混合型待ち行列網の計算方法†

紀 一 誠††

積形式解をもつ待ち行列網モデル，とりわけ閉鎖型および混合型の待ち行列網モデルはコンピュータ・システムあるいはコミュニケーション・ネットワークのモデルとして広い応用範囲をもっている．従来知られているたたみこみによる待ち行列網の計算方法は，すべての部分連鎖が閉鎖型であるような待ち行列網に関しては有効に計算をおこなうことができる．しかし，混合型の待ち行列網に関しては，開放型の部分連鎖が存在するため，待ち行列長が無限大になる可能性をもつサービスセンタが存在することになり，そのまま適用することはできない．本稿ではその欠点を改良し，複数個の閉鎖型と複数個の開放型の部分連鎖が混在し，可変サービス率をもつサービスセンタが存在する混合型の待ち行列網に関するたたみこみによる計算法を開発した．

1. まえがき

積形式解をもつ待ち行列網モデルは計算機システムや通信網システムの性能評価のためのモデルとして広く利用されている．

待ち行列網は一般に，サービスを提供するいくつかのサービスセンタ (service centers) とそれらのセンタでサービスを受け次々に網内を推移していく客 (customers) によって構成される．

待ち行列網の中における客の移動は客のサービスセンタ間の推移を確率的に指定する推移確率行列によって表現される．この推移確率行列は客のセンタ間推移に関するマルコフ連鎖とみなされる．そのマルコフ連鎖を構成する状態の中に網の外部に関する状態を含み，したがって網外からの客の到着や網外への客の退去のある経路を表現するものを開放型の連鎖 (open chain) という．一方，網の外部との客の出入りがなく，常に一定人数の客がサービスセンタ間を動き回るような推移経路を表現するものを閉鎖型の連鎖 (closed chain) という．

各種のサービスセンタでサービスを受けて次々と待ち行列網の中を推移する客の動きは，CPU をはじめ各種の入出力装置を次々と使用しながら処理を進めていくプロセスの動きになぞらえることができ，待ち行列網モデルは理解しやすく手軽に扱える計算機システムのモデルとして成功をおさめている．

計算機システムの性能評価モデルとして用いられた最初の積形式解をもつ待ち行列網は Jackson[1] により最初に示され Gordon, Newell[2] によって精密化されたもので，閉鎖型の連鎖を1個もちサービス時間分布が指数分布に従うサービスセンタから構成される待ち行列網であった．Buzen[3] によりこの種の待ち行列網に関する計算アルゴリズムが示された．

1975年に Baskett, Chandy, Muntz, Palacios[4] によって積形式解をもつ待ち行列網の範囲は大きく拡大され，それに伴い計算機システムのモデルとしての応用範囲も大きく広がった*．

この BCMP 型待ち行列網の応用上最も重要な拡張点は，一つの待ち行列網の中に客の推移経路を確率的に推定するマルコフ連鎖が複数個存在することが許されるようになった点である．これらのマルコフ連鎖のことを部分連鎖 (subchains) といい，それぞれの部分連鎖は閉鎖的であっても開放的であってもよい．すべての部分連鎖が閉鎖的である場合には待ち行列網は閉鎖型であるといい，すべての部分連鎖が開放的である場合には開放型の待ち行列網という．

計算機システムのうち，性格の異なるいくつかのサブシステム，すなわちバッチ処理サブシステム，トランザクション処理サブシステム，タイムシェアリング・サブシステム等が一つのシステム内に混在するシステムを多次元処理システムという．

複数個の部分連鎖をもつ待ち行列網モデルを利用することにより，異なる多重度をもち確率的に異なるふるまいをするサブシステムにそれぞれ部分連鎖を対応付けることによって多次元処理システムのモデル化を行うことが可能になった．

計算機システムのモデルとして用いられているものは現在のところ，すべての部分連鎖が閉鎖的である待ち行列網を基礎とするものがほとんどである．

混合型待ち行列網は閉鎖型に加えて開放型の部分連

† Computational Algorithms for Mixed Queueing Networks by Issei Kino (C&C Systems Research Laboratories, NEC Corporation).

†† 日本電気(株) C&C システム研究所

* 著者4名の頭文字をとって BCMP 型の待ち行列網といわれる．

鎖の存在も許されるため，トランザクション処理サブシステムやタイムシェアリング・サブシステムのモデル化を閉鎖型待ち行列網に比べていっそう柔軟に行うことができる．さらに，閉鎖型待ち行列網モデルにおいて大きな客数をもつ閉鎖型部分連鎖が存在する場合には計算時間が膨大なものになりやすいが，この場合その閉鎖型部分連鎖を開放型に置き換えて混合型の近似モデルとすることによって計算時間を大幅に短縮することができる．

混合型待ち行列網に関する計算方法は文献5),7),8) 等で扱われている．しかし，いずれも許される部分連鎖の数やサービスセンタの種類に制限があり，計算機システムのモデルとして実用的に使用される規模の待ち行列網に対して有効な方法は現在までには知られていない．

本稿では，複数個の閉鎖型部分連鎖と複数個の開放型部分連鎖をもち，複数個の可変サービス率をもつサービスセンタが存在し，客は複数種類のサービスクラスをもつことが許されるような広い範囲の BCMP 型の混合型待ち行列網を扱うことができるたたみこみ型 (convolution) の計算アルゴリズムを示す．

本稿の方法は，Reiser, Kobayashi[5] および Reiser[6] により示された閉鎖型待ち行列網に関するたたみこみ型の計算アルゴリズムを混合型待ち行列網へと拡張したものである．

閉鎖型待ち行列網に関するたたみこみ型の計算法を混合型に拡張する場合，とくに問題となるのは，開放型の部分連鎖が存在するため，サービスセンタの状態を表現する客数ベクトルの定義域が有界でなくなってしまう点にある．本稿ではこの難点を克服するため，サービスセンタに関する正規化されない状態確率を閉鎖型部分連鎖に関する客数ベクトルのみをパラメータに含む形に導くことにより，閉鎖型待ち行列網とほとんど同じ手順によって混合型待ち行列網を計算することを可能とした．

2. 混合型待ち行列網

2.1 モデル

本稿で扱う混合型待ち行列網モデルを以下に示す．

1) サービスセンタ

N個のサービスセンタからなる待ち行列網を考える．それぞれのサービスセンタは**表1**に示す四つのセンタのタイプのいずれかのものであるとする．

2) サービスクラス

表1 サービスセンタのタイプ

Table 1 The four types of service center.

タイプ	サービス規律	サービス時間分布
1	先着順 (FCFS)	指数分布
2	プロセッサシェアリング (PS)	Coxian[10]
3	扱い者数無限	〃
4	後着順・割込型優先権・中断点再開 (LCFS-PR)	〃

網内にはS種類のサービスクラスが存在するものとし，それぞれのクラスはN個のサービスセンタのいずれかに属しているものとする．

サービスクラス全体の集合をRとし，センタiに属するクラスの集合を R_i とすれば，$R=\bigcup_{i=1}^{N} R_i$ であり，すべての $i\neq j$ について $R_i\cap R_j=\phi$ であるものとする．

客はサービスセンタに属するいずれかのクラスに入り，サービスクラスごとに異なるサービス要求時間分布に従いサービス時間要求をするものとする．

サービス要求時間分布は Coxian[10] であるものとし，クラスrの客の平均サービス要求時間を $1/\hat{\mu}_r$ とする．

ただし，タイプ1のセンタのみは例外であり，そこでは客はクラスに無関係にすべてパラメータ μ_i^0 をもつ指数分布に従うサービス時間を要求するものとする．

したがって，タイプ1のセンタの場合，そのセンタに属するクラスrの客の平均サービス要求時間を $1/\hat{\mu}_r$ とすれば $\hat{\mu}_r$ はrによらず μ_i^0 に等しい．すなわち次である．$\hat{\mu}_r=\mu_i^0$, ${}^\forall r\in R_i, i\in\{$タイプ1のセンタ番号$\}$.

3) サービス能力

サービスセンタiのサービス能力（人／時間）はそのセンタに存在する客jの関数であってよく，$\hat{\mu}_i(j)$ と表す．センタiに客が1人だけ存在するときのサービス能力をそのセンタの単位サービス能力といい，$c_i=\hat{\mu}_i(1)$ と表す．単位サービス能力で正規化したサービス能力を $\mu_i(j)=\hat{\mu}_i(j)/c_i$ とする．さらに，パラメータ μ_r を，$\mu_r=\hat{\mu}_r c_i$ と定義しておく．

このとき，サービスセンタごとのサービス能力は**表2**に示すような形であるとする．とくにタイプ1のセンタの場合，$\mu_i(j)$ の形により，固定サービス率，半可変サービス率，可変サービス率の3種類に分類され，それぞれ，単一窓口，複数窓口，一般，の場合のモデルに対応している．m_i は窓口数を示すパラメータ．

表 2 サービスセンタのサービス能力

Table 2 Service rates of service center.

センタのタイプ		$\mu_i(j)$
1	固定サービス率	$\mu_i(j)=1,\ 1\leq j$
	半可変サービス率	$\mu_i(j)=\begin{cases} j, & 1\leq j\leq m_i \\ m_i, & m_i\leq j \end{cases}$
	可変サービス率	$\mu_i(j)=$任意, $1\leq j$
2, 4		$\mu_i(j)=1,\ 1\leq j$
3		$\mu_i(j)=j,\ 1\leq j$

4) 部分連鎖

クラス r の状態でのサービスを受け終わった客が次にクラス s を選択する確率を $p_{r,s}$ とし，客の網内移動経路を確率的に表現する推移確率行列を $\boldsymbol{P}=\{p_{r,s}\}$ とする．さらに，$\boldsymbol{P}$ は M 個のエルゴート的な部分連鎖 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_M$ に分解可能 (decomposable) であると仮定する．このうち，$1\sim L$ の部分連鎖は閉鎖型，$L+1\sim M$ の部分連鎖は開放型であると仮定する．

部分連鎖 l に示される経路情報に従って網内を移動する客を部分連鎖 l に属する客ということにする．

部分連鎖 l に属する客によって訪問を受けるクラスの集合を C_l と表す．このとき，$R=\bigcup_{l=1}^{M} C_l$ であり，すべての $l\neq m$ について $C_l\cap C_m=\phi$ である．

5) 網外からの客の到着

それぞれの開放型部分連鎖に対応して網外からの客の到着をひきおこすポアソン発生源を仮定する．

開放型部分連鎖 l に対応する客の到着率を λ_l とし，到着した客がクラス r に入る確率を q_r とする．

ただし，λ_l は有限確定なある定数とし，$\sum_{r\in C_l} q_r=1$ とする．

6) 客数ベクトル

待ち行列網の状態を表現するためにいくつかの客数ベクトルを定義しておく．

k_r：クラス r の状態にある客の数

$\boldsymbol{k}_i$：センタ i に関する客数ベクトル，$\boldsymbol{k}_i=(k_r), r\in R_i$

$\boldsymbol{k}$：待ち行列網全体に関する客数ベクトル
$\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_N)$

K_l：部分連鎖 l に属する客数，$K_l=\sum_{r\in C_l} k_r$

$\boldsymbol{K}$：閉鎖型部分連鎖に属する客数 K_l を要素とするベクトル，
$\boldsymbol{K}=(K_1, K_2, \cdots, K_L)$

7) モデル例

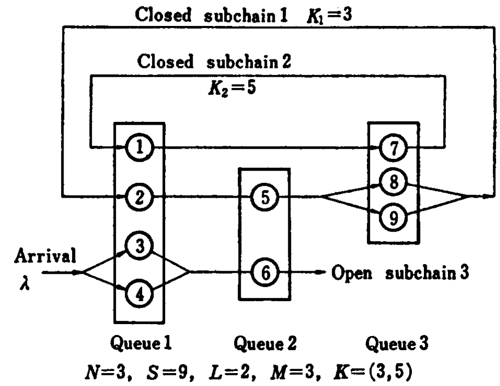

図 1 混合型待ち行列網の例

Fig. 1 An example of mixed queueing network with two closed and one open subchains.

図1に混合型待ち行列網の例を示す．例においては，$N=3,\ S=9,\ M=3,\ L=2,\ \boldsymbol{K}=(3, 5)$ である．

また，$R_1=\{①, ②, ③, ④\}$，$R_2=\{⑤, ⑥\}, \cdots$，$C_1=\{②, ⑤, ⑧, ⑨\}$，$C_2=\{①, ⑦\}, \cdots$，等である．

2.2 積形式解

ここでは前節に示したモデルの定常状態確率の表現を準備する．記法の簡略化のため，以下を通じてベクトルに関する次のごとくの表記法を定義しておく．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ をそれぞれ L 次元のベクトルとする．

$|\boldsymbol{a}|=a_1+a_2+\cdots+a_L$

$\boldsymbol{x}!=x_1!\,x_2!\cdots x_L!$

$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}=a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_L^{x_L}$

さらに，$\sum_{|\boldsymbol{x}|=k}(\cdot)$ は条件 $|\boldsymbol{x}|=k$ を満たすすべての可能な状態 $\boldsymbol{x}$ に関する和をとるものとする．

クラス r の状態への客の平均訪問回数 θ_r は次の連立方程式の解として定まることが知られている[4]．

$$\theta_r=q_r+\sum_{i=1}^{S} p_{i,r}\theta_i,\ r=1, 2, \cdots, S \qquad (1)$$

(1)式は各部分連鎖に対応する M 個の連立方程式の組に分解される．このうち，閉鎖型部分連鎖に関するものは同次方程式になるため，その解 $\{\theta_r\}$ は定数倍を除いて一意に定まる．このとき解 $\{\theta_r\}$ はその部分連鎖に属する客のクラス r の状態への平均訪問回数の相対値を示している．開放型の場合には解 $\{\theta_r\}$ は一意に定まるものと仮定する．このとき，$\{\lambda_l\theta_r\}$ が開放型部分連鎖 l に属する客のクラス r の状態への単位時間当りの平均訪問回数の絶対値を示すことになる．ただし，$r\in C_l$ とする．

サービスセンタ i にかかる負荷量を表現するベクトル $\boldsymbol{e}_i=(e_r), r\in R_i$ を次のように定義する．クラス r

が閉鎖型の部分連鎖に属する場合，すなわち $r\in C_l$, $l\in 1\sim L$ である場合には $e_r=\theta_r/\mu_r$ とする．

クラス r が開放型の部分連鎖に属する場合，すなわち $r\in C_l, l\in L+1\sim M$ の場合には $e_r=\lambda_l\theta_r/\mu_r$ とする．

このとき，系の定常状態確率は次のごとくの積形式で与えられることが Baskett *et al.*[4]により知られている．

$$P(\boldsymbol{k})=\prod_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{k}_i)/g(\boldsymbol{K}) \tag{2}$$

ここで，$g(\boldsymbol{K})$ は正規化定数であり，$f_i(\boldsymbol{k}_i)$ はサービスセンタ i が状態 $\boldsymbol{k}_i$ にある正規化されない状態確率を意味しており次のような形に表される．

$$f_i(\boldsymbol{k}_i)=a_i(|\boldsymbol{k}_i|)|\boldsymbol{k}_i|!\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}_i}/\boldsymbol{k}_i! \tag{3}$$

ここでさらに，$a_i(k)$ はサービスセンタ i に関する容量係数といわれるもので，次のように定義される．

$$a_i(0)=1,$$
$$a_i(k)=\{\prod_{j=1}^{k}\mu_i(j)\}^{-1},\quad k=1,2,\cdots \tag{4}$$

3. 準　備

3.1 母関数

ここでは正規化定数に関する母関数による表現を与える．次の記号を定義しておく．

$$S_{il}=R_i\cap C_l,\ \rho_{il}=\sum_{r\in S_{il}} e_r,$$
$$n_{il}=\sum_{r\in S_{il}} k_r,\quad \rho_{i0}=\sum_{l=L+1}^{M}\rho_{il},$$
$$n_{i0}=\sum_{l=L+1}^{M} n_{il},\quad \boldsymbol{r}_i=(\rho_{i0},\rho_{i1},\cdots,\rho_{iL}),$$
$$\boldsymbol{n}_i=(n_{i0},n_{i1},\cdots n_{iL}),$$
$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\cdots+\boldsymbol{n}_L,$$
$$\boldsymbol{x}_i=(n_{i1},n_{i2},\cdots,n_{iL}),$$
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_L,$$
$$\boldsymbol{\rho}_i=(\rho_{i1},\rho_{i2},\cdots,\rho_{iL})$$

$l=1\sim L$ について，n_{il} はセンタ i に存在する部分連鎖 l に属する客の数，ρ_{il} はその負荷量を示している．

n_{i0} はセンタ i に存在するすべての開放部分連鎖に属する客の総数，ρ_{i0} はその負荷量を示す．$\boldsymbol{x}_i$ および $\boldsymbol{\rho}_i$ は，$\boldsymbol{n}_i$ および $\boldsymbol{r}_i$ のうち閉鎖型部分連鎖に関連する要素のみを抜き出した，客数および負荷量に関するベクトルである．

サービスセンタ i が状態 $\boldsymbol{n}_i$ である（正規化されない）状態確率を $p_i(\boldsymbol{n}_i)$，系全体の状態が $\boldsymbol{n}$ である確率を $P(\boldsymbol{n})$ とすると，(2)，(3)式より以下の関係が成り立つ．

$$p_i(\boldsymbol{n}_i)=a_i(|\boldsymbol{n}_i|)|\boldsymbol{n}_i|!\boldsymbol{r}_i^{\boldsymbol{n}_i}/\boldsymbol{n}_i! \tag{5}$$
$$P(\boldsymbol{n})=\prod_{i=1}^{N} p_i(\boldsymbol{n}_i)/g(\boldsymbol{K}) \tag{6}$$

さらに，センタ i の状態が $\boldsymbol{x}_i$ である（正規化されない）状態確率を $q_i(\boldsymbol{x}_i)$ とする．すなわち次式である．

$$q_i(\boldsymbol{x}_i)=\sum_{n_{i0}=0}^{\infty} p_i(\boldsymbol{n}_i) \tag{7}$$

(7)式の右辺が収束する場合には（収束性については 4.2 節でふれる）正規化定数 $g(\boldsymbol{K})$ は，すべての状態にわたる確率の和が 1，すなわち $\sum_{\boldsymbol{n}\in F} P(\boldsymbol{n})=1$ なる条件に(5)，(6)式を代入することにより以下のように表現することができる．ここで，Fはベクトル$\boldsymbol{n}$のとりうる可能なすべての状態からなる集合とする．

$$g(\boldsymbol{K})=\sum_{\boldsymbol{n}\in F}\prod_{i=1}^{N} p_i(\boldsymbol{n}_i)$$

さらに，$\sum_{\boldsymbol{n}\in F}=\sum_{n_{10}=0}^{\infty}\sum_{n_{20}=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{N0}=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{K}}$ となることと(7)式で与えられる $q_i(\boldsymbol{x}_i)$ の定義から，正規化定数はさらに次のように表現することができる．

$$g(\boldsymbol{K})=\sum_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{K}}\prod_{i=1}^{N} q_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{8}$$

ただし，$\sum_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{K}}(\cdot)$ の意味は，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_N$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{K}$ なる条件を満足するすべての $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N$ の可能な組合せについての和をとるものとする．

すなわち，$\boldsymbol{x}_i=(n_{i1},n_{i2},\cdots,n_{iL})$ であるから，$n_{11}+n_{21}+\cdots+n_{N1}=K_1$, $n_{12}+n_{22}+\cdots+n_{N2}=K_2,\cdots,n_{1L}+n_{2L}+\cdots+n_{NL}=K_L$, なる条件を満たすすべての可能な $\{n_{il}\}$ の組合せに関する和をとることを意味している．

以下(8)式の計算方法について考える．

客数ベクトルが $\boldsymbol{j}=(j_1,j_2,\cdots,j_L)$ である場合の待ち行列網に関する正規化定数を $g(\boldsymbol{j})$ とする．変数ベクトルを $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_L)$ とし，正規化定数 $g(\boldsymbol{j})$ に関する母関数 $G(\boldsymbol{z})$ を次のように定義する．

$$G(\boldsymbol{z})=\sum_{\boldsymbol{j}\geq \boldsymbol{0}} g(\boldsymbol{j})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}} \tag{9}$$

また，サービスセンタ i の（正規化されない）状態確率 $q_i(\boldsymbol{x}_i)$ に関する母関数 $u_i(\boldsymbol{z})$ を次のように定義する．

$$u_i(\boldsymbol{z})=\sum_{\boldsymbol{x}_i>\boldsymbol{0}} q_i(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{x}_i} \tag{10}$$

(8)式より，(9)，(10)の間に次の関係が成り立っていることがわかる．

$$G(\boldsymbol{z})=\prod_{i=1}^{N} u_i(\boldsymbol{z}) \tag{11}$$

3.2 たたみこみ演算

たたみこみ演算を定義しておく.

$\boldsymbol{K}$を非負の整数値をその要素とするL次元ベクトル, $\boldsymbol{x}$を$\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{K}$なる範囲で定義された非負の整数値を要素とする$L$次元のベクトルとする.

$a_1(\boldsymbol{x}), a_2(\boldsymbol{x})$は$\boldsymbol{x}$を変数とする実数値をとる関数とし, a_1とa_2をたたみこんで得られる関数aを, $a(\boldsymbol{x})=(a_1 * a_2)(\boldsymbol{x})$と表すことにする.

aは$\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{K}$上で定義された, $\boldsymbol{x}$を変数とする実数値をとる関数で次のように定義される. ただし, $\boldsymbol{y}$は非負の整数値を要素とするインディクス・ベクトルとする.

$$a(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{x}} a_1(\boldsymbol{y})a_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{12}$$

$a_1 * a_2=a_2 * a_1$は明らか. 多重のたたみこみはたたみこみの繰返し, すなわち, $a_1 * a_2 * a_3=a_1 *(a_2 * a_3)$のごとくに定義されるものとする.

3.3 たたみこみによる正規化定数の表現

前節で定義したたたみこみ演算を用いた正規化定数の表現を与える.

まず, たたみこみ演算の定義から次の関係は明らかである.

$$u_i(\boldsymbol{z})u_j(\boldsymbol{z})=\sum_{\boldsymbol{j}>\boldsymbol{0}}(q_i * q_j)(\boldsymbol{j})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}} \tag{13}$$

(11)式について(13)式を繰り返し用いることにより, 正規化定数に関する母関数$G(\boldsymbol{z})$は次のごとくに表現される.

$$G(\boldsymbol{z})=\sum_{\boldsymbol{j}\geq\boldsymbol{0}}(q_1 * q_2 * \cdots * q_N)(\boldsymbol{j})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}} \tag{14}$$

母関数$G(\boldsymbol{z})$の定義式(9)と(14)式より, 正規化定数$g(\boldsymbol{K})$は次に示すように各センタの正規化されない状態確率q_iのたたみこみ列として得られることがわかる.

$$g(\boldsymbol{K})=(q_1 * q_2 * \cdots * q_N)(\boldsymbol{K}) \tag{15}$$

同様の議論により, $g(\boldsymbol{K})$をq_iのたたみこみ列ではなくp_iのたたみこみ列として, $g(\boldsymbol{K})=(p_1 * p_2 * \cdots * p_N)(\boldsymbol{K})$と表現できそうであるが, 開放型部分連鎖が存在するために$p_i(\cdot)$の定義域は有界にならず, うまくいかない点に注意が必要である. $q_i(\cdot)$は有界な定義域をもち, (15)式が意味をもつ.

$q_i(\cdot)$の具体的な表現を求めること, およびそれを用いた(15)式による正規化定数$g(\boldsymbol{K})$の計算方法を与えることが本稿の目的である.

3.4 *i*-complement システム

サービスセンタi以外のすべてのサービスセンタjについての負荷ベクトル$\boldsymbol{r}_j$の値をそのままに保ちながら, サービスセンタiだけを待ち行列網から取り除いてしまった後にできる待ち行列網のことを元の待ち行列網（システム）に対して, *i*-complement なシステムという[11]. *i*-complement なシステムに関する正規化定数を$g^{[i]}(\cdot)$のように表すことにする.

サービスセンタiが$\boldsymbol{x}_i$あるいは$\boldsymbol{k}_i$である（正規化された）状態確率$P(\boldsymbol{x}_i)$および$P(\boldsymbol{k}_i)$は, (2)および(5), (6)式より, $g^{[i]}(\cdot)$を用いて次のように表すことができる.

$$P(\boldsymbol{x}_i)=q_i(\boldsymbol{x}_i)g^{[i]}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{x}_i)/g(\boldsymbol{K})$$
$$P(\boldsymbol{k}_i)=f_i(\boldsymbol{k}_i)g^{[i]}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{x}_i)/g(\boldsymbol{K}) \tag{16}$$

4. 正規化定数の計算アルゴリズム

(16)式に示されるように, 正規化定数$g(\boldsymbol{K})$は各サービスセンタごとに$q_i(\cdot)$を作り出し, それを順次たたみこんでいくことにより得られる. この基本的な手順を4.1節に示し, $q_i(\cdot)$の実現方法について4.2節で述べる.

4.1 基本アルゴリズム

作業用および計算結果の格納のため, 二つの記憶領域qおよびgを用意する. q, gはプログラム風に定義すれば, Dimension $q(K_1, K_2, \cdots, K_L)$, $g(K_1, K_2, \cdots, K_L)$と定義されるL次元の記憶領域とする. 簡略化のために, $q(\boldsymbol{x})=q(x_1, x_2, \cdots, x_L)$のような表記法を使用することにする.

(15)式の計算は, 記憶領域q上にサービスセンタiに関する正規化されない状態確率$q_i(\cdot)$を実現し, qとgをたたみこみその結果を新たにg上に格納するという操作を$i=1$からNまで繰り返せばよい. この手順をプログラム風に表現したものが次の［アルゴリズムM］である. ただし, For $\boldsymbol{x}$; c, の表現は条件cを満たすすべての$\boldsymbol{x}$に関する実行を指示するものとする.

［アルゴリズム M］

$$g(\boldsymbol{x})\leftarrow\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\\ 0, & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\end{cases}$$

```
For i=1 to N
    M1  [ For x; 0≤x≤K
              q(x) ← q_i(x)
          next x
    M2  [ For x; 0≤x≤K
              g(x) ← Σ_{0≤y≤x} q(y)g(x−y)
          next x
next i
```

M_1 が正規化されない状態確率 $q_i(\cdot)$ を記憶領域 q 上に作り出す部分，M_2 が q と g をたたみこむ部分になっている．[アルゴリズム M] の完了時点で記憶領域 g 上に正規化定数 $g(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{K}$ が得られている．そのコーナの部分が求める正規化定数 $g(\boldsymbol{K})$ である．

4.2 $q_i(\boldsymbol{x})$ の計算アルゴリズム

前節の [アルゴリズム M] を実行するためにはさらに，M_1 の部分のアルゴリズムを確立することが必要とされる．ここでは，まず $q_i(\boldsymbol{x})$ の具体的な形を導き，さらにその計算アルゴリズムについて述べる．

記法の簡略化のため，以下 $q_i(\cdot)$, $p_i(\cdot)$, $a_i(\cdot)$, $\mu_i(\cdot)$, $\boldsymbol{\rho}_i$, $\boldsymbol{n}_i$, $\boldsymbol{x}_i$, ρ_{i0}, n_{i0}, ρ_{il}, $v_i(\cdot)$ 等の添字 i を省略するものとする．さらに次の記号を定義しておく．

$[k]_n=k(k+1)\cdots(k+n-1)$.

(6)および(7)式より $q(\boldsymbol{x})$ を計算すると次のごとくになる．

$$q(\boldsymbol{x})=v(|\boldsymbol{x}|,\rho_0)|\boldsymbol{x}|!\,\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{x}}/\boldsymbol{x}! \qquad (17)$$

ここに $v(k,\rho_0)$ は次式で与えられる．

$$v(k,\rho_0)=\sum_{l=0}^{\infty}a(k+l)[k+1]_l\rho_0^l/l! \qquad (18)$$

(18)は次の条件が満たされれば収束する．

$$\rho_0<\lim_{j\to\infty}\mu(j) \qquad (19)$$

以下(19)の条件が満たされる場合のみを扱う．

(17)，(18)より $q(\boldsymbol{x})$ の具体的な形が得られた．次にその計算方法を考える．

いま，$r(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|!\,\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{x}}/\boldsymbol{x}!$ なる関数を考える．$\boldsymbol{e}_l$ を l 方向の単位ベクトルとすると，$r(\boldsymbol{x})=\sum_{l=1}^{L}\rho_l r(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_l)$ なる関係が成り立っている．したがって，(17)式は次のように表すことができる．

$$q(\boldsymbol{x})=m(|\boldsymbol{x}|,\rho_0)\sum_{l=1}^{L}\rho_l q(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_l) \qquad (20)$$

ここに，$m(k,\rho_0)$ は次式で与えられる．

$$m(k,\rho_0)=v(k,\rho_0)/v(k-1,\rho_0) \qquad (21)$$

$v(k,\rho_0)$ および $m(k,\rho_0)$ はサービスセンタのタイプによりその形が異なっている．表2に示される $\mu(j)$ を用いて $v(k,\rho_0)$ を求めると**表3**に示されるごとくの形になる．さらに，$m(k,\rho_0)$ は**表4**に示されるような形に定まる．

以上より，$q(\boldsymbol{x})$ は(20)式に基づき，次の [アルゴリズムQ] によって計算することができる．ただし，タイプ3のサービスセンタの場合には初期条件の設定が他のタイプの場合と異なるので注意を要する．また，$\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{K}$ の範囲外では記憶領域 q は，$q(\boldsymbol{x})=0$ であるものとする．

表 3　$v(k,\rho_0)$ の形

Table 3　Formulation of $v(k,\rho_0)$.

サービスセンタのタイプ			$v(k,\rho_0)$
1	固定サービス率		$1/(1-\rho_0)^{k+1}$
	半可変サービス率	$k\leq m-1$	$m^m/(m-1)!\,(m-\rho_0)^{k+1} + \sum_{l=0}^{m-k-1}\left\{\frac{1}{k!}-\frac{[k+1]_l}{m!}\left(\frac{1}{m}\right)^{l+k-m}\right\}\frac{\rho_0^l}{l!}$
		$m\leq k$	$m^m(m-1)!\,(m-\rho_0)^{k+1}$
2, 3			$1/(1-\rho_0)^{k+1}$
3			$e^{\rho_0}/k!$

表 4　$m(k,\rho_0)$ の形

Table 4　Formulation of $m(k,\rho_0)$.

サービスセンタのタイプ			$m(k,\rho_0)$
1	固定サービス率		$1/(1-\rho_0)$
	半可変サービス率	$k\leq m-1$	$v(k,\rho_0)/v(k-1,\rho_0)$
		$m\leq k$	$1/(m-\rho_0)$
2, 4			$1/(1-\rho_0)$
3			$1/k$

[アルゴリズム Q]

$$q(\boldsymbol{0})\leftarrow\begin{cases}e^{\rho_0}, & \text{タイプ3のセンタ}\\ 1, & \text{上記以外}\end{cases}$$

```
For k=0 to |K|
    For x ; |x|=k
        q(x) ← m(k, ρ0) Σ_{l=1}^{L} ρl q(x−el)
    next x
next k
```

上記の [アルゴリズム Q] を [アルゴリズム M] のなかの M_1 の部分と置き代えることにより正規化定数の計算アルゴリズムは完成する．

5. サービスセンタ滞在時間の計算アルゴリズム

ここではサービスセンタのタイプをタイプ1に限定し，このセンタにおける平均滞在時間（待ち時間およびサービス時間）の計算方法について考える．

一般の可変サービス率をもつタイプ1のサービスセンタでは，ある客のセンタ滞在時間はその客より後から到着した客によってそのセンタのサービス率が影響を受けるため，到着時点のセンタの滞在人数だけから

はその客のセンタ滞在時間を定めることはできない.

しかし，固定サービス率をもつ場合および半可変サービス率をもつ場合については，$j-1$ 人の客がそのセンタに存在する状態に出会った客の平均センタ滞在時間は $j/\bar{\mu}_i(j)$ となり，到着時点のセンタ滞在客数を知れば平均滞在時間を計算することができる．ここではこのような場合についてのみ考えることにする．客数ベクトルが $\boldsymbol{K}$ の待ち行列網において，サービスセンタ i の滞在人数が j 人である確率を $P(|\boldsymbol{n}_i|=j\,;\,\boldsymbol{K})$ とし，閉鎖型部分連鎖 l に属する客のサービスセンタ i における平均滞在時間を $S_{il}(\boldsymbol{K})$ と表すことにする．

閉鎖型部分連鎖 l に属する客が任意のセンタを退去した直後時点および任意のセンタへの到着直前の時点における系の定常状態確率は，同じ待ち行列網において客数ベクトルを $\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l$ としたときの定常状態確率に等しい，という性質[9),11)]（到着定理）を用いて次の関係を得る．

$$S_{il}(\boldsymbol{K})=\tau_i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{\mu(j)}P(|\boldsymbol{n}_i|=j-1\,;\,\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l) \tag{22}$$

ただし，$\tau_i=1/\mu_i^0$ とする．

$P(|\boldsymbol{n}_i|=j\,;\,\boldsymbol{K})$ は，$\sum_{|\boldsymbol{n}|=j}=\sum_{k=0}^{\min(j,|\boldsymbol{K}|)}\sum_{|\boldsymbol{x}|=k}$ に注意して(6)，(7)式を整理することにより次のごとくになる．

$$P(|\boldsymbol{n}_i|=j\,;\,\boldsymbol{K})=\sum_{k=0}^{\min(j,|\boldsymbol{K}|)}\sum_{|\boldsymbol{x}|=k}a_i(j)\frac{[k+1]_{j-k}}{(j-k)!}\cdot\frac{|\boldsymbol{x}|!}{\boldsymbol{x}!}\cdot\rho_{i0}^{j-k}\cdot\boldsymbol{\rho}_i^{\boldsymbol{x}}g^{[i]}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{K}) \tag{23}$$

(22)，(23)より以下の関係を得る．ただし，記法の簡略化のため前節にならい添字 i を省略する．

$$S_l(\boldsymbol{K})=\tau\sum_{k=0}^{|\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l|}\sum_{|\boldsymbol{x}|=k}w(k,\rho_0)\frac{|\boldsymbol{x}|!}{\boldsymbol{x}!}\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{x}}\cdot g^{[i]}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l-\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{K}) \tag{24}$$

ここに，$w(k,\rho_0)$ は次式で与えられる．

$$w(k,\rho_0)=\sum_{l=0}^{\infty}a(k+l)\frac{l+k+1}{\mu(l+k+1)}\cdot\frac{[k+1]_l}{l!}\rho_0^l \tag{25}$$

いま，$h(\boldsymbol{x})=w(|\boldsymbol{x}|,\rho_0)r(\boldsymbol{x})$ とおけば，(24)式は $S_l(\boldsymbol{K})$ は h と $g^{[i]}$ のたたみこみとして計算できることを示している．

すなわち次式が成り立つ．

$$S_l(\boldsymbol{K})=\tau\{(h*g^{[i]})(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l)\}/g(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l) \tag{26}$$

したがって，平均滞在時間 $S_l(\boldsymbol{K})$ は(26)式を基礎に，［アルゴリズム M］に類似した方法によって計算することができる．以下にその計算アルゴリズムを導く．

表 5　$w(k,\rho_0)$ および $n(k,\rho_0)$ の形

Table 5 Formulation of $w(k,\rho_0)$ and $n(k,\rho_0)$.

サービス率		$w(k,\rho_0)$	$n(k,\rho_0)$
固定サービス率		$(k+1)/(1-\rho_0)^{k+2}$	$(k+1)/k(1-\rho_0)$
半可変サービス率	$k\le m-2$	$(k+1)m^m/(m-1)!\,(m-\rho_0)^{k+2}+\sum_{l=0}^{m-k-2}\left\{\frac{1}{k!}-\frac{[k+2]_{l+1}}{(m-1)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{l+k+2-m}\right\}\frac{\rho_0{}^l}{l!}$	$w(k,\rho_0)/w(k-1,\rho_0)$
	$m-1\le k$	$(k+1)m^m/(m-1)!(m-\rho_0)^{k+2}$	$(k+1)/k(m-\rho_0)$

前節と同様の議論により，$h(\boldsymbol{x})$ は次のようになる．

$$h(\boldsymbol{x})=n(|\boldsymbol{x}|,\rho_0)\sum_{l=1}^{L}\rho_l h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_l) \tag{27}$$

ここに，$n(k,\rho_0)=w(k,\rho_0)/w(k-1,\rho_0)$ とする．

$w(k,\rho_0)$ および $n(k,\rho_0)$ は**表 5**に示されるような形になる．

以下に平均滞在時間の計算方法を［アルゴリズム L］として示す．センタ i の平均滞在時間を計算するためには i-complement システムの正規化定数 $g^{[i]}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l$ が準備されていなければならない．$g^{[i]}(\boldsymbol{x})$ は記憶領域 $g^{[i]}$ 上に格納されているものとする．さらに作業用に $\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l$ で定義された L 次元の記憶領域 $h(\boldsymbol{x})$ と，結果の格納用の変数 S_l を用意しておく．

$\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l$ 以外では記憶領域 h は，$h(\boldsymbol{x})=0$ であるものとする．

［アルゴリズム L］

$h(\boldsymbol{0})\leftarrow 1$,　$S_l\leftarrow 0$

L_1
- For $k=0$ to $|\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l|$
  - For $\boldsymbol{x}$; $|\boldsymbol{x}|=k$
    - $h(\boldsymbol{x})\leftarrow n(k,\rho_0)\sum_{l=1}^{L}\rho_0 h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_l)$
  - next $\boldsymbol{x}$
- next k

L_2
- For $k=0$ to $|\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l|$
  - For $\boldsymbol{x}$; $|\boldsymbol{x}|=k$
    - $S_l\leftarrow S_l+h(\boldsymbol{x})\cdot g^{[i]}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l-\boldsymbol{x})$
  - next $\boldsymbol{x}$
- next k

L_3　　$S_l\leftarrow\tau_l S_l/g(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l)$

L_1 の部分で記憶領域 h 上に(27)式で示される係数 $h(\boldsymbol{x})$ を作り出し，L_2 の部分で i-complement システ

ムの正規化定数とのたたみこみをおこなう．L_2 の終了時点で S_l 上に $(h*g^{[l]})(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{e}_l)$ の値が実現される．L_3 で必要な正規化をおこなって平均滞在時間 S_l を得る．

平均滞在時間 $S_{il}(\boldsymbol{K})$ が得られれば，平均待ち時間は，$w_{il}(\boldsymbol{K})=S_{il}(\boldsymbol{K})-\tau_l$，として求まる．

開放型の部分連鎖に属する客のサービスセンタ i における平均滞在時間 $S_{i0}(\boldsymbol{K})$ に関しては (22) 式に対応して次式が成り立つ．

$$S_{i0}(\boldsymbol{K})=\tau_i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{\mu_i(j)} P(|\boldsymbol{n}_i|=j-1\,;\,\boldsymbol{K}) \qquad (28)$$

(28) 式を基礎に同様の議論により，［アルゴリズム L］の若干の修正により $S_{i0}(\boldsymbol{K})$ が得られることは明らか．

6. むすび

本稿では広い範囲の混合型待ち行列網に有効なたたみこみ型の計算アルゴリズムについて述べた．

本稿で示した計算アルゴリズムは計算機システムの性能評価用ソフトウェア・パッケージ QM-X[12] の数値計算部分をになう計算エンジンとしてすでに実現され実用に供されている．

本稿では積形式解をもつ待ち行列網を扱ったが，待ち行列網モデルを計算機システムのモデルとしてさらに広い応用範囲をもつように発展させるためには積形式解をもたない各種の待ち行列網に関する近似解法の研究およびその計算方法の開発，さらには大規模な網に関する高速で安定な計算方法の開発等が重要であり，これらは今後の課題として残されている．

謝辞 待ち行列網理論に関する数々の貴重な助言をいただいた，防衛大学校川島武先生，筑波大学逆瀬川浩孝先生，工学院大学山崎源治先生に感謝いたします．また，日頃ご指導いただく当社 C&C システム研究所，三上徹所長代理，同応用システム研究所，竹谷誠研究課長に感謝いたします．

参考文献

1) Jackson, J. R.: Jobshop-like Queueing Systems, *Manage. Sci.*, Vol. 10, No. 1, pp. 131-142 (1963).
2) Gordon, W. J. and Newell, G. F.: Closed Queueing Systems with Exponential Servers, *Oper. Res.*, Vol. 15, No. 2, pp. 254-265 (1967).
3) Buzen, J. P.: Computational Algorithm for Closed Queueing Networks with Exponential Servers, *Comm. ACM*, Vol. 16, No. 9, pp. 527-531 (1973).
4) Baskett, F., Chandy, K. M., Muntz, R. R. and Palacios, J.: Open, Closed, and Mixed Networks with Different Classes of Customers, *J. ACM*, Vol. 22, No. 2, pp. 248-260 (1975).
5) Reiser, M. and Kobayashi, H.: Queueing Networks with Multiple Closed Chains: Theory and Computational Algorithms, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 19, No. 3, pp. 283-294 (1975).
6) Reiser, M.: Numerical Methods in Separable Queueing Networks, *TIMS Studies in Manage. Sci.*, Vol. 7, pp. 113-142 (1977).
7) Chandy, K. M. and Sauer, C. H.: Computational Algorithms for Product Form Queueing Networks, *Comm. ACM*, Vol. 23, No. 10, pp. 573-583 (1980).
8) Zahorjan, J.: The Solution of Separable Queueing Networks Models Using Mean Value Analysis, *Proc. ACM-Sigmetrics*, Vol. 10, No. 3, pp. 80-85 (1981).
9) Reiser, M. and Lavenberg, S. S.: Mean Value Analysis of Closed Multichain Queueing Networks, *J. ACM*, Vol. 22, No. 2, pp. 313-322 (1980).
10) Cox, D. R.: A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastics Processes, Proc. Cambridge Phil. Soc., 51, pp. 313-319 (1955).
11) Reiser, M.: Mean-value Analysis and Computational Method for Queue-dependent Servers in Closed Queueing Networks, *Perf. Eval.*, Vol. 1, No. 1, pp. 7-18 (1981).
12) 紀，守田，小林：BCMP 型待ち行列網による性能評価ツール QM-X，情報処理学会第 24 回全国大会，pp. 271-272 (1982).

付録 1 使用記号の一覧表

N：サービスセンタの数

R：網内のサービスクラスの集合

S：サービスクラスの総数（R の要素数）

R_i：センタ i に属するクラスの集合

C_l：部分連鎖 l に属するクラスの集合

K_l：閉鎖型部分連鎖 l に属する客数

λ_l：開放型部分連鎖 l に属する客の到着率

q_r：網外からの到着客がクラス r に入る確率

$\hat{\mu}_r$：クラス r の客の平均サービス要求時間の逆数

θ_r：クラス r への客の訪問回数（またはその相対値）

$\hat{\mu}_i(j)$：センタ i に客が j 人存在するときのサービス能力

M：部分連鎖の総数

L：閉鎖型部分連鎖の数

μ_i^0：タイプ1のセンタに属するクラスに入った客の平均サービス要求時間の逆数

c_i：センタ i の単位サービス能力，$c_i=\hat{\mu}_i(1)$

e_r：クラス r の負荷量，$e_r=\{\theta_r/\mu_r,\ r\in\bigcup_{l=1}^{L}C_l;\ \lambda_l\theta_r/\mu_r,\ r\in\bigcup_{l=L+1}^{M}C_l\}$

$\boldsymbol{e}_i$：センタ i の負荷ベクトル，$\boldsymbol{e}_i=(e_r),\ r\in R_i$

μ_r：$\mu_r=\hat{\mu}_r C_i,\ \ r\in R_i$

$\mu_i(j)$：$\mu_i(j)=\hat{\mu}_i(j)/\mu_i^0$

$a_i(k)$：センタ i に関する容量係数，$a_i(k)=\{1,\ k=0;\ 1/\prod_{j=1}^{k}\mu_i(j),\ 1\le k\}$

k_r：クラス r の状態にある客数

$\boldsymbol{k}_i$：センタ i に関する客数ベクトル，$\boldsymbol{k}_i=(k_r),\ r\in R_i$

$\boldsymbol{k}$：$\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_N)$

S_{il}：$S_{il}=R_i\cap C_l$

S_{i0}：$S_{i0}=\bigcup_{l=L+1}^{M}S_{il}$

n_{il}：センタ i に存在する部分連鎖 l に属する客数，$n_{il}=\sum_{r\in S_{il}}k_r$

ρ_{il}：同上，負荷量，$\rho_{il}=\sum_{r\in S_{il}}e_r$

n_{i0}：センタ i に存在する開放型部分連鎖に属する客の総数，$n_{i0}=\sum_{l=L+1}^{M}n_{il}$

ρ_{i0}：同上，負荷量，$\rho_{i0}=\sum_{l=L+1}^{M}\rho_{il}$

$\boldsymbol{n}_i$：センタ i に関する開放型を含んだ客数ベクトル，$\boldsymbol{n}_i=(n_{i0},n_{i1},\cdots,n_{iL})$

$\boldsymbol{r}_i$：同上，負荷ベクトル，$\boldsymbol{r}_i=(\rho_{i0},\rho_{i1},\cdots,\rho_{iL})$

$\boldsymbol{x}_i$：センタ i に関する閉鎖型に属する客のみからなる客数ベクトル，$\boldsymbol{x}_i=(n_{i1},n_{i2},\cdots,n_{iL})$

$\boldsymbol{\rho}_i$：同上，負荷ベクトル，$\boldsymbol{\rho}_i=(\rho_{i1},\rho_{i2},\cdots,\rho_{iL})$

$\boldsymbol{n}$：$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\cdots+\boldsymbol{n}_N$

$\boldsymbol{x}$：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_N$

$\boldsymbol{K}$：$\boldsymbol{K}=(K_1,K_2,\cdots,K_L)$

(昭和57年8月12日受付)
(昭和57年11月8日採録)