

6F-01 A. Waksman の一斉射撃アルゴリズムにおける 遷移規則の検証並びに最適化について

曾我部 崇[†]

野村 行宏[†]

梅尾 博司^{††}

[†]大阪電気通信大学 大学院 情報工学専攻

^{††}大阪電気通信大学 情報工学部 情報工学科

概要

1966年, A.Waksman は n 個のセルからなる 1 次元セル空間の同期 (synchronization, セル・オートマトン上では同期化を一斉射撃 (firing squad synchronization) と呼ぶ) を $2n-2$ ステップで実現する 16 状態のセル・アルゴリズムを世界で最初に考案した。しかしながら, 研究者の間では Waksman アルゴリズムの遷移規則にはいくつかの誤りがあることが指摘されていた。本稿では, 我々が開発した汎用セル・アルゴリズム・シミュレータを用いて Waksman の遷移規則の検証を行い, そこに含まれていた誤りを訂正するとともに完全な遷移規則とそれに基づいた一斉射撃アルゴリズムの動作状況のシミュレーション結果を示す。Waksman のアルゴリズムは 3208 個の遷移規則から構成されていたが, 我々が訂正したアルゴリズムは 202 個の遷移規則からなり, 結果として内部状態数は 16 のまま, 規則数において実に全体の 7% に縮小された。セル数 $2 \sim 10000$ のセル空間の最適時間一斉射撃において, 202 個の遷移規則が正しく動作することを示し, さらに提案した 202 個の遷移規則集合が任意の n について, 正当であることを示すと同時に, これらの規則が必要にして十分な規則集合であることが明らかにする。

1 はじめに

一斉射撃問題 (firing squad synchronization problem, FSSP と略す) とは, 時刻 $t = 0$ 時に左端に位置する将軍セルから発せられた「準備できたら, 射撃せよ!」という命令を兵士セルが受け取った後, 未来のある時刻にすべてのセルが一斉に同一の射撃状態になれるように, セルの遷移規則を決定する問題である。隣接セル間の局所的な通信のみで, すべてのセルを同時に同一状態に導く (この時, 同期を実現したと言う) グローバルな制御をいかにして実現するかという点が研究者の大いなる興味を引き, これまでに数多くのアルゴリズムが提案されている [1]~[4]。

A. Waksman [1] は, n 個のセルからなるセル空間を $2n-2$ ステップで一斉に射撃する 16 状態のアルゴリズムを開発した。これは, その詳細が論文として発表されなかった後藤 [2] のアルゴリズムと並び世界で最初に考案された最適時間一斉射撃アルゴリズムとして知られている。しかしながら, 研究者の間ではこれまでに Waksman のアルゴリズムの遷移規則にはいくつかの誤りがあることも同時に指摘されていた。

本稿では, 我々がパーソナルコンピュータ上に開発した汎用セルアルゴリズム・シミュレータを用いて, A. Waksman の遷移規則の検証を行ない, 同遷移規則の誤りを訂正するとともに, 完全な遷移規則リストとそれに基づいた一斉射撃アルゴリズムの動作状況のシミュレーション結果を示す。

また, Waksman のアルゴリズムは 3208 個の遷移規則から構成されていたが, 我々が訂正したアルゴリズムは 202 個の遷移規則からなり, 結果として内部状態数は 16 のまま, 規則数において実に全体の 7% に縮小された。セル数 $2 \sim 10000$ のセル空間の最適時間一斉射撃において, 202 個の遷移規則が正しく動作することを示し, さらに提案した 202 個の遷移規則集合が任意の n について, 正当であることを示すと同時に, 必要にして十分な規則集合であることを明らかにする。

2 Waksman の遷移規則

Waksman の一斉射撃アルゴリズムでは, 各セルは次の 16 個の内部状態からなる状態集合 D を持つ。すなわち,

$$D = \{Q, T, P_0, P_1, B_0, B_1, R_0, R_1, A_{000}, A_{001}, A_{010}, A_{011}, A_{100}, A_{101}, A_{110}, A_{111}\}$$

Q は静止状態, T は射撃状態, P_0, P_1 は射撃準備状態, B_0, B_1 は波状態, R_0, R_1 はトリガー状態, $A_{ijk}, i, j, k \in \{0, 1\}$ は状態 R_0, R_1, P_0, P_1 を生成するための制御状態を意味する。

表 1 は, 文献 [1] に示される Waksman の遷移規則表を状態の組み合わせに基づく遷移規則として展開したもので, 3208 個の規則よりなる。

表 1 Waksman が提案した 3208 個の遷移規則

No.	C_{i-1}	Current State of C_i		C_{i+1}	Next State of C_i	
1	Q	#	Q	#	Q	→ Q
2	Q	#	Q	#	B_0	→ Q
3	Q	#	Q	#	B_1	→ Q
...
3206	A_{111}	#	A_{111}	#	A_{011}	→ Q
3207	A_{111}	#	A_{111}	#	A_{110}	→ Q
3208	A_{111}	#	A_{111}	#	A_{111}	→ Q

表 1 に示した遷移規則に基づきシミュレーションを実行した結果, 正しい一斉射撃の計算状況に至るケースは, セル数 $n = 2 \sim 1000$ の間で $n = 3, 5, 6$ の場合のみであることが判明した。

表 2 修正した遷移規則

●変更した遷移規則						
No.	C_{i-1}	Current State of C_i		C_{i+1}	Next State of C_i	
23	B_0	#	Q	#	P_1	→ A_{100}
37	B_1	#	Q	#	P_0	→ A_{000}
70	P_0	#	Q	#	B_1	→ A_{010}
72	P_0	#	Q	#	R_1	→ A_{010}
78	P_1	#	Q	#	B_0	→ A_{110}
●追加した遷移規則						
No.	C_{i-1}	Current State of C_i		C_{i+1}	Next State of C_i	
76	P_0	#	Q	#	www	→ P_1
102	A_{010}	#	Q	#	R_1	→ A_{011}
107	A_{011}	#	Q	#	R_1	→ A_{010}
183	R_1	#	B_0	#	P_0	→ R_1
184	R_1	#	B_0	#	P_1	→ R_1
199	P_0	#	B_0	#	A_{100}	→ P_1
211	P_1	#	B_0	#	A_{100}	→ P_1
296	A_{110}	#	B_0	#	P_0	→ P_1
297	A_{110}	#	B_0	#	P_1	→ P_1

Correction, Optimization and Verification of Transition Rule Set for Waksman's Firing Squad Synchronization Algorithm
Takashi SOGABE[†], Yukihiko NOMURA[†], Hiroshi UMEO^{††}
[†]Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering
^{††}Osaka Electro-Communication Univ., Faculty of Information Science and Technology

3 遷移規則の修正と削減

そこで我々は表1の遷移規則を表2のように訂正した。

Waksmanの遷移規則では、いくつかの状態の組み合わせに対しA信号の伝播が途中で途絶え、再帰的な並列2分割が行えなかった。表2ではこれらの状態の組み合わせを適正なものに修正(No.23~No.78)し、それに伴う新しい遷移規則(No.102~No.297)を追加した。No.76の規則はセル数 $n=2$ の時に一斉射撃を行なうための修正であり、 $n=2$ の場合にのみ使用される。

以上の修正を加えると、3217個の遷移規則からなる一斉射撃アルゴリズムとなり、セル数2~10000のセル空間に対して正しく最適時間一斉射撃が行われることが判明した。しかしながら、これらの3217個の規則の中には、全く使用されない規則も多数混ざっていることも同時に判り、遷移規則集合に統計的な処理を行うことにより、最終的に202個の遷移規則からなる表3が得られた。これらの202個の規則集合が、セル数2~10000のセル空間の最適時間一斉射撃において、必要にして十分な規則数であることがわかった。総規則数において実にオリジナルの約7%にまで縮小された。図1はシミュレーション結果の一例である。

表3 202個の遷移規則からなるWaksmanのアルゴリズム

No.	C_{i-1}	Current State of C_i		Next State of C_i	
1	Q	#	Q	#	Q
2	Q	#	Q	#	Q
3	Q	#	Q	#	Q
...
200	P_1	#	A_{110}	#	B_0
201	R_0	#	A_{111}	#	Q
202	R_0	#	A_{111}	#	P_0

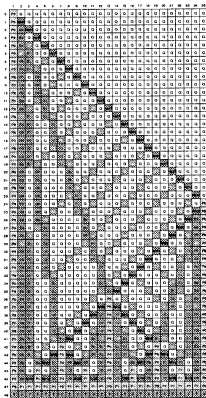


図1 セル数25の場合のシミュレーション結果

4 遷移規則集合の正当性

任意のセル数 n について、表3の規則集合が正しく一斉射撃を実行できることを、次のようにして示した。その概要を示す。

1. サイズ n のセル空間を一斉射撃する問題 P_n (左端を将軍とする)を、右端を将軍とする $P_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, P_{\lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor}, \dots, P_2$ なる $\lfloor \log_2(2n-2) \rfloor$ 個の独立した部分問題に分解し、これらの部分空間の一斉射撃問題に帰着させる。
2. 遷移規則集合をいくつかのクラスに分類し、上記の部分空間上での計算状況は、左端を将軍とする空間上での計算状況と鏡像関係にあることを示す。
3. 上記1. 2.に基づき、数学的帰納法により表3の規則集合の正当性を示す。

図2は、上記の部分空間を図示したものである。Waksmanのアルゴリズムでは、図2のように、時刻 $t=0$ における左端

の将軍セル G は右方向に進行するA波とB波を生成する。A波の傾きは $\frac{1}{1}$ 、B波の傾きは $\frac{1}{2^k-1}$ ($2 \leq k \leq \lfloor \log_2(n-1) \rfloor$)である。 $t=n-1$ 時にA波が右端に到着した時点で右端に G_1 が生成され、左方向に進行するA波とB波を生成する。

G_1 での反射A波とB波が交差することにより、将軍 G_2, G_3, \dots, G_k が生成され、これらの将軍が部分問題 $P_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, P_{\lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor}, \dots, P_2$ を解決し、同一時刻 $t=2n-2$ ステップ時に一斉射撃が生起する。

表4はセル数3~21に対する部分空間への分割を示している。“2-”, “2”, “2+”はサイズ2の部分空間をそれぞれ1, 2, 3ステップで一斉射撃する問題を示している。

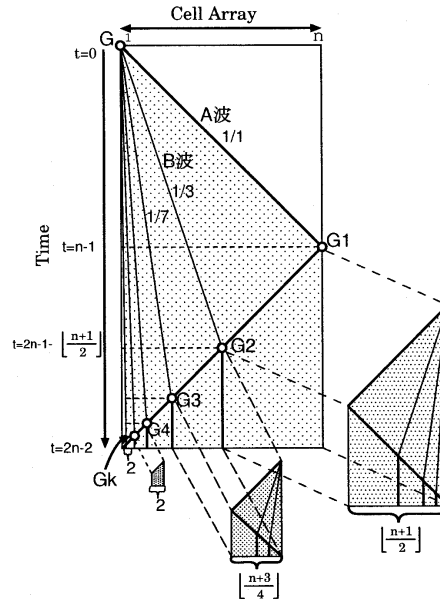


図2 Waksmanのアルゴリズムの同期機構

表4 セル数3から21までの部分空間の構成

セル数	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1
3				2-	2
4				2-	2+
5			2-	2	3
6			2-	2	3+
7			2-	2+	4
8			2-	2+	4+
9		2-	2	3	5
10		2-	2	3	5+
11		2-	2	3+	6
12		2-	2	3+	6+
13		2-	2+	4	7
14		2-	2+	4	7+
15		2-	2+	4+	8
16		2-	2+	4+	8+
17	2-	2	3	5	9
18	2-	2	3	5	9+
19	2-	2	3	5+	10
20	2-	2	3	5+	10+
21	2-	2	3+	6	11

参考文献

- [1] A. Waksman, "An optimum solution to the firing squad synchronization problem", Information and Control, 9, pp.66-78, (1966).
- [2] 後藤 英一, "一斉射撃の問題", 数理科学, 11 巻, 10 号, pp.42-46, (1973).
- [3] E. F. Moore, "The firing squad synchronization problem", Sequential Machines (E. F. Moore), Selected Papers, Addison-Wesley Reading, MA., pp.213-214, (1964).
- [4] J. Mazoyer, "On optimal solution to the firing squad synchronization problem", Theoretical Computer Science, pp.367-404, (1996).
- [5] 野村 行宏, 曾我部 崇, 梅尾 博司, "A. Waksman の一斉射撃アルゴリズムに関する一考察", 日本ソフトウェア科学会第16回全国大会論文集, pp.273-276, (1999).