

## 連立一次方程式の並列処理向き反復解法の収束性と応用†

土 肥 俊†† 小 山 昭 一††

本論文では、係数行列がスティルチェス行列になる場合の連立一次方程式の並列反復解法（並列SOR法）の収束性に関する二つの定理を導き、実際の並列処理システムへのその応用について述べる。並列SOR法は、多数のプロセッサが互いにメモリを共有し通信できるような並列処理システムを効率的に用いて連立一次方程式を解くために導入する反復解法であり、現存する多くのアレイ方式の並列処理システムによる偏微分方程式解法に適した方法である。本論文で得られる定理1は過緩和係数が1における並列SOR法と他のよく知られた三つの反復解法との漸近的な収束速度の大小関係を明らかにする。定理2は係数行列のある‘特定要素が0となる場合’に並列SOR法が任意の初期値に対して収束するための必要十分条件を与える。数値実験では、定理2における上記の零要素の仮定が満たされない場合には並列SOR法は収束が遅く、また必ずしも収束しないことを示し、この仮定が実用上も重要であることを示す。そこで、この仮定がアレイ方式の並列処理システムによる偏微分方程式解法においてどのように満たされるかを差分法、有限要素法の場合についてそれぞれ具体的に示す。この仮定は上述のような並列処理システムによる実際の反復計算では‘比較的容易’に満たされることがわかる。

## 1. ま え が き

偏微分方程式の数値解を十分な精度で得ようとする、現在ある大型計算機をもってしてもかなりの計算時間を必要とする。LSI技術の進歩等により計算機の演算速度はかなり向上しているが、それに伴って計算のニーズも大型化している。そのような中で、近年多数のプロセッサを用いる並列処理が注目され、コストパフォーマンスの点における優位性もあいまって、今後の高速演算の有効な手段となりつつある。実際、偏微分方程式の求解を目的とした並列処理システムが多数報告されている<sup>1)~6)</sup>。これらの多くは、多数の要素プロセッサ(EP)が1~3次元の直角格子状に並び、隣接するEP間のデータ転送が直接的に行われるアレイ方式の並列処理システムである。

筆者らは文献6)で、有限要素法による偏微分方程式解法の並列処理アルゴリズムを提案した。そこでは有限要素法による離散化により得られる大規模連立一次方程式を、上述のような並列処理システムを効率的に用いて解くために、新たな反復解法を導入している。それは汎用計算機による逐次計算で連立一次方程式を解くための反復解法として知られている点SOR法を並列処理に適するように拡張した並列SOR法である。

本論文では3章で、偏微分方程式の数値解法と関連

して係数行列がスティルチェス行列になる場合に話を限って、並列SOR法の収束性に関する二つの定理を導く。定理1は過緩和係数が1における並列SOR法（並列ガウス=ザイデル法）と点ヤコビ法、点ガウス=ザイデル法、ブロックガウス=ザイデル法の漸近的な収束速度の大小を明らかにする。定理2は係数行列のある特定要素が0となるときに並列SOR法が任意の初期値に対して収束するための必要十分条件を与える。

4章では、これらの二つの定理に現れる零要素の仮定について、それが満たされる場合と満たされない場合の収束性を数値実験により比較検討する。この仮定が満たされない場合には並列SOR法は収束が遅く、また必ずしも収束しないことが示され、この仮定の実用上の重要性が示される。

5章では、この仮定がアレイ方式の並列処理システムによる偏微分方程式解法においてどのように満たされるかを差分法、有限要素法の場合についてそれぞれ具体的に示す。この仮定は一見特殊であるが、上述のような並列処理システムによる実際の反復計算を考えると、ある具体的な意味をもっており、比較的容易に満たされる。

## 2. 並列SOR法

$M(=n \times N)$  元連立一次方程式

$$Ax = b \quad (1)$$

を解くことを考える。A, x, b を次のように分割する。

† Convergence and Application of an Iterative Method Suitable to Parallel Computation for Solving Simultaneous Linear Equations by SHUN DOI and SHOICHI KOYAMA (Faculty of Engineering, Hokkaido University).

†† 北海道大学工学部精密工学科

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}. \quad (2)$$

ここで各小行列  $A_{ij}$  およびベクトル  $\mathbf{x}_i, \mathbf{b}_i$  の要素をそれぞれ次のように表わす。

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij11} & \cdots & a_{ij1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ijn1} & \cdots & a_{ijnn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{in} \end{bmatrix}.$$

このとき式(1)に対する並列SOR法を

$$\begin{aligned} x_{ik}^{(m+1)} = & x_{ik}^{(m)} + \frac{\omega}{a_{ikk}} \left\{ b_{ik} \right. \\ & - \sum_{j=1}^N \left( \sum_{l=1}^{k-1} a_{ijlk} x_{jl}^{(m+1)} \right. \\ & \left. \left. + \sum_{l=k}^n a_{ijlk} x_{jl}^{(m)} \right) \right\}, \\ & (i=1, \dots, N, k=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3)$$

により定義する。 $x_{ik}^{(m)}$  は  $m$  回反復後の  $x_{ik}$  の近似解を表し、 $x_{ik}^{(0)}$  はその初期値である。また  $\omega$  は過緩和係数であり、通常は  $1 \leq \omega < 2$  の範囲の値をとる。なお、式(3)で  $\omega=1$  としたときをとくに並列ガウス=ザイデル法と呼ぶことにする。

式(3)で  $N=1$  として添字  $i, j$  を省略すると

$$\begin{aligned} x_k^{(m+1)} = & x_k^{(m)} + \frac{\omega}{a_{kk}} \left( b_k - \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} x_l^{(m+1)} \right. \\ & \left. - \sum_{l=k}^n a_{kl} x_l^{(m)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

となる。これは最も基本的な反復法の一つである点SOR法の式である。一方  $n=1$  とすると式(3)は

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^{(m)} \right) \quad (5)$$

となり、 $\omega=1$  のとき点ヤコビ法の式となる。

1台の計算機を用いかつ解ベクトルに対応する1個の1次元配列を用いて逐次的に行う反復計算の過程は式(4)で表される。一方  $N$  台のプロセッサが互いにメモリを共有し合うような並列処理システムを用いて、各プロセッサにそれぞれ  $n$  個ずつ解の計算を割り当てて反復計算を行うとき、その反復計算の過程は式(3)で表現される。すなわち  $M(=n \times N)$  元連立一次方程式の解ベクトル  $\mathbf{x}$  の  $n \times N$  個の要素を  $n$  個ずつのグループ  $\mathbf{x}_i (i=1, \dots, N)$  に分け、各  $\mathbf{x}_i$  の計算を  $N$  台のプロセッサに割り当てたとき、並列処理システムの  $i$  番目のプロセッサが行う反復計算の過程を式(3)が表している。

ここで  $D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}$  を  $A_{ij} = D_{ij} - E_{ij} - F_{ij}$  を満たす対角行列、狭義下3角行列、狭義上3角行列と

する。このとき式(3)は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^{(m+1)} = & \mathbf{x}_i^{(m)} + \omega D_{ii}^{-1} \left\{ \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^N (D_{ij} \mathbf{x}_j^{(m)} \right. \\ & \left. - E_{ij} \mathbf{x}_j^{(m+1)} - F_{ij} \mathbf{x}_j^{(m)}) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表される。

さらに

$$\begin{aligned} D \triangleq & [D_{ij}], \quad E \triangleq [E_{ij}], \quad F \triangleq [F_{ij}], \\ D' \triangleq & \text{block diag} (D_{11}, D_{22}, \dots, D_{NN}). \end{aligned} \quad (7)$$

と定義すると、式(6)は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(m+1)} = & \mathbf{x}^{(m)} + \omega D'^{-1} (\mathbf{b} - D \mathbf{x}^{(m)} \\ & + E \mathbf{x}^{(m+1)} + F \mathbf{x}^{(m)}) \end{aligned} \quad (8)$$

と表される。式(8)で  $\omega=1$  とすると並列ガウス=ザイデル法の式

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(m+1)} = & \mathbf{x}^{(m)} + D'^{-1} (\mathbf{b} - D \mathbf{x}^{(m)} \\ & + E \mathbf{x}^{(m+1)} + F \mathbf{x}^{(m)}) \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。式(8), (9)に対応する反復行列をそれぞれ  $\mathcal{L}_{SP}, C_P$  とし、並列SOR行列、並列ガウス=ザイデル行列と呼ぶことにする。すなわち

$$\mathcal{L}_{SP} \triangleq (D' - \omega E)^{-1} (D' - \omega D + \omega F), \quad (10)$$

$$C_P \triangleq (D' - E)^{-1} (D' - D + F). \quad (11)$$

式(1)に対する点ヤコビ法は、式(7)を用いると

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + D'^{-1} (\mathbf{b} - A \mathbf{x}^{(m)}) \quad (12)$$

となる。したがって式(12)に対する点ヤコビ行列  $B_S$  は

$$B_S \triangleq D'^{-1} (D' - A) \quad (13)$$

となる。

### 3. 並列SOR法の収束性

#### 3.1 準備

各  $\mathbf{x}_i$  の第  $k$  番目の要素  $x_{ik} (i=1, \dots, N)$  を取り出し、 $i$  の小さい順に並べたベクトルを  $\hat{\mathbf{x}}_k$  とする。

$$\hat{\mathbf{x}}_k \triangleq \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{Nk} \end{bmatrix}, \quad (k=1, \dots, n).$$

さらに

$$\hat{\mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

とおくと、 $\mathbf{x}$  と  $\hat{\mathbf{x}}$  は置換行列  $P$  によって次のように関係づけられる。

$$\hat{\mathbf{x}} = P \mathbf{x}. \quad (15)$$

ただし、



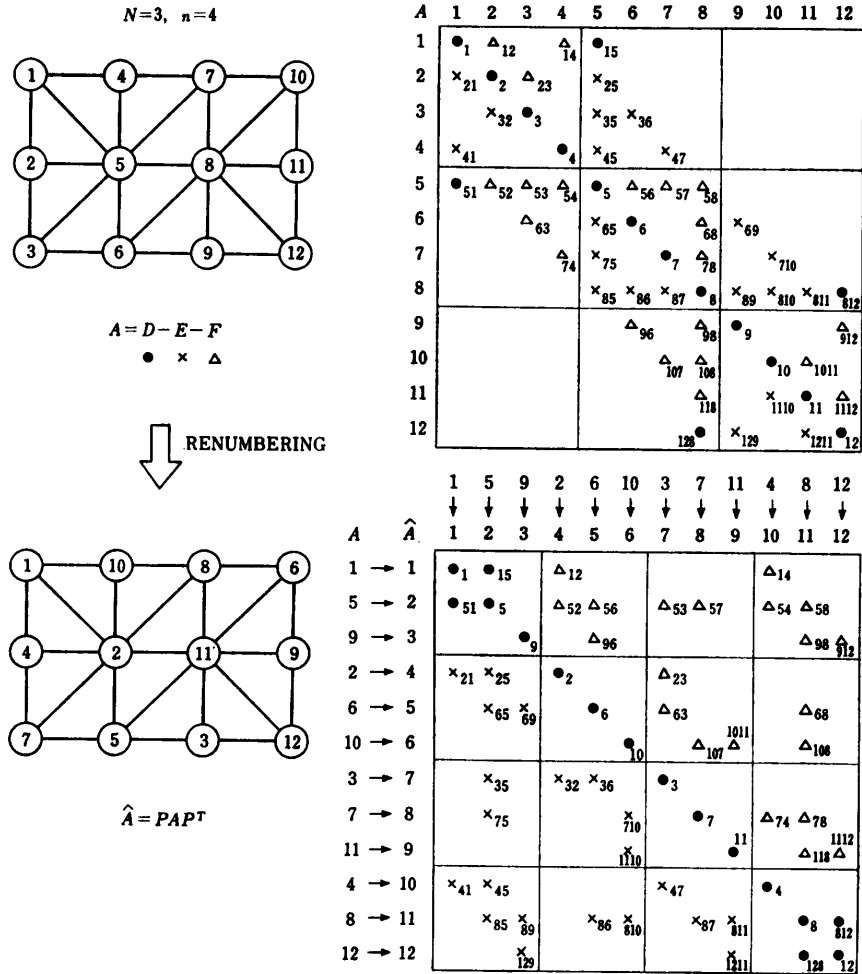


図1 有限要素モデルの節点番号の付け直しに伴うマトリックスの変換  
 Fig. 1 An illustrative permutation of a coefficient matrix arising along with the renumbering of nodes in a finite element model.

3.2 並列ガウス-サイデル法のスペクトル半径

行列  $\hat{A}$  を既約スティルチェス行列とする。このとき付録の定理2より  $\hat{A}$  は  $M$  行列であり、さらに  $\hat{A}^{-1} > 0$  である。式(23), (24), (27), (28) で定義される  $\hat{M}_J, \hat{M}_P, \hat{M}_S, \hat{M}_B$  はそれぞれ  $\hat{A}$  のある非対角要素を0として得られる行列であり、 $\hat{A}$  は  $M$  行列であるから、付録の定理3より

$$\hat{A} = \hat{M}_J - \hat{N}_J = \hat{M}_P - \hat{N}_P = \hat{M}_S - \hat{N}_S = \hat{M}_B - \hat{N}_B$$

はすべて  $\hat{A}$  の正則分離である。

ここで  $\hat{A}_{kk} (k=1, \dots, n)$  の非対角要素のうち少なくとも一つが0でないとすると  $\hat{N}_J, \hat{N}_P, \hat{N}_S, \hat{N}_B$  の定義

$$\hat{N}_J \triangleq \hat{E}' + \hat{F}', \quad \hat{N}_P \triangleq \hat{D}' - \hat{D} + \hat{F},$$

$$\hat{N}_S \triangleq \hat{F}', \quad \hat{N}_B \triangleq \hat{F}$$

より

$$\hat{N}_J \geq \hat{N}_P \geq \hat{N}_S \geq \hat{N}_B \geq 0,$$

$$\hat{N}_J \neq \hat{N}_P \neq \hat{N}_S \neq \hat{N}_B \neq 0 \tag{29}$$

となる(図2参照)。したがって付録の定理4より、(23), (24), (27), (28) の各反復行列のスペクトル半径  $\rho$  は

$$1 > \rho(\hat{B}_S) > \rho(\hat{C}_P) > \rho(\hat{C}_S) > \rho(\hat{C}_B) > 0 \tag{30}$$

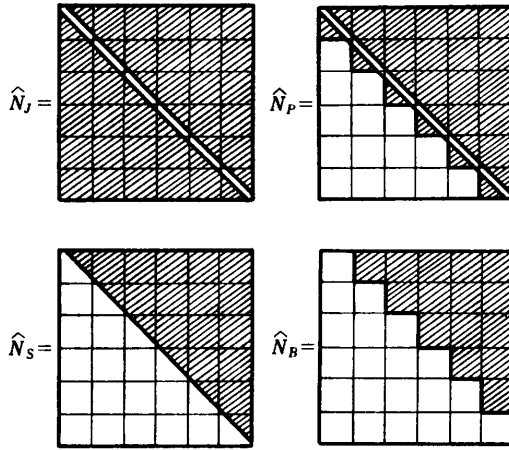
となる。

一方  $\hat{A}_{kk} (k=1, \dots, n)$  の非対角要素がすべて0の場合、図2からもわかるように、 $\hat{D} = \hat{D}', \hat{E} = \hat{E}', \hat{F} = \hat{F}'$  となり

$$\hat{N}_J \geq \hat{N}_P = \hat{N}_S = \hat{N}_B \geq 0, \quad \hat{N}_J \neq \hat{N}_P \neq 0,$$

$$\hat{M}_P = \hat{M}_S = \hat{M}_B \tag{31}$$

となる。したがって  $P$  によって置換された並列ガウ



斜線部分は、 $\hat{A}$ の対応する要素から成り、それ以外の空白部分はすべて0要素である。

図2 行列  $\hat{N}_J, \hat{N}_P, \hat{N}_S, \hat{N}_B$  の構造

Fig. 2 Illustrative structures of matrices  $\hat{N}_J, \hat{N}_P, \hat{N}_S, \hat{N}_B$ . Shadowed portions consist of corresponding elements in  $\hat{A}$ , and the remaining portions are equal to zero.

ス=ザイデル行列  $\hat{C}_P$  は点ガウス=ザイデル行列  $\hat{C}_S$ , ブロックガウス=ザイデル行列  $\hat{C}_B$  と一致し、そのスペクトル半径  $\rho$  は

$$1 > \rho(\hat{B}_S) > \rho(\hat{C}_P) = \rho(\hat{C}_S) = \rho(\hat{C}_B) > 0 \quad (32)$$

となる。したがって次の定理を得る。

【定理1】  $A$  を式(2)のように分割された既約スティルチェス行列とする。このとき式(13), (11), (27), (28)で定義される点ヤコビ行列  $B_S$ , 並列ガウス=ザイデル行列  $C_P$ , 点ガウス=ザイデル行列  $\hat{C}_S$ , ブロックガウス=ザイデル行列  $\hat{C}_B$  それぞれのスペクトル半径  $\rho$  は次の関係を満たす。

$$1 > \rho(B_S) > \rho(C_P) \geq \rho(\hat{C}_S) \geq \rho(\hat{C}_B) > 0. \quad (33)$$

ただし等号は  $A_{ij}(i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  の対角要素がすべて0のとき成り立つ。

【証明】 式(13), (11)で定義される  $B_S, C_P$  は式(23), (24)の  $\hat{B}_S, \hat{C}_P$  と置換行列  $P$  によって次のように関係づけられる。

$$\hat{B}_S = P B_S P^T, \quad \hat{C}_P = P C_P P^T.$$

このような置換に対して行列の固有値は不変であり、したがってスペクトル半径  $\rho$  も不変である。すなわち

$$\rho(\hat{B}_S) = \rho(B_S), \quad \rho(\hat{C}_P) = \rho(C_P). \quad (34)$$

行列  $A$  が既約スティルチェス行列のとき置換行列  $P$  によって変換された行列  $\hat{A} = P A P^T$  もまた既約スティルチェス行列である。また  $A_{ij}(i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  の対角要素  $a_{iik}(k=1, \dots, n)$  は  $\hat{A}_{iik}(k=1, \dots, n)$  の

非対角要素  $a_{iij}(i \neq j)$  に対応している。したがって  $A_{ij}(i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  の対角要素のうち少なくとも一つが0でないならば  $\hat{A}$  の対角ブロック  $\hat{A}_{kk}(k=1, \dots, n)$  の少なくとも一つは対角行列でない。このとき式(23), (24), (27), (28)の  $\hat{N}_J, \hat{N}_P, \hat{N}_S, \hat{N}_B$  は式(29)を満たし、付録の定理3, 4より式(30)が成り立つ。

一方  $A_{ij}(i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  の対角要素がすべて0のとき、 $\hat{A}_{kk}(k=1, \dots, n)$  は対角行列となり、 $\hat{D} = \hat{D}', \hat{E} = \hat{E}', \hat{F} = \hat{F}'$  となる。したがって式(31), (32)が成り立つ。

式(30), (32), (34)より式(33)を得る (証明終)。

定理1より次のことが結論できる。

○並列ガウス=ザイデル法は点ヤコビ法よりも漸近的な収束速度が大きい。

○漸近的な収束速度が並列ガウス=ザイデル法と同じかあるいはそれよりも大きいような点ガウス=ザイデル法、ブロックガウス=ザイデル法が常に存在する。

○係数行列  $A$  の分割された非対角ブロック  $A_{ij}(i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  の対角要素がすべて0のときの並列ガウス=ザイデル法はある点ガウス=ザイデル法、ブロックガウス=ザイデル法と等価である。

### 3.3 並列SOR法の収束定理

式(16)で定義される置換行列  $P$  によって並列SOR法の式(8)は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(m+1)} &= \mathbf{x}^{(m)} + \omega \hat{D}'^{-1} (\mathbf{b} - \hat{D} \mathbf{x}^{(m)}) \\ &\quad + \hat{E} \mathbf{x}^{(m+1)} + \hat{F} \mathbf{x}^{(m)}. \end{aligned} \quad (35)$$

これに応じて並列SOR行列(10)は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\omega, P} &\triangleq P L_{\omega, P} P^T \\ &= (\hat{D}' - \omega \hat{E})^{-1} (\hat{D}' - \omega \hat{D} + \omega \hat{F}). \end{aligned} \quad (36)$$

ここで次の定理を得る。

【定理2】  $A$  を式(2)のように分割されたエルミート行列とし、その対角要素はすべて正とする。また  $D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}$  は  $A_{ij} = D_{ij} - E_{ij} - F_{ij}$  を満たす対角行列, 狭義下三角行列, 狭義上三角行列とする。このとき  $A_{ij}(i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  の対角要素がすべて0ならば、式(6)で定義される並列SOR法が任意の初期値  $\mathbf{x}^{(0)}$  に対して収束するための必要十分条件は  $A$  が正定値でかつ  $0 < \omega < 2$  となることである。

【証明】  $A$  を式(2)のように分割されたエルミート行列とする。このとき置換行列  $P$  によって変換された行列  $\hat{A} = P A P^T$  もまたエルミート行列である。  $A_{ij}(i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  の対角要素がすべて0とすると  $D_{ij} = 0(i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  となる。したがって  $D,$

$D'$  の定義(7)より  $D=D'$  となり対角行列となる。さらに  $A$  の対角要素  $a_{i,i,k}(i=1, \dots, N, k=1, \dots, n)$  が正のとき  $\hat{D}=PDP^T$  はエルミート正定値となる。 $D=D'$  より  $\hat{D}=\hat{D}'$  となるから式(36)は次のように変形される。

$$\hat{L}_{\omega,p}=(\hat{D}-\omega\hat{E})^{-1}\{(1-\omega)\hat{D}+\omega\hat{F}\}$$

$$=(I-\omega\hat{L})^{-1}\{(1-\omega)I+\omega\hat{U}\}.$$

ただし  $\hat{L}=\hat{D}^{-1}\hat{E}$ ,  $\hat{U}=\hat{D}^{-1}\hat{F}$  である。 $\hat{E}$ ,  $\hat{F}$  はそれぞれ狭義ブロック下三角行列, 狭義ブロック上三角行列であり  $\hat{D}$  が対角行列であるから,  $\hat{L}$ ,  $\hat{U}$  はそれぞれ狭義下三角行列, 狭義上三角行列となる。したがってオストロウスキーの定理(付, 定理1)より  $\rho(\hat{L}_{\omega,p}) < 1$  となるための必要十分条件は  $\hat{A}=\hat{D}-\hat{E}-\hat{F}$  が正定値でかつ  $0 < \omega < 2$  となることである。これはまた  $A$  が正定値でかつ  $0 < \omega < 2$  となることと等価である(証明終)。

4. 数値実験

前章の定理2は係数行列の非対角ブロックの対角要素がすべて0となる場合にのみ並列SOR法の収束を保証する。この章では前章の二つの定理に現れるこの

零要素の仮定について, それを満たされる場合と満たされない場合の収束性を数値実験により比較検討する。

例題は Laplace 方程式  $\nabla^2 u(x, y) = 0$  ( $0 \leq x, y \leq 1$ ) を境界条件  $\partial u / \partial x|_{x=0} = \partial u / \partial x|_{x=1} = \partial u / \partial y|_{y=0} = \partial u / \partial y|_{y=1} = 0$ ,  $u(x, 0) = 1$  のもとで解く問題を用いる。この方程式の解は  $u(x, y) = 1$  である。5点差分近似により領域を  $32 \times 32$  のメッシュに分割し, 各格子点を  $P_{ij}(i, j = 1, \dots, 32)$  で表す。 $P_{ij}(i = 1, \dots, 32, j = 2, \dots, 32)$  について, 992元連立一次方程式を解くものとする。

格子点と方程式の解ベクトル要素との対応付けを次のように4通り選び, それぞれについて並列SOR法(3)により方程式を解く(図3参照)。

[CASE 1] 格子点  $P_{k,i+1}(k=1, \dots, 32, i=1, \dots, 31)$  の解を  $x_{ik}$  とする。

[CASE 2] 格子点  $P_{i,k+1}(i=1, \dots, 32, k=1, \dots, 31)$  の解を  $x_{ik}$  とする。

[CASE 3] 格子点  $P_{k,i+1}(k=1, \dots, 32, i=2, 4, \dots, 30)$ ,  $P_{k+1,i+1}(k=1, \dots, 32, i=1, \dots, 31)$  の解を  $x_{ik}$  とする。 $k+1$  は32のモジュールをとり,  $1 \leq k+1 \leq 32$  とする。

[CASE 4] 格子点  $P_{i,i+k}(i=1, \dots, 32, k=1, \dots, 31)$  の解を  $x_{ik}$  とする。 $i+k$  は31のモジュールをとり,  $2 \leq i+k \leq 32$  とする。

CASE 1, 2 は係数行列  $A$  の対角ブロックに隣接する非対角ブロック  $A_{i,i-1}$ ,  $A_{i,i+1}$  の対角要素がすべて非零であり, 零要素の仮定を満たさない例である。一方, CASE 3, 4 は  $A_{ij}(i \neq j)$  の対角要素がすべて0であり, 零要素の仮定を満たしている。

以上の4通りの場合について, 各点の解の初期値を0とし, 各解の2乗平均誤差が0.01以下になるまでの反復回数を求めたのが表1である。計算は北大大型計算機センタ M-200H を用いて行った。2乗平均誤差が  $16^{60}$  を越えた場合は発散したものとみなし, 計算を打ち切った。

各CASEの  $\omega = 1.0$  における収束は定理1により保証されている。CASE 2, 3の各  $\omega (< 2.0)$  における収束は定理2により保証されている。数値実験でもこれらの場合にはいずれも収束してい

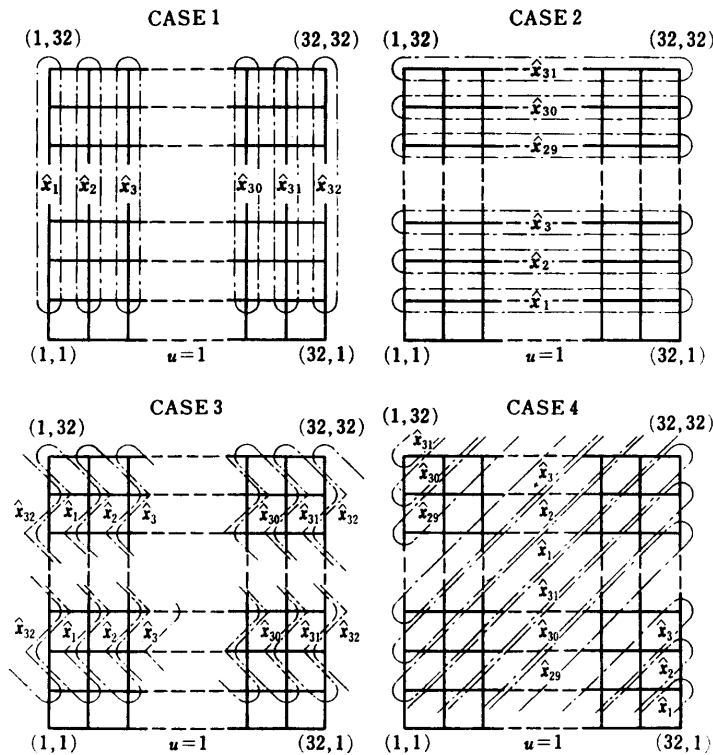


図3 格子点と方程式の解ベクトル要素との対応付け  
Fig. 3 Correspondence between mesh-points and elements of the vector  $x$ .

表 1 数値実験の結果  
Table 1 Computational work, expressed in number of iterations.

ω	CASE No.			
	CASE 1	CASE 2	CASE 3	CASE 4
1.0	5494	5484	3737	3728
1.1	4835	4824	3078	3068
1.2	4286	4275	2528	2518
1.3	3821	3810	2063	2053
1.4	—	3411	1664	1655
1.5	—	3066	1319	1309
1.6	—	2764	1016	1006
1.7	—	2497	749	739
1.8	—	2260	511	501
1.9	—	2048	296	286
2.0	—	1857	91	82

る。また表1から、いずれの場合も $\omega$ が1より大きくなるに従って収束までの反復回数が減少する傾向にあり、より速く収束することがわかる。ただし、CASE 1では $\omega$ が1.4以上になると発散する。CASE 2では発散こそしないが、CASE 3, 4と比較すると反復回数がかかなり多く、収束がきわめて遅い。

ここで、 $m$  回反復後の  $P_{ij}$  の近似解を  $p_{ij}^{(m)}$  と表わすと、CASE 2 では、 $p_{ij}^{(m+1)}$  は

$$p_{ij}^{(m+1)} = (1-\omega)p_{ij}^{(m)} + \frac{\omega}{4}(p_{i-1,j}^{(m+1)} + p_{i,j+1}^{(m)} + p_{i+1,j}^{(m)} + p_{i,j-1}^{(m)})$$

と表される。また、CASE 4 では、 $p_{ij}^{(m+1)}$  は

$$p_{ij}^{(m+1)} = (1-\omega)p_{ij}^{(m)} + \frac{\omega}{4}(p_{i-1,j}^{(m+1)} + p_{i,j+1}^{(m+1)} + p_{i+1,j}^{(m)} + p_{i,j-1}^{(m)})$$

と表される(図3参照)。すなわち、 $p_{ij}^{(m+1)}$  を求めるために CASE 2 では格子点  $P_{i-1,j}$  についてのみ同じステップ  $m+1$  の値を用いるが、CASE 4 では  $P_{i-1,j}$ ,  $P_{i,j+1}$  の2点について同じステップの値を用いる。したがって、CASE 2 が CASE 4 より収束が遅いという数値実験の結果は容易に理解される。CASE 1, CASE 3 についても同じように考えることができる。

筆者らはこの他にも2, 3の例題について同様の数値実験を行っているが、零要素の仮定を満たさない場合には発散するか、あるいは収束がきわめて遅く、表1と同じような結果が得られている。

前章の二つの定理と以上の実験結果およびその考察から、並列SOR法を用いる場合、実用的には常にこの零要素の仮定を満たすように考慮する必要があるといえる。

## 5. 考 察

零要素の仮定について、それがどのようなときに、あるいはどのようにすれば満たされるかを具体的に並列演算の見地から考察する。

$N$  台のプロセッサに  $x_i (i=1, \dots, N)$  の計算を1対1に割り当てる。各プロセッサはそれぞれに割り当てられた  $x_i$  の要素  $x_{ik} (k=1, \dots, n)$  について並列SOR法(3)の計算を他と同期をとりながら順次行うものとする。このとき行列  $A$  の非対角ブロック  $A_{ij} (i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  の対角要素は、各プロセッサで同時に計算される要素  $x_{1k}, \dots, x_{Nk}$  間の「相互干渉」項に相当する。差分法や有限要素法では解ベクトルの各要素はメッシュ分割されたモデルの各格子点(有限要素法の場合正確には節点)に対応していて、二つの格子点が直接つながっているときに限り係数行列  $A$  の対応する要素が非零となる。したがって、偏微分方程式を差分法や有限要素法によって解く場合、互いに隣接関係にある格子点の解が並列処理システム上で同時に計算されることのないよう各格子点を順序付けしプロセッサに割り当てることができれば、零要素の仮定は満たされる。

以下では、この仮定が1章で述べたアレイ方式の並列処理システムにおいてどのように満たされるかを、2次元アレイシステムによる差分法、1次元アレイシステムによる有限要素法を例にとり具体的に示す。

### 5.1 2次元アレイシステムによる差分法

各要素プロセッサ  $EP_{ij} (i=1, \dots, N_1, j=1, \dots, N_2)$  がそれぞれ隣接する4台のプロセッサ  $EP_{i-1,j}$ ,  $EP_{i+1,j}$ ,  $EP_{i,j-1}$ ,  $EP_{i,j+1}$  と直接的にデータ転送を行うことができる2次元アレイシステム<sup>1), 2), 5)</sup>を用いて、2次元メッシュ  $n_1 \times n_2 (n_1=l_1N_1, n_2=l_2N_2, l_1, l_2 \geq 2)$  上で差分方程式を解くことを考える。このとき、零要素の仮定を次のようにして満たすことができる。

領域を  $l_1 \times l_2$  のメッシュから成るブロック  $B_{ij} (i=1, \dots, N_1, j=1, \dots, N_2)$  に分割し、 $B_{ij}$  内の格子点の計算を  $EP_{ij}$  に割り当てる。各  $B_{ij}$  内の節点を  $P_{ij}(m_1, m_2)$ ,  $(m_1=1, \dots, l_1, m_2=1, \dots, l_2)$  で表すと、任意の順序付け  $f: k \leftarrow (m_1, m_2)$ ,  $(k=1, \dots, l, l=l_1 \times l_2)$  により各  $B_{ij}$  内の節点を順序付けし、 $P_{ij}^{(k)}$   $(k=1, \dots, l)$  で表す。各  $EP_{ij}$  は  $P_{ij}^{(1)}, \dots, P_{ij}^{(l)}$  について並列SOR法(3)の計算を他と同期をとりながら順次行う。このとき、各  $EP_{ij}$  で同時に計算される格子点  $P_{ij}^{(k)}$ ,

$(i=1, \dots, N_1, j=1, \dots, N_2)$  はどれも隣接関係にないので、収束は定理2によって保証される。なお、順序付け $f$ を適当に選ぶと、この方法は差分方程式の並列処理でしばしば用いられるチェスボード法<sup>2),5)</sup>となる。

3次元の場の問題や3次元プロセッサアレイ<sup>3)</sup>の場合でもほぼ同様にして上記仮定を満たすことができる。

### 5.2 1次元アレイシステムによる有限要素法<sup>6)</sup>

各要素プロセッサ  $EP_i (i=1, \dots, N)$  がそれぞれ隣接する2台のプロセッサ  $EP_{i-1}, EP_{i+1}$  と直接的にデータ転送を行うことができる1次元アレイシステム<sup>1),4)</sup>を用いて、有限要素法を行うことを考える。有限要素法の場合には離散化のしかたが差分法のように一様でないが、節点番号の付け直しによって係数行列  $A$  を帯状にすることができ<sup>7)</sup>、次のようにして零要素の仮定を満足させることができる。

行列  $A$  を帯幅  $n$  の帯状行列とする。このとき、行列  $A$  を式(2)のように  $n \times n$  の小行列  $A_{ij} (i, j=1, \dots, N)$  に分割すると、各  $A_{ij}$  の対角要素、狭義下三角要素、狭義上三角要素から成る行列  $D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}$  は次式を満たす。

$$\begin{aligned} D_{ij} &= 0, (i, j=1, \dots, N, i \neq j), \\ E_{ij} &= 0, (i, j=1, \dots, N, i \neq j-1, j), \\ F_{ij} &= 0, (i, j=1, \dots, N, i \neq j, j+1). \end{aligned}$$

したがって、 $A_{ij}$  に対応して  $\mathbf{x}$  を  $\mathbf{x}_i (i=1, \dots, N)$  に分割し、各  $\mathbf{x}_i$  を  $EP_i$  に割り当てて計算を行うことによって上記仮定を満たすことができる。

$A$  を帯状化し小行列に分けることは有限要素モデルをプロセッサのアレイに対応するように帯状ブロックの列に分割することを意味している。同じように考えると、穴のあいた場の問題等は1次元アレイシステムの両端のプロセッサ  $EP_1, EP_N$  が直接的にデータ転送を行うことができるリング状のアレイシステム<sup>1),4)</sup>を用いて解けることがわかる。プロセッサのリングにモデルのリングを対応させればよい。このとき係数行列  $A$  は帯状部分以外に  $E_{N1}, F_{1N}$  が非零となる。非対角ブロックの対角要素  $D_{ij} (i, j=1, \dots, N, i \neq j)$  が0であることには変わらないので、収束は定理2によって保証される。

2次元アレイシステムによる有限要素法の場合についても基本的な並列化の方針は変わらない。ただ、1次元アレイシステムの場合のように割当ての問題を単純に行列の帯状化の問題に帰差させることができない

ので、その点についてなお検討が必要である。

## 6. むすび

並列SOR法はシステムの利用効率の点でアレイ方式の並列処理システムを用いた連立一次方程式解法に適した方法である。

本論文では3章で、係数行列がスティルチェス行列になる場合に話を限って、並列SOR法の収束性に関する二つの定理を導いた。定理1は過緩和係数が1のときの並列SOR法と他の反復解法との漸近的な収束速度の大小を明らかにしている。定理2は係数行列のある特定要素が0となるときに並列SOR法が収束するための必要十分条件を与えている。

4章の数値実験では、これらの二つの定理に現れる零要素の仮定が満たされない場合には並列SOR法は収束が遅く、また必ずしも収束しないことを示し、この仮定の実用上の重要性を示した。

5章では、上記仮定がアレイ方式の並列処理システムによる偏微分方程式解法においてどのように満たされるかを2次元アレイシステムによる差分法、1次元アレイシステムによる有限要素法について具体的に示した。この仮定は並列処理システムによる偏微分方程式解法において具体的な意味をもっており、上記以外の場合でも、それを満たすことはむずかしいことではない。

なお、本論文では係数行列  $A$  の対角小行列  $A_{ii} (i=1, \dots, N)$  はすべて  $n \times n$  行列としたが、ここで得られた結果はこれらがたんに正方行列の場合に容易に拡張できる。

## 参 考 文 献

- 1) Barnes, G.H.: The ILLIAC IV Computer, *IEEE Trans. Comp.*, Vol. C-17, No. 8, pp. 746-757 (1968).
- 2) Frailong, J.M.: Resolution of General Partial Differential Equations on a Fixed Size SIMD/MIMD Large Cellular Processor, in Dekker, L. (ed.): *Simulation of Systems*, Preprints of IMACS Congress. pp. 199-204 (1979).
- 3) Cyre, W.R.: WISPAC: a Parallel Array Computer for Large-scale System Simulation, *SIMULATION*, Vol. 29, No. 5, pp. 165-172 (1977).
- 4) Makino, K.: A Multi-purpose Digital Simulator (HOSS) Using a Hierarchical Distributed Multiprocessor Technology, in Dekker, L.(ed.): *Simulation of Systems*, Preprints of IMACS



Congress, pp. 171-177 (1979).

- 5) 星野 力: 偏微分方程式解析のためのマイクロプロセッサ複合体, 情報処理, Vol. 20, No. 11, pp. 974-982 (1979).
- 6) 土肥, 小山: 有限要素法の並列処理手法, 電子通信学会論文誌, Vol. J65-D, No. 4, pp. 464-470 (1982).
- 7) Gibbs, N.E.: An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 13, No. 2, pp. 236-250 (1976).
- 8) バーガ, R.S.: 計算機による大型行列の反復解法, pp. 25-87, サイエンス社, 東京 (1979).

#### 付 録

[定理1] (オストロウスキーの定理)  $A = D - E - E^*$  を  $n \times n$  エルミート行列, ただし  $D$  はエルミート正定値,  $L = D^{-1}E$ ,  $U = D^{-1}E^*$  はそれぞれ狭義下三角行列, 狭義上三角行列とする. このとき,

$$L_\omega = (I - \omega L)^{-1} \{ (1 - \omega)I + \omega U \}$$

とすると,  $\rho(L_\omega) < 1$  であるための必要十分条件は  $A$  が正定値でかつ  $0 < \omega < 2$  となることである.

[定理2]  $A$  がスティルチェス行列ならば,  $A$  は  $M$  行列でもある. さらに,  $A^{-1} > 0$  の必要十分条件は  $A$  が既約となることである.

[定理3]  $A = [a_{ij}]$  を  $n \times n$  の  $M$  行列とする.  $M$  を  $A$  のある非対角要素を 0 として得られる任意の  $n \times n$  行列とすれば,  $A = M - N$  は  $A$  の一つの正則分離であり,  $\rho(M^{-1}N) < 1$  である.

[定理4]  $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$  を二つの正則分離とし,  $A^{-1} > 0$  とする. このとき,  $N_2 \geq N_1 \geq 0$  (ただし  $N_2 \neq N_1 \neq 0$ ) ならば,

$$1 > \rho(M_2^{-1}N_2) > \rho(M_1^{-1}N_1) > 0$$

である.

各定理の証明は文献 8) に詳しく述べられている.

(昭和 56 年 7 月 27 日受付)

(昭和 57 年 1 月 20 日採録)