3Q-6

コストを考慮したアベイラビリティによるネットワーク信頼性設計

巽 久行[1)]，古屋 貴博[2)]，徳増 眞司[1)]

1) 神奈川工科大学 工学部 情報工学科

2) 宇都宮大学 情報処理センター

1．はじめに

通信ネットワーク設計の最適化に関して，ネットワークのコスト（建設，運用または修理）の上限を与えてネットワークのアベイラビリティを最大化する問題は，アベイラビリティの繰り返し計算を必要とする。本論では，この問題に対する定式化と理論的な検討を行い，最適もしくは準最適なアベイラビリティ２分計算木をもとに，シミュレーション実験を行って評価した。

2．アベイラビリティ

ネットワークNのアベイラビリティは，再帰多項式

$$P_W(N)=P(S)\cdot P_W(N\,|\,S)+(1-P(S))\cdot P_W(N-S)$$

で計算できる。式中，Nは対象とする１つのネットワーク，SはNの構成要素である１つのサブ・ネットワークとし，$P(S)$をSが稼働している確率，$P_W(N|S)$をNのうちSが稼働している場合のアベイラビリティ，$P_W(N-S)$をNのうちSが非稼働（故障）している場合のアベイラビリティとする。上式はネットワークNを排他的な２つの部分（$N|S$および$N-S$）に分けることによりアベイラビリティ$P_W(N)$を計算するもので，この手法は状態空間分解法と呼ばれている[1]。

【例１】図１に，４ノード５リンクのネットワーク$N(4,5)$を示す。通信は発信ノードn_Sから着信ノードn_Tに対して行われ，n_Aおよびn_Bは中間ノードを表す。各リンクにはリンク番号1～5が付けられている。状態空間分解法でアベイラビリティの２分計算木を生成する場合，我々が提案した文献[1]の準最適化法で生成すると，節点数19の２分計算木を求めることができ，図１のアベイラビリティ値Avは，＋系列を合計して

$$Av=p_1p_2+p_1q_2p_3p_4+p_1q_2q_3p_4p_5+q_1p_3p_4+q_1p_2p_3q_4p_5$$

となる（但し$q_i=1-p_i\ (i=1,\cdots,5)$）。（例終） □

3．ネットワークの最適設計

ネットワークコストの上限を与えて，ネットワークアベイラビリティを最大化する問題を扱う。以下，ノード数をm，リンク数をnとするネットワーク$N(m,n)$を考える。p_j（但し$0\le p_j\le 1$）を各リンクj（但し$1\le j\le n$）のアベイラビリティとすると，NのアベイラビリティAvおよびNのコストCはp_jの関数であり，それぞれ$Av(p_1,\cdots,p_n)$および$C(p_1,\cdots,p_n)$と記すことにする。

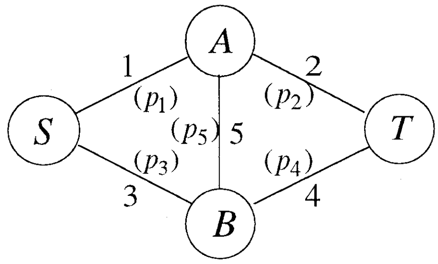

図１　４ノード・ネットワーク

いま，Cの設定上限を$\overline{C}$（$0<\overline{C}<\infty$）とすると，問題は次のように定式化される。

【問題P】Nのコストの上限$\overline{C}$を与えて，Nのアベイラビリティを最大化する問題，即ち，

$C(p_1,\cdots,p_n)\le\overline{C}$の下で，$\underset{p_1,\cdots,p_n}{\mathrm{Maximize}}\ Av(p_1,\cdots,p_n)$。

いま，Avに関して次の定理が成立する。

【定理１】(1) Avはp_jに関する双一次形式，即ち，

$$Av(p_1,\cdots,p_n)=p_j\cdot P_W(N\,|\,e_j)+(1-p_j)\cdot P_W(N-e_j)$$

で表される（ここで，p_jはあるリンクe_jのアベイラビリティとする）。

(2) $\partial Av/\partial p_j\ \left(=P_W(N\,|\,e_j)-P_W(N-e_j)\right)\ge 0$である。もし$Av(p_1',\cdots,p_n')>0$であれば，その$p_1',\cdots,p_n'$に対して，$\partial Av/\partial p_{j_0}>0$となるような$j_0$が存在する。

(3) Avは多項式に展開できる。即ち＋系列の番号をi，アベイラビリティ行列を$(a_{i,j})$とすると，

$$Av(p_1,\cdots,p_n)=\sum_i\Big(\prod_j p_j^{a_{i,j}}\Big),$$

$$\text{但し，}\ a_{i,j}=\begin{cases}1\\0\\-1\end{cases}\Leftrightarrow\ p_j^{a_{i,j}}=\begin{cases}p_j\\1\\1-p_j(=q_j)\end{cases}$$

である。（証明略） □

【仮定１】コスト$C(p_1,\cdots,p_n)$を連続かつ微分可能な関数(C^1級)と仮定して次のような一般的性質を要請する。

(1) $C(p_1,\cdots,p_n)=\sum_{j=1}^{n}C_j(p_j)$と表せる（各$C_j$も連続かつ微分可能な$C^1$級関数である）。

(2) 各C_jは非負の単調増加関数，即ち，

$$C_j(p_j)\ge 0,\ \ \partial C_j(p_j)/\partial p_j>0,\ \ C_j(1)=\infty$$

である。従って，$\forall s,t\ (s\ne t)$に対して，

$$C(p_1,\cdots,p_n)\ge 0,\ \ \partial C/\partial p_s>0,\ \ \partial^2 C/\partial p_s\partial p_t=0$$

となる。

(3) $C_j(p_j)$と$C(p_1,\cdots,p_n)$の値域は$[0,\infty)$である。

（妥当性の説明）(1)は，$C(p_1,\cdots,p_n)$は各リンクのコ

Cost Effective Reliability Design of Networks based on Availability Measure

Hisayuki Tatsumi[1)], Takahiro Furuya[2)], Shinji Tokumasu[1)]

1) Kanagawa Institute of Technology

2) Utsunomiya University

ストの総和であり，各リンクは互いに独立とみなせるので，この関係がいえる。(2)は明らかである。(3)は，リンク j について $p_j=0$，即ち，何もリンクを張らなければ $C_j(0)=0$ であるが，アベイラビリティ $p_j=1$ を実現することは技術上不可能であるので，$\lim_{p_j \to 1} C_j(p_j)=\infty$ として扱うべきである。（仮定終） □

【定理２】 $C(p_1,\cdots,p_n)$ に関する仮定１の下で，問題 P は，次に示す**問題** $\overline{\boldsymbol{P}}$ ：

$$C(p_1,\cdots,p_n)=\overline{C} \text{ の下で，} \underset{p_1,\cdots,p_n}{\text{Maximize}}\ Av(p_1,\cdots,p_n)$$

と等価である。（証明略） □

実際にリンクを張ることを考えると，任意のアベイラビリティのリンクが可能であるわけではなく，方式によって予め幾つかの選択肢が決まっているとみるのが自然である。即ち，p_j としては，

$$0=\pi_0<\pi_1<\pi_2\cdots<\pi_{\overline{k}}<1$$

となるアベイラビリティランク集合 $\{\pi_k : k=0\sim\overline{k}\}$ の要素の，いずれかのみを選択できるものとする。ここで π_0 は，リンクが無いことを意味する。この離散型アベイラビリティにより，問題 P は次のように表現される。

【問題 P'】 $p_j\in\{\pi_k\}$ （$0\le k\le\overline{k}$）のとき，

$$C(p_1,\cdots,p_n)\le\overline{C} \text{ の下で，} \underset{p_1,\cdots,p_n}{\text{Maximize}}\ Av(p_1,\cdots,p_n)\text{。}$$

上述した定理１，仮定１および定理２は，この離散型の問題 P' に対して，それぞれ定理1′，仮定1′および定理2′のように変更される。

【定理1′】 $\partial Av/\partial p_j$ を偏微分の意味に解しないで $P_W(N\,|\,e_j)-P_W(N-e_j)$ によって定義されるものとすると，定理１の内容はそのまま成立する。
（証明略） □

【仮定1′】 コスト $C(p_1,\cdots,p_n)$ は，次の性質を有する。

(1) $C(p_1,\cdots,p_n)=\sum_{j=1}^{n}C_j(p_j)$。但し，$p_j\in\{\pi_k\}$ $(0\le k\le\overline{k})$ であり，以降 $C_j(\pi_k)=C_{j,k}$ と記す。

(2) $0=C_{j,0}<C_{j,1}<\cdots<C_{j,\overline{k}}<\infty$。

（注）$C_{j,0}$ は $\pi_0=0$，即ちリンクを張らないときのコストで０とする。(2)はランクを上げるとコストが上昇するという意味である。（仮定終） □

【定理2′】 $C(p_1,\cdots,p_n)$ に関する仮定1′の下で，問題 P' は，次に示す**問題** $\overline{\boldsymbol{P'}}$ ：

$$(p_1,\cdots,p_n)\in\pi_C \text{ の下で，} \underset{p_1,\cdots,p_n}{\text{Maximize}}\ Av(p_1,\cdots,p_n),$$

ここで，
$$\pi_C=\left\{(\pi_{k_1},\cdots,\pi_{k_n})\,\middle|\,C(\pi_{k_1},\cdots,\pi_{k_n})\le\overline{C}\ \&\ \left(k_j=\overline{k}\ \text{or}\ \left(k_j<\overline{k}\ \text{and}\ C(\cdots,\pi_{k_j+1},\cdots)>\overline{C}\right)\right)\right\}$$

と，関数の最適値に関して等価である。（証明略） □

４．実験結果と検討

本節では上述した離散型の問題 P' を考察する。実験は２通りの方法で行った。１つは問題 P' を定理1′（即ち，定理１の(3)）のアベイラビリティ多項式で計算する全数操作法(総当たり)の最適解である。これは N が小さいネットワークの場合に確実な計算法である。もう１つはヒューリスティックな逐次最適化法であり，定理2′に基づくこの方法で近似解を求める。これは N が比較的大きいネットワークでも有効である。もしアベイラビリティ木およびアベイラビリティ行列が大きくて逐次最適化法が困難な場合，前処理として予めリンクを刈り取りする最短化を施して，逐次最適化法を行えばよい。

表１　逐次最適化法が近似解に至る過程
（$\overline{C}=30$，▲印はコストによる値の変動場所）

	#1	#2	#3	#4	#5	Av	C
1	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86	0.9571	5
2	0.86	▲0.88	0.86	0.86	0.86	0.9601	6
3	▲0.88	0.88	0.86	0.86	0.86	0.9631	7
4	0.88	0.88	0.86	▲0.88	0.86	0.9657	8
5	0.88	0.88	▲0.88	0.88	0.86	0.9683	9
6	▲0.90	0.88	0.88	0.88	0.86	0.9709	11
7	0.90	▲0.90	0.88	0.88	0.86	0.9735	13
8	0.90	0.90	0.88	▲0.90	0.86	0.9757	15
9	0.90	0.90	▲0.90	0.90	0.86	0.9778	17
10	▲0.92	0.90	0.90	0.90	0.86	0.9800	20
11	0.92	▲0.92	0.90	0.90	0.86	0.9822	23
12	0.92	0.92	▲0.92	0.90	0.86	0.9840	26
13	0.92	0.92	0.92	▲0.92	0.86	0.9857	29
14	0.92	0.92	0.92	0.92	▲0.88	0.9859	30

【例２】 図１のネットワーク N に対して，アベイラビリティが離散型の問題 P' を考察する。例１の結果より，アベイラビリティ行列 $(a_{i,j})$ が求められる。いま，アベイラビリティランク集合を

$$\{\pi_k\}=\{0.86\ \ 0.88\ \ 0.90\ \ 0.92\ \ 0.94\ \ 0.96\},$$

このランク集合に対するコスト集合を

$$\{C_{j,k}\}=\{\ (1)\ (2)\ (4)\ (7)\ (11)\ (16)\ \}$$

とする。コストの上限を $\overline{C}=30$ として全数走査法を行った場合，アベイラビリティ Av の最適解は 0.9861 である。表１は，同じ $\overline{C}=30$ の場合に逐次最適化法がどのように近似解に至るかの過程を示している。実験を通した結果，誤差の最大はいずれも 10^{-3} 未満であり，逐次最適化法の近似解の精度は全数走査法の最適解と比較してかなり良く，逐次最適化法はアベイラビリティに基づくネットワークのコスト最小化設計に有効な手段であると考えられる。（例終） □

５．おわりに

ネットワークアベイラビリティの最適２分計算木を利用した，アベイラビリティに基づく通信ネットワーク設計のコスト最適化問題を考察した。今後の課題として，実用的ネットワークに対するシミュレーション実験を行うことや，コスト最適化問題における計算量の評価等が挙げられる。

参考文献

[1] 巽，古屋，徳増：信頼性設計のための最適２分計算木の生成，情報処理学会第57回全国大会，3C-4, Vol. 1, pp. 117-118 (1998).

[2] 巽，古屋，徳増：ネットワーク信頼度設計における最適／準最適２分計算木の計算複雑度，情報処理学会第59回全国大会，3G-6, Vol. 1, pp. 203-204 (1999).