ショートノート

状態変化回数を1回に限定したセルラオートマトンと有限オートマトンとの等能力性†

梅尾博司††

有限オートマトンにより受理される言語クラスは，正規表現によるもの，決定性 kn (k は自然定数) 時間限定 Turing 機械によるもの，1マーカオートマトンによるものなど，これまでにいくつかの違った概念による特徴づけが知られている．本論文では，状態変化回数を1回に限定した決定性ならびに非決定性セルラオートマトンにより受理される各言語クラスが，上記言語クラスと一致することを示し，正規言語の新しい別の特徴づけを与える．

1. はじめに

セルラオートマトン (CA) の言語受理能力は線形有界オートマトンと等価であることが知られている[4]. R. Vollmar は文献[1]において，CA の状態変化回数に制限を設け，1個のセルあたりたかだか k (k は自然定数) 回の状態変化回数を許した CA(CA(k)) により受理される言語クラスとチョムスキー・ハイアラーキーとの関係を論じた．

本稿では，CA(k) のうち最も単純な CA(1) に着目し，CA(1) と有限オートマトン (FSA) との等能力性を示す．決定性 CA(1) による FSA の模倣は，文献[1]においても言及されており，容易に示すことができる．本論文では，逆方向の模倣が可能であることを示し，それらの等能力性を示す．さらに CA(1) に非決定性の動作を許しても，その能力は真に増大することなく FSA と等価であることを明らかにする．

2. 諸定義

2.1 セルラオートマトン (CA)

CA とは，有限オートマトンを直線上に有限個並べたもので，各オートマトン (セルと呼ぶ) は非負整数と1対1に対応する．i に対応する有限オートマトンをセル i と呼び C_i で示す (図1参照)．

以下では n 個 (両端の C_0 および C_{n+1} は個数には数えない) のセルより構成される決定性 (非決定性) CA, A の動作について説明する．

$A=(Q, \delta, \#, Q_A)$,

Q: セルの有限状態集合,

δ: 局所遷移関数と呼び，$Q^3 \rightarrow Q$ (非決定性の場合 $Q^3 \rightarrow 2^Q$) なる写像,

$\#$: 境界状態 ($\# \in Q$),

Q_A: 受理状態集合 ($Q_A \subseteq Q$).

C_0 および C_{n+1} を除き，他のすべてのセルはまったく同一の構造をもつ．時刻 $t(\geqq 0)$ における $C_i(0 \leqq i \leqq n+1)$ の状態を s_i^t で表す．すべての $C_i(1 \leqq i \leqq n)$ は，単価時刻ごとに同期して状態を変える．決定性 CA の場合，時刻 $t+1$ における $C_i(1 \leqq i \leqq n)$ の状態は，時刻 $t(\geqq 0)$ における C_{i-1}, C_i, C_{i+1} の3状態の組合せとして次式 δ により一意的に決定される．すなわち，

$$s_i^{t+1}=\delta(s_{i-1}^t, s_i^t, s_{i+1}^t).$$

非決定性 CA の場合，C_i は $\{\delta(s_{i-1}^t, s_i^t, s_{i+1}^t)\}$ から状態を一つ選択し，その状態を s_i^{t+1} とする．C_0 および c_{n+1} は境界セルと呼ばれ，任意の $t(\geqq 0)$ に対して，$s_0^t=s_{n+1}^t=\#$ である．

長さ n の入力 $a_1a_2\cdots a_n$ は，$s_i^0=a_i(\in Q)(1 \leqq i \leqq n)$ として CA に与えられる．C_1 を受理セルとする．CA は，初期計算状況 $\#a_1a_2\cdots a_n\#$ から状態遷移を繰り返し，$s_1^t \in Q_A$ を満足する非負整数 $t(\geqq 0)$ が存在するときに限り，入力 $a_1a_2\cdots a_n$ を受理する．

$\delta(s_{i-1}^t, s_i^t, s_{i+1}^t) \neq s_i^t$ のとき，C_i の状態変化は真であるという．任意の i に対し，C_i の真の状態変化回数をたかだか k (k は自然定数) 回に限定した CAの集合を CA(k) で表す．また CA の決定性，非決定性の区別を，D, N で表す．DCA(k), NCA(k) により受理される言語クラスをそれぞれ $\mathcal{L}$[DCA(k)],

† Computational Equivalence between Single-State-Change Cellular Automata and Finite State Automata by HIROSHI UMEO (Department of Applied Electronics, Faculty of Engineering, Osaka Electro-Communication University).

†† 大阪電気通信大学工学部応用電子工学科

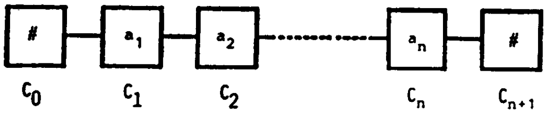

図 1　セルラオートマトン
Fig. 1 Cellular automaton.

$\mathcal{L}$[NCA(k)] で表す．CA および CA(k) に関する詳細な定義は，文献[1),4)] を参照されたい．

2.2 Turing 機械

Turing 機械 (TM)M は，入力 ($\#a_1a_2\cdots a_n\#$ で示す) を含んだ1本のテープ，有限制御部，ならびにテープのます目上の記号を自由に読み，書き換えができる1個のヘッドからなる (図2参照)．

入力が与えられているテープ上のます目を左端から $t_0, t_1, \cdots, t_n, t_{n+1}$ とする．M は初期状態でヘッドを t_1 に置いた状態から動作を開始する．入力の受理の可否を，ヘッドが再び t_1 にきて M が停止したときの状態により定義する．

TM の時間計算量 $T(n)$ を，長さ n の入力上における M の動作数* として定義する．本稿では決定性 TM のみを考察の対象とする．TM に関する詳細な定義は，文献[2),3)] を参照されたい．

決定性 kn (k は自然定数) 時間限定 Turing 機械により受理される言語クラス ($\mathcal{L}$[DTM(kn)]) で示す) に関して，次の結果が F.C. Hennie により得られている[3)]．

[補題] [Hennie]

$\mathcal{L}$[DTM(kn)]$=\mathcal{L}$[FSA]

ただし，k は任意の自然数定数，$\mathcal{L}$[FSA] は有限オートマトンにより受理される言語クラスを意味する．

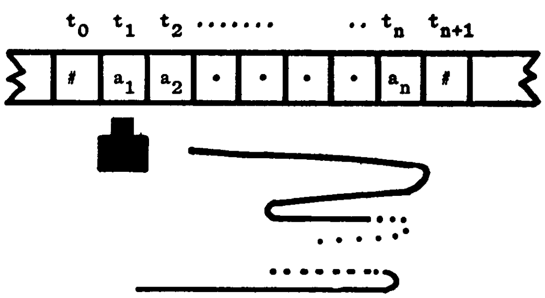

図 2　Turing 機械
Fig. 2 Illustration of one-tape Turing machine.

* M の動作は，$Q\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{R, L, H\}$ なる関数で記述される．ここに，Q は制御部の有限状態集合，Γ はテープ記号集合，$\{R, L, H\}$ はヘッドの移動方向の集合を意味する．上記関数の1回の適用を M の1ステップと呼ぶ．

3. 本　論

[定理 1] $\mathcal{L}$[**DCA(1)**]$=\mathcal{L}$[**FSA**]

(証明) DCA(1) による FSA の模倣は容易であり，文献[1)] においても言及されている．本証明では，逆方向の模倣が可能であることを示し，それらの等能力性を得る．

以下では，任意の DCA(1), A に対し，A と同じ言語を受理する決定性 $4n$ 時間限定 TM, M が存在することを示し，補題より本定理を得る．$0\leqq i\leqq n+1$ に対し，M の各ます目 t_i は A の C_i に対応する．M はテープ上に A の計算状況を生成する．M は制御部に三つのレジスタ R_1, R_2, R_3 をもち，**図3**に示す動作をする．まず，M は左端から右方向に進みながら，

$$\delta(s^0_{i-1}, s^0_i, s^0_{i+1})\neq s^0_i \qquad (1)$$

を満足するセル $C_i(1\leqq i\leqq n)$ を捜す (図3，行番号(2)〜(9))．(1)式を満足する C_i が存在しないとき，Mは左端に引き返し，t_1 上の記号により入力を受理するか拒否するかを決定し，停止する (行番号(6)の停止に対応)．t_1 から t_{n+1} へ至るのに n ステップ，次に t_0 に引き返すのに $n+1$ ステップ，最後に t_1 に戻るのに1ステップ，合計 $2n+2$ ステップを要する．

(1)式を満足する C_i が存在するとき，$j=i-1$ とおき，$j=i-1, i-2, \cdots, 2, 1$ に対し，順次 $s^1_j=\delta(s^0_{j-1}, s^0_j, s^0_{j+1})$ 計算し，テープ上の対応するます目

```
(1)  begin
(2)    R1:="#"; R2:="a1"; 右に1駒移動;
(3)    R3:="ヘッド下のます目の記号";
(4)    while δ(R1, R2, R3)=R2 do
(5)      begin
(6)        if ヘッド下のます目の記号が # である then t1 に戻り
           停止;
(7)        右に1駒移動; R1←R2; R2←R3;
(8)        R3:="ヘッド下のます目の記号";
(9)      end;
(10)   左に1駒移動;
(11)   write "δ(R1, R2, R3)"; R3:=δ(R1, R2, R3);
(12)   while R1≠"#" do
(13)     begin
(14)       左に1駒移動; R2:="ヘッド下の記号";
(15)       左に1駒移動; R1:="ヘッド下の記号";
(16)       右に1駒移動; write "δ(R1, R2, R3)";
(17)       R3:=δ(R1, R2, R3);
(18)     end;
(19)   停止;
(20) end.
```

図 3　定理1の証明中，DCA(1), A を模倣する TM, M の動作
Fig. 3 Moves of the TM, M which simulates a DCA(1), A in the proof of Theorem 1.

に記入する．各 s_j^1 の計算に3ステップを要する（行番号(14),(15),(16)に対応）．計算終了後，t_1 上の記号により入力の受理，拒否を決定し停止する．行番号(19)で停止するとき，最悪の場合 $4n$ ステップを要する．

以上の動作をする M は，A と同じ言語を受理する．▮

［定理 2］ $\mathcal{L}$[**NCA(1)**]$=\mathcal{L}$[**FSA**]

（証明） 任意の NCA(1), $A=(Q,\delta,\#,Q_A)$ に対し，Aと同じ言語を受理する決定性 $4n$ 時間限定 TM, M の存在を示す．M の入力テープは2トラックからなるものとする．第1トラック上には入力記号が記入され，第2トラック上の各ます目には，Q の部分集合で，以下に示す方法により決定される有限個の状態が記入される．第2トラック上の各ます目に記入される有限状態集合を左端から $P_1, P_2, \cdots, P_n(P_i\subseteq Q)$ とする．

M はまず右端に行き（n ステップを要す），次の規則に従って順次 $P_n, P_{n-1}, \cdots, P_2, P_1$ を計算し，記入する．

$$P_n=\{\delta(s_{n-1}^0, s_n^0, \#)\},$$

$$P_{n-1}=\{\delta(s_{n-2}^0, s_{n-1}^0, s_n^0)\}\cup(\{\delta(s_{n-2}^0, s_{n-1}^0, x)\},\ \forall x\in P_n)$$

$$\vdots$$

$$P_i=\{\delta(s_{i-1}^0, s_i^0, s_{i+1}^0)\}\cup(\{\delta(s_{i-1}^0, s_i^0, x)\},\ \forall x\in P_{i+1})$$

$$\vdots$$

各 P_i の計算は，定理1の証明における s_j^1 の計算の場合と同様になされる．ヘッドを左に2駒進め，右に1駒戻す動作を繰り返すことにより，各 P_i を3ステップで計算する．$4n$ ステップ後に P_1 の計算を終了する．$P_1\cap Q_A\neq\phi$ のときに限り，M は入力を受理する．以上の動作をする M は A と同じ言語を受理する．▮

定理1，定理2より次の系1を得る．

［系 1］ $\mathcal{L}$[**DCA(1)**]$=\mathcal{L}$[**NCA(1)**]

DCA(2) は，たとえば $L=\{0^n1^n|n\geqq 1\}$ 等の言語を受理することが知られており[1]，定理1，2から FSA よりも真に能力が高いことがわかる．したがって次の系2を得る．

［系 2］ (1) $\mathcal{L}$[**DCA(1)**]$\subsetneq\mathcal{L}$[**DCA(2)**]

(2) $\mathcal{L}$[**NCA(1)**]$\subsetneq\mathcal{L}$[**NCA(2)**]

4. むすび

有限オートマトンにより受理される言語クラスは，正規表現によるもの，決定性 kn 時間限定 Turing 機械によるもの，1マーカオートマトンによるもの等，これまでにいくつかの違った概念による特徴づけが知られている．本論文では，状態変化回数を1回に限定した決定性および非決定性セルラオートマトンにより受理される各言語クラスが，上記言語クラスと一致することを示し，正規言語の新しい特徴づけを与えた．

参考文献

1) Vollmar, R.: On Cellular Automata with A Finite Number of State Changes, *Computing, Supplementum*, Vol. 3, pp. 181-191 (1981).
2) Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D.: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, p. 418, Addison-Wesley, Reading (Mass.) (1979).
3) Hennie, F. C.: One-Tape Off-Line Turing Machine Computations, *Inf. Control*, Vol. 8, pp. 553-578 (1965).
4) Smith, A. R.: Cellular Automata and Formal Languages, Proc. IEEE, Symposium on Switching and Automata Theory, 11th, pp. 216-224 (1970).

（昭和57年6月7日受付）
（昭和57年9月6日採録）