1D-2

Wu's method の浮動小数化[1]

野竹 禎雄 (愛媛大学大学院理工学研究科情報工学専攻)
甲斐 博 (愛媛大学工学部情報工学科)、野田 松太郎 (愛媛大学工学部情報工学科)

1 はじめに

本稿では、連立代数方程式の代数的解法である Wu's method [1] の数式処理システム Maple へのインプリメント [2] を改良し、国産システムの Risa/Asir 上にインプリメントし、有限次元の解を求める場合について、代表的な代数的解法であるグレブナ基底計算と計算速度の観点から比較検討を行う。

さらに連立代数方程式の係数を浮動小数係数とした場合に拡張し、Wu's method が有効であることをみる。この場合には、近似 GCD 算法 [3] の導入が必要となる。

2 Wu's method

Wu's method の構造は大きく分けて 2 つのブロック (basset, remset) に分けられる。そして、その行程を交互に繰り返すことで連立代数方程式を解く。はじめに、記号の説明を行う。

- PS, CS, RS:多項式集合
- lvar(p_i):p_iの主変数
- ldeg(p_i):p_iの主変数の次数
- ini(p_i):p_iの主係数
- ascending set:以下の条件を満たす多項式集合
  - lvar(p_1) $<$ lvar(p_2) $< \cdots <$ lvar(p_n)
  - p_iにおける lvar(p_i) の次数が、p_jにおける lvar(p_i) の次数よりも低い。この時 $i < j$ とする。

実際の Wu's method のアルゴリズムは以下の通りである。

step1 basset
　$CS \leftarrow$ basset(PS)
　(PS から ascending set を取り出す)

step2 remset
　$RS \leftarrow$ remset(PS,CS)
　($p_i \in PS$ を $c_j \in CS$ で割った偽剰余を求める)

step3 零判定
　if (RS が空集合なら)
　　then
　　　Return RS
　　else
　　　$PS = PS \cup RS$
　　　step 1 に戻る

3 有限次元の解

代表的な代数的解法であるグレブナ基底計算と Wu's method を計算速度の観点から比較を行う。

時間計測に使用した計算機は次のものを利用した。

DEC ALPHA 433MHz Memory:128MB

例として *Example1,2* を用意した。これらの例の特徴は有限次元の解を持つ連立代数方程式である。表 1 に計算時間を示す。

Example1

[1] Wu's method for polynomials of inexact/floating point coefficients
Yoshio Notake, Graduate school of Computer Science, Ehime Univ.
Hirosi Kai and Matutaro Noda, Dept. of Computer Science, Ehime Univ.

order:$[a,b,c,d,e,f]$

$$\begin{cases} ab+ce+f+4=0 \\ a+bc+c^2+d+e+f^2=0 \\ a+a^2+b^3cf+cd+ce=0 \\ 3a+3b+b^2f+4cd^2+e^2+12=0 \end{cases}$$

Example2
order:$[a,b,c,d,e,f,g]$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f+g=0 \\ a+cd+e^2+4bg+12=0 \\ fg+a^3+a^2b+cd+ed=0 \\ 3a+b+3dg+4c+e*c+12=0 \end{cases}$$

表１：計算時間の比較 (単位：sec)

	Wu's method	グレブナ基底計算
Example1	4.32(+1.81)	>200
Example2	19.13(+12.22)	>200

以上の事より、有限次元の解をにおいては Wu's method はグレブナ基底計算よりも高速に計算することができることが、明らかとなった。

4 Wu's methodの浮動小数化

浮動小数係数を持つ連立代数方程式を解く場合考えなければならないことは、入力段階での誤差と計算時に出て来る誤差である。

この時、実際に Wu's method 中で、誤差の処理を行う必要があるのは remset 部における 擬剰余計算である。Wu's method で行う場合の問題点は擬剰余の以下の式

$$I^{1+\mathrm{ldeg}(x_c,f_1)-\mathrm{ldeg}(x_c,f_2)}f_1=f_2Q+R$$

における剰余 R の零判定にある。ここで、I は $\mathrm{ini}(f_2)$、Q は商、R は剰余を示す。

今回は、f_2と相対的に比較してノルムが十分小さい場合"0" と判定している。

以下に誤差の入った連立代数方程式の例を示す。ここで F_iは誤差の入った式、f_jは誤差のない式を示す。

Example

$$\begin{cases} F_1=4x^3y^3+3x^2y^2+2*xy+1.0001 \\ =f_1+0.0001 \\ F_2=x^3y^3+2x^2y^2+3xy+4=f_2 \end{cases}$$

結果
charsets(F_1,F_2)=$[200yx^4+299.998x^3,-20x^5]$
charsets(f_1,f_2)=$[200yx^4+300x^3,-20x^5]$
誤差
$-0.002x^2$, 0

5 考察

本稿では、Wu's method は有限次元の解を持つ連立代数方程式に関しては、グレブナ基底計算よりも高速に計算できることを示した。さらに、浮動小数係数の場合には、低い次数での連立代数方程式については、信頼性の高い解を求めることが可能になった。今後の問題としては、擬剰余中での誤差の評価をより厳密に行い、高次の連立代数方程式についても、誤差の急激な増大にも対処できるように改善する必要がある。

参考文献

[1] Wen-tsun Wu,A MECHANIZATION METHOD OF EQUATIONS-SOLVING AND THEOREM-PROVING,Advances in Computing Research,vol.6,pp.103–138,1992.

[2] Dongming Wang,Implementation and Applications of Charcteristic Set Method , Lecture Notes for 1994 Summer Graduate School in Mathmatics,Preliminary Version,1994.

[3] Tateaki Sasaki and Matu-Tarow Noda, Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations, J. Inf. Proc., vol.12, pp.159–168, 1989.