1M－03

総頂点間経路長を最小にする完全K分木の根との追加的隣接化

澤田　清　　　宇野　斉

流通科学大学 情報学部

1．はじめに

企業などの組織の階層構造（ピラミッド組織）は，構成主体（個人や部，課など）を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に対して追加的な隣接化を行う（辺を追加する）ことは，上下の主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する [1].

筆者らは，すでに，高さ H の完全2分木の，同じ深さの2頂点間および同じ深さの全頂点間に追加的隣接化を行った場合に，全頂点間の最短経路の長さの総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）を最小にする隣接深さを求めた [2]. 本研究では，より一般化した完全 K 分木に対して，根と根以外の頂点との間に追加的隣接化を行った場合に，総頂点間経路長を最小にする頂点深さを求めることを考える．これは，完全 K 分木型の構造を持つ組織内の最上位層の主体（社長など）と最上位層以外の主体との間で追加的な関係形成を行う場合に，どの層の主体と関係を結べば組織全体の情報伝達が最も効果的になるかという問題に対応している．

2．総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは，前述したように，高さ $H(H=2,3,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ の，深さ $N(N=2,3,\cdots,H)$ の1つの頂点と根とを隣接化する．ただし，完全 K 分木は，すべての葉が同じ深さをもち，すべての内部頂点の次数が K であるような K 分木を指す．また，深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．

このとき，総頂点間経路長が最小となる N を求める．ここでは，高さ H の完全 K 分木の深さ N の頂点と根とを隣接化することにより，隣接化前と比べて総頂点間経路長がどれだけ短縮されたかを定式化する．以後，これを総頂点間短縮経路長と呼び，$S_H(N)$ と表すこととすると，

$$
\begin{aligned}
S_H(N) \;=\; & M(H-N)\sum_{i=1}^{[\frac{N}{2}]}\{(K-1)M(H-i)+1\}(N-2i+1) \\
& + \sum_{i=1}^{[\frac{N}{2}]-1}\{(K-1)M(H-N+i-1)+1\}\sum_{j=1}^{[\frac{N}{2}]-i}\{(K-1)M(H-j)+1\}(N-2i-2j+1) \quad (1)
\end{aligned}
$$

と定式化される．ただし，$[\cdot]$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表し，$M(h)(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．また，$\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$ と定義する．

3．最適頂点深さ

ここで，根と隣接化する頂点の深さ N が偶数であるとき $N=2L$ と表し，N が奇数のとき $N=2L+1$ と表すこととすると，次の定理1が成り立つ．

定理 1 $S_H(2L)$ と $S_H(2L+1)$ について，

$$S_H(2L) > S_H(2L+1) \quad (2)$$

が成り立つ．ただし，H が偶数のとき $L=1,2,\cdots,H/2-1$ であり，H が奇数のとき $L=1,2,\cdots,(H-1)/2$ である．

An Additional Adjacency between the Root and Another Node in a Complete K-ary Tree Minimizing Total Path Length
Kiyoshi Sawada and Hitoshi Uno
University of Marketing and Distribution Sciences
3-1 Gakuen-nishi-machi, Nishi-ku, Kobe 651-2188, Japan

(証明略.)

定理1より，総頂点間短縮経路長 $S_H(N)$ を最大にする N^* を求めるためには，N が偶数の場合だけを考えればよい．すなわち，$S_H(2L)$ を最大にする L^* を求めて，$N^*=2L^*$ とすればよい．

ここで，$R_H(L)=S_H(2L)$ とおき，$M(h)=\dfrac{K^{h+1}-1}{K-1}$ を代入して整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} R_H(L) &= \frac{1}{(K-1)^3}\Big\{K^{2H-3L+2}-2K^{2H-2L+2}+K^{2H-L+2}-(K+1)K^{H-L+1}-2L(K-1)K^{H+1} \\ &\quad +(K+1)K^{H+1}\Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

さらに，$R_H(L)$ の L に関する差分を $\Delta R_H(L)\equiv R_H(L+1)-R_H(L)$ とおくと，

$$\Delta R_H(L)=\frac{1}{(K-1)^2}\left[\left\{-(K^2+K+1)K^{-3L-1}+2(K+1)K^{-2L}-K^{-L+1}\right\}K^{2H}+\left\{(K+1)K^{-L}-2K\right\}K^{H}\right] \tag{4}$$

を得る．ここで，式 (4) の K^H を $x=K^H$ とおくと，実数 x に関する2次関数 $T_L(x)$ が得られる．

$$T_L(x)=\frac{1}{(K-1)^2}\left[\left\{-(K^2+K+1)K^{-3L-1}+2(K+1)K^{-2L}-K^{-L+1}\right\}x^2+\left\{(K+1)K^{-L}-2K\right\}x\right]. \tag{5}$$

このとき，式 (5) の x^2 の係数が，

$$\frac{1}{(K-1)^2K^{3L+1}}\left\{-K^{L+2}\left(K^L-2-\frac{2}{K}\right)-(K^2+K+1)\right\} \tag{6}$$

と変形できることから，$T_L(x)$ のグラフ形状に関して，次のように分類できる．
(i) $K=2$，$L=1$ のとき，x^2 の係数は正となる．すなわち，$T_L(x)$ は下に凸である．
(ii) $K=2$，$L=2,3,\cdots$ および $K=3,4,\cdots$ のときは，x^2 の係数は負となる．すなわち，$T_L(x)$ は上に凸である．

(i) の場合，式 (5) に $K=2$，$L=1$ を代入すると，

$$T_L(x)=\frac{1}{16}x^2-\frac{5}{2}x \tag{7}$$

を得る．このとき，$0<x<40$ (すなわち，$H=4,5$) のとき $T_L(x)<0$ であり，$x>40$ (すなわち，$H=6,7,\cdots$) のとき $T_L(x)>0$ であることから，$H=4,5$ ならば $\Delta R_H(1)<0$，$H=6,7,\cdots$ ならば $\Delta R_H(1)>0$ が成り立つ．

(ii) の場合，

$$T_L(0) = 0, \tag{8}$$

$$T'_L(0) = \frac{K^{-L+1}}{(K-1)^2}\left(1+\frac{1}{K}-2K^L\right) < 0 \tag{9}$$

より，$x>0$ のとき $T_L(x)<0$ となる．したがって，H が偶数の場合は $L=2,3,\cdots,H/2-1$ のとき，H が奇数の場合は $L=2,3,\cdots,(H-1)/2-1$ のとき，$\Delta R_H(L)<0$ が成り立つ．

以上の解析結果より，次の定理2が得られる．

定理 2 総頂点間短縮経路長 $S_H(N)$ を最大にする頂点深さ N^* は，
(1) $K=2$ の場合，$H=2,3,4,5$ ならば $N^*=2$ であり，$H=6,7,\cdots$ ならば $N^*=4$ である．
(2) $K=3,4,\cdots$ の場合，$N^*=2$ である．

(証明略.)

参考文献

[1] 宇野 斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について”, 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73–86 (1993).

[2] 澤田 清, 宇野 斉, “完全2分木型組織構造への関係追加モデル”, 日本応用数理学会論文誌, (投稿中).