 明らかに $m_0=k_0$, $m_L=n$ である. $m_l\,(0\leqslant l\leqslant L)$ の中で, (i)を満たす最大のものを m_s, (ii)を満たす最小のものを m_f とする. (i)は $l=0$ で, (ii)は $l=n$ で成り立つから, m_s, m_f ともに定義され, さらに, $m<m'\,(B_m\neq\phi,\ B_{m'}\neq\phi)$ ならば, (5.5)により,

$$\begin{aligned}\sup B_m&=\min_{m+1\leqslant k\leqslant n}\left(c\left|\frac{\zeta_k}{\zeta_m}\right|\right)^{\frac{km}{k-m}}\\&\leqslant\left(c\left|\frac{\zeta_{m'}}{\zeta_m}\right|\right)^{\frac{m'm}{m'-m}}\\&\leqslant\left(\frac{1}{c}\left|\frac{\zeta_{m'}}{\zeta_m}\right|\right)^{\frac{m'm}{m'-m}}\\&\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant m'}\left(\frac{1}{c}\left|\frac{\zeta_{m'}}{\zeta_j}\right|\right)^{\frac{m'j}{m'-j}}=\inf B_{m'}\end{aligned}$$

であり, $n\geqslant2$ ならば, $(1+\delta)\theta<(1+\delta)^{-1}$ となるので, $m_s<m_f$ である. m_s と m_f の定め方によって, $m=m_l\,(s<l<f)$ に対しては(iii)が成り立っている. (i)で $m=m_s$ の場合には, (5.6)の左辺は $k=m_{s+1}$ のときに最小となるので, 存在が保証されている k は m_{s+1} にとることができる. すなわち,

$$-\Delta(m_s, m_{s+1})<\log\theta+\log(1+\delta)+n^2\log(1/c). \qquad (5.9)$$

(iii)で $m=m_l\,(s<l<f)$ の場合にも, 同様に, (5.8)において $j=m_{l-1}$, $k=m_{l+1}$ とできるので, $s<l<f$ に対し,

$$\Delta(m_{l-1}, m_l)-\Delta(m_l, m_{l+1})<\log(1+\delta)+2n^2\log(1/c). \qquad (5.10)$$

(ii)で $m=m_f$ の場合にも, (5.7)で $j=m_{f-1}$ にとれるので,

$$\Delta(m_{f-1}, m_f)<\log(1+\delta)+n^2\log(1/c). \qquad (5.11)$$

以上の不等式(5.9), (5.10), (5.11)を加え合わせると,

$$0<\log\theta+(f-s+1)\log(1+\delta)+2(f-s)n^2\log(1/c).$$

ゆえに,

$$0<\log\theta+n\log(1+\delta)+2n^3\log(1/c).$$

ところが, これは θ の定義(5.3)と矛盾する. (証明終り.)

6. "最適" パラメータ

前節において, 平野の変形 Newton 法が, 任意のパラメータ値 $\beta\,(0<\beta<1)$, $\delta\,(>0)$ に対し, 大域的収束性をもつことが示されたが, さらに, (2.1)と $\mu^{(\nu)}>\theta$ によって, 関数値は少なくとも収束率 $(1-(1-\beta)\theta)$ をもって 0 へ一次収束することがわかる. 変形 Newton 法は, 最終的には Newton 法に一致し, 通常, 二次収束性を示すが, 初期段階では一次収束すると期待される. 本節では, 前節の理論的な評価 (これは, 実際の値に比べればかなり甘いものになっていると思われるが) に基づいて, この一次収束域での最悪の場合の収束性を高めるためのパラメータ β, δ の最適値を探索する.

関数値の収束率が $(1-(1-\beta)\theta)$ で見積れるとすれば, 関数値がある与えられた値より小さくなるために必要な段数は $-\log(1-(1-\beta)\theta)$ に反比例する. 一方, 各段における S3〜S5 のループごとの計算量は n に比例し, ループの反復回数は (5.4) で与えられる N で見積れるので, 一次収束域での計算量は, 大略,

$$R\equiv\frac{-nN}{\log(1-(1-\beta)\theta)}=\frac{n\log\theta}{\log(1-(1-\beta)\theta)\log(1+\delta)}$$

に比例すると考えられる (各段における S1 の手間は, n^2 程度であり, これは nN に比べて同程度以下である). この R が最小になるように, β と δ を定めることを目指す. ここで, $-\log(1-(1-\beta)\theta)\fallingdotseq(1-\beta)\theta$ として, さらに, 独立変数を (θ, c) にとると,

$$R \fallingdotseq \frac{-n^2(1-c)\log\theta}{(1-2c)\theta(2n^3\log c-\log\theta)}$$

となる．ただし，$0<c=\beta/(1+\beta)<1/2$，$0<\theta<c^{2n^3}$．これを θ, c で偏微分して，それぞれ0に等しいとおくと，

$$(\log\theta)^2-2n^3\log c\log\theta+2n^3\log c=0, \qquad (6.1)$$

$$\log\theta=2n^3\log c-\frac{2n^3(1-c)(1-2c)}{c} \qquad (6.2)$$

を得る．(6.1)と(6.2)から $\log\theta$ を消去すると，n が大きいときの解は

$$\hat{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n^3}+0\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

となる．したがって，最適パラメータは，n が大きいとき，

$$\hat{\beta}=1-\frac{1}{n^3},$$

$$\hat{\delta}=\frac{1}{n}$$

で与えられることになる．このとき，関係諸量は次のようになる：

$$\hat{\theta}\fallingdotseq\frac{1}{e^2\cdot 4^{n^3}}$$

$$\hat{R}\fallingdotseq 2e^2\log 2\cdot n^8 4^{n^3}.$$

7. むすび

本論文では，いわゆる“平野法”の大域的収束性を論じ，特に，収束速度に関して，方程式には無関係に次数のみで定まる限界を与えることに成功した．この理論的限界はまだかなり甘く，平野法の実際の挙動をあまりよく反映していないので，さらに実用的な限界を探究することが今後の課題である．

最後に，本研究の機会を与えて下さり，また，有益な助言を多く与えて下さった東京大学工学部伊理正夫教授に感謝します．

参考文献

1) 山本哲朗：ある代数方程式解法と解の事後評価法，数理科学，Vol. 14, No. 7, pp. 52-57 (1976).
2) 山本哲朗，古金卯太郎，野倉久美：代数方程式を解く Durand-Kerner 法と Aberth 法，情報処理，Vol. 18, No. 6, pp. 566-571 (1977).
3) Iri, M., Yamashita, H., Terano, T. and Ono, H.: An Algebraic-Equation Solver with Global Convergence Property, 京都大学数理解析研究所研究集会「数値計算のアルゴリズムとコンピューター」1977年10月31日；同所講究録に公表の予定.
4) 平野菅保：代数方程式の解法及び誤差，第8回プログラミングシンポジウム報告集，情報処理学会 (1967).
5) 木村久男他：電気学会大学講座，電子演算工学概論，2版, pp. 110-123, 電気学会, 東京(1976).
6) 情報処理学会：情報処理ハンドブック，10編7章3節，オーム社，東京 (1980).
7) Nickel, K.: Numerische Berechnung der Wurzeln eines Polynoms. *Numerische Mathematik*, Vol. 9, pp. 80-98 (1966).

(昭和55年5月23日受付)
(昭和55年6月19日採録)