3V-02 アメリカンプットオプション価格の離散近似

新村 昌寛
神戸大学総合人間科学研究科

豊田 壮一
神戸大学総合人間科学研究科

竹内　康滋
大阪産業大学

1. はじめに

現時点から将来までの所定期間の任意の時点において所定の資産を、所定の価格である権利行使価格で売る権利をアメリカンプットオプションという。アメリカンプットオプションの売買価格を解析的に求める方法はまだ確立していない。そこでアメリカンプットオプション価格の近似値を求める1つの方法を提案する。なお、近似値を求める方法はすでにいくつか提案されている。そのうちの1つは後述する。

2. アメリカンプットオプションの価格

十分大きな正整数を n とする。株価の自然対数 P は短い時間 $1/n$ の間に、確率 $1/2$ で ΔP だけ上昇するか、$-\Delta P$ だけ下落するとする。ここで、$\Delta P = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であり、σ はボラテイリテイである。すなわち、株価の自然対数はウイナー過程に従う。0 期から T 期までの株価変化の平均は 0 で、分散は $\sigma^2 T$ となる。

時刻 t における株価を $S(t)$ とする。アメリカンプットオプションの満期時刻を T とする。充分大きな正整数 n に対して、$\delta = 1/n$ とおく。任意の整数 k $(0 \leq k \leq nT)$ に対して、$\delta_k = k\delta$ とおく。株価 $S(\delta_k)$ は、確率 $1/2$ で $S(\delta_k) = S(\delta_{k-1})\exp(\sigma\sqrt{\delta})$ となるか、確率 $1/2$ で $S(\delta_k) = S(\delta_{k-1})\exp(-\sigma\sqrt{\delta})$ となる。

このときのキャッシュフローを $X(\delta_k, S(\delta_k))$ とする。すなわち、行使価格を K とすると、

$$X(\delta_k, S(\delta_k)) = \begin{cases} K - S(\delta_k) & (S(\delta_k) < K) \\ 0 & (S(\delta_k) \geq K) \end{cases}$$

である。

時刻 0 のときの株価を S とすれば、時刻 δ_k の株価は

$$Sx_1x_2 \ldots x_k, \qquad ただし、x_i = \exp(\sigma\sqrt{\delta}) \quad または \quad \exp(-\sigma\sqrt{\delta})$$

となる。この株価を $S(x_1, \ldots, x_k)$ で表す。この株価が生じる確率は $(1/2)^k$ である。

時刻 δ_k に対して、ベクトルの集合 $\{(x_1, \ldots, x_k) | x_i = \exp(\sigma\sqrt{\delta}) \quad または \quad \exp(-\sigma\sqrt{\delta}) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\}$ を Ω_k とする。いま、Ω_k から実数の全体集合 $\mathbf{R}$ への写像 Q を

$$Q((x_1, \ldots, x_k)) = (1/2)^k$$

と定義する。このとき、Q は Ω_k 上の確率である。

時刻 δ_k において、株価が $S(x_1, \ldots, x_k)$ となる確率は $Q((x_1, \ldots, x_k))$ である。無リスク利子率 r で割り引いた将来キャッシュフロー $e^{-r\delta_k}X(\delta_k, S(\delta_k))$ に対する期待値は

$$\sum_{\mathbf{x} \in \Omega_k} e^{-rk/n} X(\delta_k, S(\mathbf{x})) Q(\mathbf{x})$$

---

* On a Discrete-Time Approximation Valuation of American Put Options
by Masahiro Shinmura, Souichi Toyoda and Yasuji Takeuchi
Graduate School of Cultural Studies and Human Science, Kobe University and Osaka Sangyo University

である。したがって、次式の値をアメリカンプットオプションの現在価格の近似値と考えることができる。

$$\sup_{0\leq k\leq n}\sum_{\mathbf{x}\in\Omega_k} e^{-rk/n}X(\delta_k, S(\mathbf{x}))Q(\mathbf{x})$$

3．2項モデルによる近似法との比較

無裁定価格評価法を用いてアメリカンプットオプション価格の近似値を求める方法がある。記号T,K,r,σ,δ_k,nは上記のものとする。時刻δ_kにおけるアメリカンプットオプション価格を$P(\delta_k, S(\delta_k))$とすると次式が成り立つことが知られている。

$$\begin{aligned}
P(T,S(T)) &= X(T,S(t)) \\
P(\delta_k,S(\delta_k) &= \max[X(\delta_k,S(\delta_k)),\exp(-r/n)(qP(\delta_{k+1},S(\delta_k)\exp(\sigma\sqrt{\delta})) \\
&\quad +(1-q)P(\delta_{k+1},S(\delta_k)\exp(-\sigma\sqrt{\delta})))]
\end{aligned}$$

ただし、$q=\dfrac{\exp(r/n)-\exp(-\sigma\sqrt{\delta})}{\exp(\sigma\sqrt{\delta})-\exp(-\sigma\sqrt{\delta})}$ である。

これらの式を用いて再帰的に時刻0のアメリカンプットオプション価格の近似値$P(0,S(0))$が求まる。

ところで、次の式が成り立つことは容易に解る。

$$\lim_{n\to\infty} q = 1/2,\ \text{したがって、}\lim_{n\to\infty}(1-q) = 1/2$$

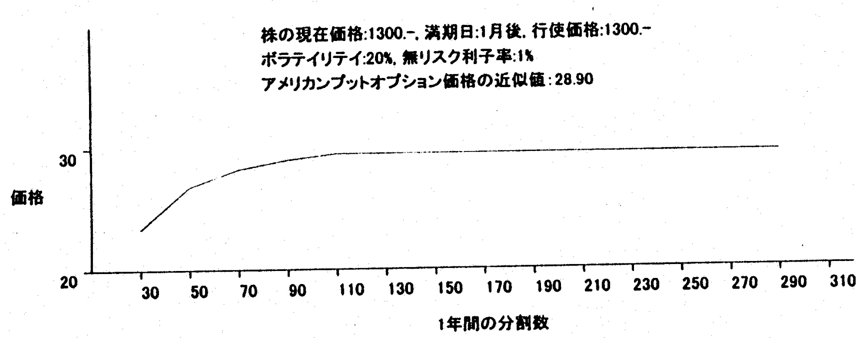
$$\lim_{n\to\infty}\exp(-r/n)[qX(\delta_{k+1},S(\delta_k)\exp(\sigma\sqrt{\delta}))+(1-q)X(\delta_{k+1},S(\delta_k)\exp(-\sigma\sqrt{\delta}))] = X(\delta_k,S(\delta_k))$$

以上の議論から、われわれの近似値と無裁定評価法による近似値とは近い値をとることが分かる。

4．計算例

株の現在価格Sを1300円、満期日Tは1ヶ月後、行使価格Kは1300円、ボラテイリテイσは20%、無リスク利子率rは1%とする。1年間をn分割し、われわれの方式によって、アメリカンプットオプション価格の近似値を求めると次のグラフのようになる。

アメリカンプットオプション価格



《参考文献》

1. 岩城秀樹；デリバテイブ-理論と応用-, 朝倉書店, 1998

2. D.Duffie ; Dynamic Asset Pricing Theory, Priceton University Press,1996