IT-06

~~17-06~~

曲った空間上のモンテカルロ・シミュレーションに基づく陰関数曲面のサンプリングと応用

田中 覚 * 森崎 暁夫 *
中田 聡 * 福田 康 † 中村智晴 *

* 福井大学工学部 † ビジュアルソフト

1 はじめに

近年のコンピュータ・グラフィックス技術の発達に伴い，より複雑な形状を正確かつ高速にコンピュータ上で可視化したいという要求が高まりつつある．この要求に応えるひとつの方法は，非線形方程式の形で定義された「陰関数曲面」の利用である．陰関数曲面は，形状的にも位相幾何学的にも複雑・多様な曲面を，簡潔かつ正確に表現できる．また，衝突の判定や集合演算なども容易に行える．

陰関数曲面をコンピュータ上で可視化するには，これを定義する方程式を数値的に解き，その解を用いて，曲面上に多数のサンプル点を（1）高速に，かつ（2）一様に生成する必要がある．この目的のために、本論文では，曲った空間上の確率過程を用いたサンプリング手法を提案し，そのいくつかの適用例と応用例を紹介する．

2 曲った空間上の確率過程

座標変数 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_d)$ で張られる d 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^d$ の中で，拘束条件

$$F(\mathbf{q}) = 0 \ , \tag{1}$$

を満たす点の集合として定義される陰関数曲面を考える．ここで，$F(\mathbf{q})$ は $\mathbf{q}$ のスカラー関数とする．

式 (1) で定義される陰関数曲面上に閉じ込められた確率過程を定義しよう．まず，仮想的な時間変数 t を導入する．次に，ブラウン運動する仮想粒子の位置ベクトル $\mathbf{q}$ の，t に対する発展を記述するものとして，以下のような確率微分方程式を立て，その解として確率過程を定義する．

$$dq_i(t) = dq_i^{(\mathrm{T})}(t) + dq_i^{(\mathrm{S})}(t) + dq_i^{(\mathrm{N})}(t) \ . \tag{2}$$

ここで，右辺の各項は，それぞれ次式で与えられる．

$$dq_i^{(\mathrm{T})} \equiv \sum_{j=1}^{d} P_{ij} dw_j \tag{3}$$

(接平面方向の変位項)，

$$dq_i^{(\mathrm{S})} \equiv -\frac{D}{|\nabla F|^2}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right) \mathrm{Tr}\left\{(\partial^2 F)\cdot P\right\} dt$$

(確率過程的補正項)， (4)

$$dq_i^{(\mathrm{N})} \equiv -KD\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\frac{F}{|\nabla F|^2} dt \tag{5}$$

(法線方向の引力項)．

ここで，D(拡散定数) と K(拘束力の強さ) は正の定数である．$dw_i(t)$ は，以下のような統計的性質を持つガウス型白色雑音である：$< dw_i(t) >= 0$, $< dw_i(t) dw_j(t) >= 2D\delta_{ij} dt$. また，$P_{ij}$ は陰関数曲面上のランダム変移を実現する射影演算子行列であり，次式で定義される．

$$P_{ij}(\mathbf{q}) \equiv \delta_{ij} - \frac{1}{|\nabla F(\mathbf{q})|^2}\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial q_j} \ . \tag{6}$$

確率過程的補正項 (4) は $F(\mathbf{q})$ の2階微分を含み，これにより，確率過程に曲率の効果が取り入れられる．この効果により，定常状態での確率分布測度に関して，以下のことが成立する: **「陰関数曲面上の任意の微小領域において，確率微分方程式 (2) の解の出現確率は，その微小領域の面積に比例する.」** すなわち，確率微分方程式 (2) の解は，定常状態に

Sampling implicit surfaces based on Monte Carlo simulation on curved spaces and its application
Satoshi Tanaka*, Akio Morisaki*, Satoru Nakata*, Yasushi Fukuda, and Tomoharu Nakamura*,
*Faculty of Engineering, Fukui University, †Visualsoft

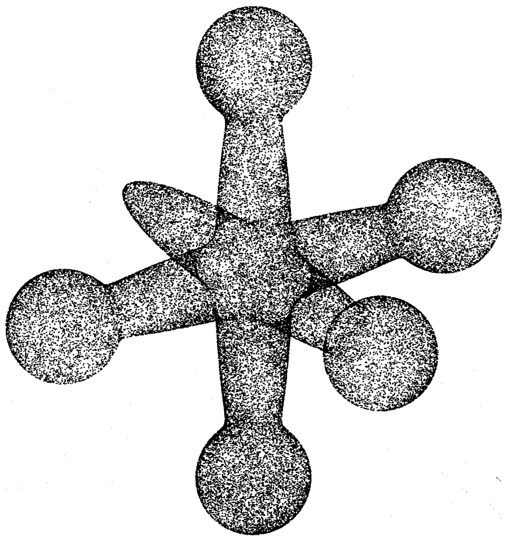

図 1: 複雑な凹凸のある曲面のサンプリング例

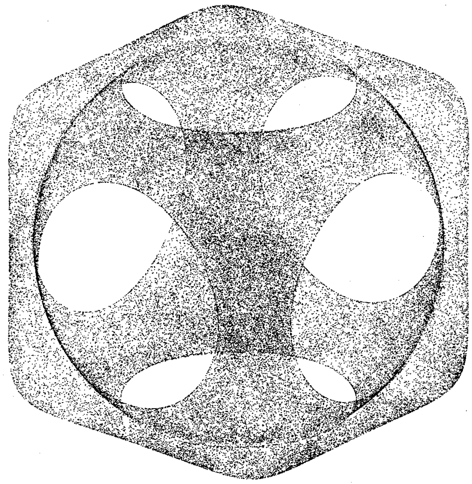

図 2: 多数の穴がある曲面のサンプリング例

おいて，陰関数曲面上において一様に分布する．このことが数学的に保証されるのである．

3 サンプリング・アルゴリズムと適用例

陰関数曲面上のサンプル点を求める我々の手法は，確率微分方程式 (2) を数値的に解き，その解，すなわち確率過程の軌跡を集めてサンプル点とするというものである．言い換えれば，確率微分方程式 (2) に基づく，曲がった空間上のモンテカルロ・シミュレーションに基づくサンプリング法である．なお，差分化の影響による拘束面からのわずかな飛び出しは，Newton 法などで補正する．

図 1 は，多数のメタボールからなる複雑な凹凸を持つ陰関数曲面のサンプリング例である (5 万点)．また，図 2 は多数の穴を持つ位相幾何学的に複雑な陰関数曲面のサンプリング例である (6 万点)．どちらの場合も，複雑な陰関数曲面上で一様なサンプリングが行われていることがわかる．

また，サンプリング速度は PentiumII 333 MHz の PC でおよそ 0.2 秒/1 万点であった．これは，対話的なモデリングにも充分耐え得る速度である．

4 おわりに

本論文では，確率過程に基づく陰関数曲面のサンプリング手法を提案した．得られるサンプル点は，陰関数曲面上で一様に分布することが，数学的に保証される．また，我々のサンプリング手法は，非常に高速である．しかも，粒子の拡散が陽に導入されるランダム変数によって実現されるため，従来の Newton 力学的な方法と異なり，粒子間相互作用の計算は不要である．このため，計算時間は軌跡の長さ，すなわちサンプル点数に比例して増大するにすぎない．このため，我々の手法は，数千点から 1 万点程度以上のサンプル点の生成に適している．

我々のサンプリング手法は，高速レンダリングや変形する曲面のアニメーションの作成にも有効と思われる．