

# 複数の加速係数を使用する連立一次方程式の SBOR 解法†

横 山 正 明††

連立一次方程式の反復解法の一つである SBOR 法においては加速係数はすべての行について同一であるのが一般的である。しかし、このように全行について同一の加速係数を使用するのではなく、優対角性の大きい行には大きめの加速係数を使用し、優対角性の小さい行には小さめの加速係数を使用するという具合に、複数の加速係数を用意して優対角性の大小に応じてそれらを適切に使いわけの方法を採用すれば、SBOR 法の収束速さを加速することができるかと予想できる。そこで本研究では、構造解析などの計算の効率向上を目標に、SBOR 法の収束加速の技法を探ろうとするもので、三次元骨組構造問題および立体平板構造問題を例にとりて、複数の加速係数を使用する SBOR 法により、従来の単一の加速係数を使用する SBOR 法の収束性をどの程度改善することができるかについて数値実験した。その結果、5~35% 収束性を改善することができることが明らかになった。

## 1. 緒 言

連立一次方程式の反復解法の一つである SBOR 法には定常的解法と非定常的解法がある<sup>1)</sup>が、いずれの解法においても加速係数はすべての行について同一であるのが一般的である。

しかし、このように全行について単一の加速係数を使用するのではなく、優対角性の大きい行には大きめの加速係数を使用し、優対角性の小さい行には小さめの加速係数を使用するという具合に、複数の加速係数を用意して優対角性の大小に応じてそれらを適切に使いわけの方法を採用すれば、SBOR 法の収束速さを加速することができるのではないかと予想できる。

本研究は、構造解析などの計算の効率化、計算の経済性向上を目標に、SBOR 法の収束加速の技法を探ろうとするもので、三次元骨組構造問題および立体平板構造問題を例にとりて、複数の加速係数を使用する SBOR 法により、従来の単一の加速係数を使用する定常的 SBOR 法の収束性をどの程度まで改善することができるかについて数値実験した結果について報告する。

従来において、前報<sup>2)</sup>を含めて SOR 法の場合に複数の加速係数を用意した例は 2, 3 ある<sup>3)-6)</sup>が、SBOR 法の場合に収束加速の観点から複数の加速係数を用意して、連立一次方程式の各行の優対角性の大小に応じてそれらを使いわけることの効果について論じた研究はまだ見当たらない。

なお、工業技術院の科学技術用高速計算システムのように数百の演算ユニットをもつマルチプロセッサシステムの計画、試作が最近行われているが、既報<sup>7)</sup>においてのべたように、このようなマルチプロセッサシステムによる SOR 法は必然的に SBOR 法にならざるをえない。それゆえに、マルチプロセッサシステムの利用技術の一つとして、SBOR 法の収束加速の技法を探することは意義のあることであると考えている。

## 2. 簡単な例題による解法の説明

最初に、簡単な例題によって解法の説明をする。例題として先端に集中荷重を荷重された無限小幅の片持ちはりのたわみ解析問題を考える。はりを 4 等分し、各点のたわみを先端から  $w_4, w_3, w_2, w_1$  とする。微分方程式  $d^4w/dx^4=0$  の 5 点差分を考え、根元において変位、傾きを 0 とすると次式のような 4 元連立一次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

上式を次式のように並べかえ、ブロック分割する。

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 7 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -4 & -2 \\ \hline -4 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これを従来からある単一の加速係数を用いる定常的な SBOR 法によって解析すると、表 1 のような加速係数と収束までの反復回数との関係が得られる。 $\omega=1.48$  において最少の反復回数 45 回で収束することがわかる。ちなみに、SOR 法の場合は  $\omega=1.685$  で 61

† Solution of Simultaneous Linear Equations by SBOR Method Using Plural Relaxation Factors by MASAOKI YOKOYAMA (Department of Precision Machinery and Systems, Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology).

†† 東京工業大学総合理工学研究所精密機械システム専攻

表 1 単一加速係数の SBOR 法の収束までの反復回数  
Table 1 Number of iterations in the case of SBOR with single relaxation factor.

$\omega$	1.000	1.200	1.400	1.450	1.475	1.480	1.485	1.500	1.550	1.575
NI	351	210	96	65	48	45	52	58	84	114

$\omega$ : relaxation factor, NI: number of iterations

表 2 複数加速係数の SBOR 法の収束までの反復回数  
Table 2 Number of iterations in the case of SBOR with plural relaxation factors.

$\omega_1$	2.000	1.990	1.980	2.000	2.000	1.960	1.980	1.990	2.000	1.975
$\omega_2$	1.600	1.600	1.600	1.600	1.700	1.500	1.500	1.500	1.500	1.480
$\omega_3$	1.475	1.475	1.475	1.475	1.475	1.475	1.475	1.475	1.475	1.485
$\omega_4$	1.400	1.400	1.400	1.425	1.400	1.470	1.470	1.470	1.470	1.460
NI	38	38	39	41	41	43	43	43	43	45

$\omega_1 \sim \omega_4$ : relaxation factors, NI: number of iterations

回である。収束条件は

$$\varepsilon = |W^{(k)} - W^{(k-1)}| / |W^{(k)}|$$

で定義される相対誤差  $\varepsilon$  を用い、全点において  $\varepsilon < 10^{-6}$  としている。計算は HITAC M 180 により倍精度で実行した。

係数行列の優対角性  $\alpha$  を各行ごとに

$\alpha = \text{対角要素の絶対値} / \text{対角外要素の絶対値の和}$  で定義する<sup>8)</sup> とき、前報においては、優対角性  $\alpha$  の大きい行には大きめの加速係数、小さい行には小さめの加速係数を使用する SOR 法を提案した。この方式を SBOR 法にも適用すると、次のような複数の加速係数を使用する定常的な SBOR 法を考えることができる。すなわち、

「優対角性  $\alpha$  の大きい行には大きめの加速係数、

小さい行には小さめの加速係数を使用して、

SBOR 法に基づいて逐次反復計算する方式」。

この方式に基づき、前述の 4 元連立一次方程式を用いて、加速係数と収束までの反復回数の関係について数値実験を行うと表 2 のような結果が得られる。この結果から、適切な加速係数を選択すると最適加速係数を使用する単一加速係数の SBOR 法よりも収束速さが速くなることがわかる。ちなみに、SOR 法の場合の最少の反復回数は 55 回である。また、単一加速係数の SBOR 法においては 2 以上の加速係数は絶対に使用できないが、複数加速係数の SBOR 法においては一部に 2 以上の加速係数を使用してもよいということもわかる。

表 2 に対応した数値実験においては、 $\omega_1$  から  $\omega_4$  までの 4 種類の加速係数を使用した。しかし、問題規模が大きくなると、この例のように全行別々の加速係数を使用するのはあまり実用的ではないと考えられる。

それゆえに、以下の数値実験においては、全行別々の加速係数を使用するのではなく、 $\alpha$  の大きさに応じて全行をいくつかのグループに分類し、それぞれに対応した加速係数を使用する方式を採用する。

### 3. 複数加速係数の SBOR 法の収束性

単一加速係数の SBOR 法の収束性から類推すれば複数加速係数の SBOR 法が収束することはほぼ明らかであり、証明する必要はないかもしれない。必要あらば、構造解析などによく用いられる有限要素法による係数行列の場合などのような正定値実対称行列の場合には以下のように証明できる。

行列方程式

$$Ax = b \quad (1)$$

において係数行列  $A$  を  $N \times N$  正定値実対称行列とする。行列  $A$ 、列ベクトル  $x$ 、 $b$  がブロック分割されて

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (2)$$

に書かれるとする。このような行列  $A$  の分割から、次の行列を定義する。

$$D = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & \\ & A_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & A_{NN} & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad E = - \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ A_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & & 0 \end{bmatrix},$$

$$E^T = - \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ & 0 & \cdots & A_{2N} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

このとき、 $A = D - E - E^T$  であり、 $D$  も正定値実対

称行列となる。

行列  $D$  は正則であるから、それぞれの対角小行列  $A_{ii}$  は正則であり、これに対応する SBOR 法を

$$A_{ii}x_i^{(r+1)} = Ax_{ii}x_i^{(r)} + \Omega_{ii} \left\{ -\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(r+1)} - \sum_{j=i+1}^N A_{ij}x_j^{(r)} + b_i - A_{ii}x_i^{(r)} \right\}, \nu \geq 0 \quad (3)$$

により定義できる。ここで、 $\Omega_{ii}$  は加速係数を対角要素とする対角行列  $\Omega$  の対角小行列である。この反復手順は

$$(D - \Omega E)x^{(r+1)} = \{\Omega E^T + (I - \Omega)D\}x^{(r)} + \Omega b, \nu \geq 0 \quad (4)$$

のように書くことができ、前報<sup>2)</sup>において報告した複数加速係数の SBOR 法の反復手順そのものになる。それゆえに、収束性の証明は SBOR 法の場合とまったく同様になるので、その詳細な過程は前報を参照していただきたい。

この結果から、複数加速係数の SBOR 法が収束するための十分条件は

$$s_0^T \Omega A s_0 > 0 \quad (5)$$

および

$$s_0^T (2I - D) D s_0 + s_0^T \Omega (E^T - E) s_0 > 0 \quad (6)$$

となる。この両式を満足する加速係数を選択すれば、複数加速係数の SBOR 法は収束する。単一加速係数の SBOR 法の場合にはこの両式は周知の  $0 < \omega < 2$  にまとめられる<sup>9)</sup>。

#### 4. 数値実験とその結果

##### 4.1 数値実験に使用する問題

複数の加速係数を使用する前報の SBOR 法の場合と同様に、複数加速係数の SBOR 法は種類の異なる物理量の連成する問題の解析において、その効果を発揮するものと考えられるので、数値実験に使用する問題もこのようなものを選んだ。前報と重複するが、簡単に説明したい。

図 1 および図 2 に本研究において数値実験に使用した問題を示す。立体骨組構造問題と立体平板構造問題であり、変位と回転角の 2 種類の物理量が連成する。物理変数は各節点につき、変位 3 成分、回転角 3 成分である。図 1 においては、 $x$  軸に平行な部材 (part) は円形断面、 $y$  軸および  $z$  軸に平行な部材は長方形断面を採用しており、長方形の 1 辺はこれに連結している 2 本の円形断面部材のうち太いほうの部材の直径に一致させている。ここでは残りの 1 辺を高さと呼称す

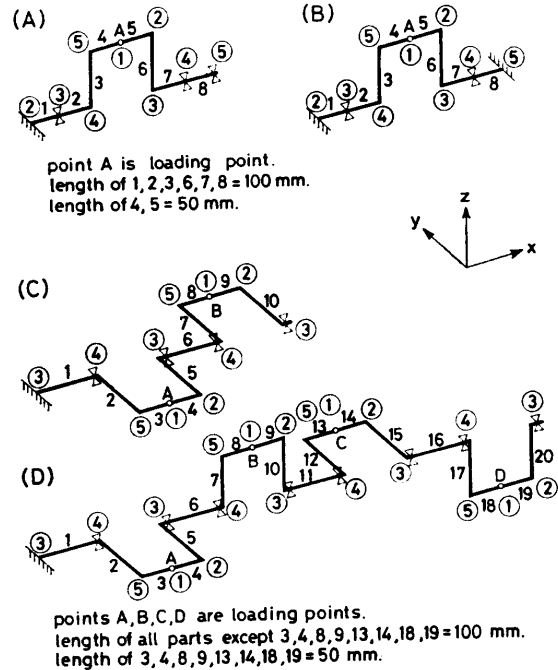
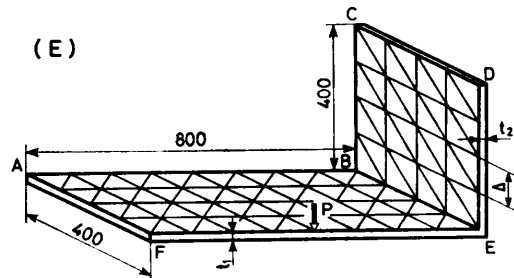


図 1 数値実験する問題

Fig. 1 Problems subjected to numerical experiments.



Edges  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  and  $\overline{FA}$  are fixed.

Concentrated loading  $P = 1$  kN.

Thicknesses of plates  $t_1$  and  $t_2$  are 2.5 or 10 mm.

Division unit  $\Delta$  is 50 or 100 mm.

Number of generated nodal points is 225 or 65.

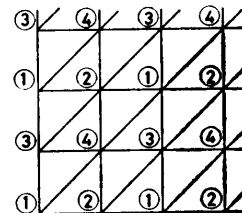


図 2 数値実験する問題

Fig. 2 Problem subjected to numerical experiments.

表 3 骨組構造における部材の直径および高さ  
Table 3 Diameters and heights of parts in frame structure.

Part	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	13.73	13.73	6.73	8.07	8.07	5.82	7.73	6.67		
B	10.62	10.59	5.49	8.32	8.32	5.42	10.50	10.50		
C	11.63	10.03	9.82	9.82	10.08	11.40	10.07	9.27	9.27	1.68
D	11.54	10.03	9.63	9.63	9.98	11.56	10.14	9.62	9.62	10.13
Part	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	11.55	10.08	9.62	9.62	10.14	11.55	9.88	9.38	9.38	1.48

表 4 単一加速係数の SBOR 法の収束までの反復回数  
Table 4 Number of iterations in the case of SBOR with single relaxation factor.

Problem	A		B		C		D	
$\omega_{opt}$	1.910	1.875	1.850	1.830	1.965	1.905	1.990	1.975
NI	110	108	99	92	98	85	171	126
NI <sub>sor</sub>	110	66	140	76	221	126	322	156

$\omega_{opt}$ : optimum relaxation factor, NI<sub>sor</sub>: number of iterations for SOR method

る。各部材の直径あるいは高さは、全部材 10 mm の場合と表 3 に示す数値の場合の 2 通りを採用した。表 3 の数値は別途に研究している立体骨組構造の最小重量設計の結果から得られたものである<sup>10)</sup>。荷重は骨組構造を同一方向にねじるように、図中の負荷点に 1 kN の集中荷重を  $y$  軸あるいは  $z$  軸に平行に負荷した。図 2 においては集中荷重は辺 EF の中点に負荷している。板厚、要素分割幅 (division unit)、収束条件をそれぞれ 2 段階に変化させ、それらを組み合わせて 8 種類の問題について数値実験した。

要素剛性マトリックスの作成は、骨組構造については変位法<sup>11)</sup>、平板構造については応力仮定のハイブリッド法<sup>12)</sup>によっている。

図 1 および図 2 において、各節点に与えられた円内の番号は、行列方程式のブロック分割の際にこの節点の未知物理変数がどのブロックに入るべきかを示す。各節点の未知物理変数が複数のときは各ブロックのなかがさらにその物理変数の数だけの小ブロックに分割され、各物理変数がそれぞれ同種類の変数の小ブロックに入る。このことをマルチプロセッサシステムによる数値計算の観点からのべると、同一番号の節点の物理変数は同一時刻に計算されることを示す。すなわち、たとえば図 2 の問題を例にとると、複数あるプロセッサのおおのにおに  $2 \times 2$  の 4 節点を割り当て、全プロセッサ同期をとって番号 1 から番号 4 までの節点の物理変数について SOR に基づき順次反復することを示す。このような計算方式を採用することにより、既

報<sup>7)</sup>において報告した「近傍の非同時性」が満足され、係数行列  $A$  が対角行列になる。この結果、前章の式(3)において  $A_{ii}$  が対角行列になり、逆行列  $A_{ii}^{-1}$  および行列の積  $A_{ii}^{-1} A_{ij}$  ( $i \neq j$ ) の計算を省略でき、数値計算の高速化に寄与するものと考えられる。

#### 4.2 数値実験結果

前節において説明した問題について複数の加速係数を用いる SBOR 法により単一の加速係数を用いる SBOR 法の収束性がどの程度改善できるかに関して数値実験した。計算は HITAC M 180 を用い、計算は単精度で実行した。収束条件は、最大変位および最大回転角について、前に定義したものと同様の相対誤差  $\varepsilon$  を用い、 $\varepsilon < 10^{-4}$  としている。なお、立体平板構造問題については  $\varepsilon < 10^{-5}$  の場合の実験も行った。

まず、立体骨組構造問題に関する結果について説明する。表 4 に単一加速係数の SBOR 法による場合の最適加速係数と収束までの反復回数の関係を示す。参考のために SOR 法による場合の結果も示す。各問題において、左側の数値は全部材 10 mm の場合、右側の数値は表 3 の寸法を用いた場合の結果を示す。表 5 に三つの加速係数を用いる SBOR 法による場合の加速係数と収束までの反復回数および収束性改善の大きさの関係を示す。同じく参考のために SOR 法による場合の反復回数も示す。試行錯誤による多くの実験結果から最も早く収束するものを採用している。係数行列の行グループ分けと三つの加速係数の選択は次のように行う。前の定義と多少異なるが、各行の優対角

表 5 複数加速係数の SBOR 法の収束までの反復回数  
Table 5 Number of iterations in the case of SBOR with plural relaxation factors.

Problem	A		B		C		D	
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$
$\omega_1$	1.995	1.950	2.000	1.990	1.980	1.970	2.000	1.980
$\omega_2$	1.910	1.875	1.865	1.790	1.965	1.925	1.990	1.975
$\omega_3$	1.850	1.800	1.840	1.780	1.965	1.910	1.990	1.975
$d_1$	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
$d_2$	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
NI	104	80	86	60	97	76	169	125
$\eta\%$	94.5	74.1	86.9	65.2	99.0	89.4	98.8	99.2
NI <sub>sor</sub>	71	50	81	58	128	93	221	126

$\omega_1 \sim \omega_3$ : relaxation factors,  $d_1$ : upper limit of diagonal dominance corresponding to  $\omega_1$ ,  $d_2$ : lower limit,  $\eta$ : ratio of NI in Table 5 to that value in Table 4, NI<sub>sor</sub>: number of iterations for SOR method

表 6 単一加速係数の SBOR 法の収束までの反復回数  
Table 6 Number of iterations in the case of SBOR with single relaxation factor.

Problem	E								
	No.	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_1/t_2$		2.5/2.5			10/2.5			2.5/10	
$d$	100	50	100	100	50	100	100	50	
$\varepsilon$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1$	
$\omega_{opt}$	1.850	1.960	1.875	1.850	1.960	1.850	1.825	1.950	
NI	113	364	181	136	382	198	122	332	
NI <sub>sor</sub>	134	395	194	152	371	188	177	377	

$t_1/t_2$ : ratio of plate thicknesses,  $d$ : division unit,  $\varepsilon$ : relative error,  $\varepsilon_1$  is  $10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2$  is  $10^{-5}$ ,  $\omega_{opt}$ : optimum relaxation factor, NI<sub>sor</sub>: number of iterations for SOR method

表 7 複数加速係数の SBOR 法の収束までの反復回数  
Table 7 Number of iterations in the case of SBOR with plural relaxation factors.

Problem	E							
	No.	1	2	3	4	5	6	7
$\omega_1$	1.975	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
$\omega_2$	1.850	1.900	1.860	1.850	1.910	1.850	1.875	1.900
$\omega_3$	1.825	1.900	1.840	1.850	1.900	1.825	1.825	1.900
$d_1$	0.150	0.200	0.500	0.200	0.200	0.150	0.200	0.200
$d_2$	0.100	0.150	0.260	0.150	0.150	0.100	0.150	0.150
NI	101	248	120	110	267	136	79	221
$\eta\%$	89.4	68.1	66.3	80.9	69.9	68.7	64.8	66.6
NI <sub>sor</sub>	90	320	146	111	331	142	89	286

$\omega_1 \sim \omega_3$ : relaxation factors,  $d_1$ : upper limit of diagonal dominance corresponding to  $\omega_1$ ,  $d_2$ : lower limit,  $\eta$ : ratio of NI in Table 7 to that value in Table 6, NI<sub>sor</sub>: number of iterations for SOR method

性  $\alpha$  を次のように定義する:

$\alpha = 2 \times \text{対角要素の絶対値} / \text{全要素の絶対値和}$ .  
各行ごとにこの  $\alpha$  を計算し,  $\alpha > d_1$  のとき  $\omega_1$ ,  $d_1 \geq \alpha \geq d_2$  のとき  $\omega_2$ ,  $d_2 > \alpha$  のとき  $\omega_3$  を選択する. 選択結果をみると, 回転角に関する行はすべて  $\omega_1$  を選択している. 変位に関する行も大部分は  $\omega_1$  であり, 少数の行が  $\omega_2$  あるいは  $\omega_3$  を選択している. 表5より単一加速係数の SBOR 法に比較して, 一部の例外を除いて 5~35% の収束性の改善が得られることがわかる. 単一加速係数の SBOR 法の最適加速係数が十分に 2 に近い場合には複数の加速係数を使用することの効果は小さい.

次に, 立体平板構造問題に関する結果について説明する. 表6に単一加速係数の SBOR 法の場合の最適加速係数と収束までの反復回数との関係を示す. さらに, 表7に三つの加速係数を用いる SBOR 法の場合の加速係数と収束までの反復回数および収束性改善の大きさの関係を示す. 係数行列の行のグループ分けと三つの加速係数の選択は骨組構造問題の場合と同様である. この場合も回転角に関する行はすべて  $\omega_1$ , 変位に関する行も大部分は  $\omega_1$  であり, 少数の行が  $\omega_2$  あるいは  $\omega_3$  を選択している. 表7より単一加速係数の SBOR 法に比較して 10~35% 収束性の改善が得られることがわかる.

係数行列のグループ分けと三つの加速係数の大きさの適切な選択を論理的に行うのは現状では不可能であ

る. それゆえに, 多くの数値実験を行って経験的に適切な選択をしなければならないと考えている. このことは単一加速係数の SBOR 法あるいは SBOR 法の最適加速係数を現状では論理的に見いだせないで, その大きさを経験的に決定しているのと同様である.

また, 四つあるいはそれ以上の加速係数を用いる SBOR 法も考えられ, この場合は最適な加速係数を選択すれば三つの加速係数を用いる SBOR 法よりも優秀であると考えられるが, 係数行列のグループ分けと対応する加速係数の大きさを理論的に決定できない現状ではその数をあまり多くしても有意義であるとは考えられない.

複数の加速係数を用いる SBOR 法は種類の異なる物理量の連成する問題の解析において, 以上の数値実験のようにその効果を発揮するが, 物理量が1種類の問題の場合にはその効果はどうなるのか数値実験してみた. 1辺固定の片持ち正方形板の先端角に集中荷重が負荷される問題で, 重調和方程式の13点差分法による解析である. 問題領域を  $12 \times 12$  に分割し, 144 節点を発生させた. 単一加速係数の SBOR 法の収束までの反復回数は 1,275 回, 三つの加速係数を用いる SBOR 法の場合は 1,269 回以下にはならず, ほとんどその効果は認められない. これは優対角性  $\alpha$  の値の変化が小さいことに起因すると考えている.

以上の数値実験においては各行の優対角性  $\alpha$  の大小に応じて3種類の加速係数を用いたが, 物理変数の種

表 8 物理変数の種類ごとに加速係数を用意する SBOR 法の収束までの反復回数  
Table 8 Number of iterations in the case of SBOR with plural relaxation factors.

Problem	A		B		C		D	
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$
$\omega_1$	1.975	1.960	1.950	1.990	1.980	1.980	2.000	1.980
$\omega_2$	1.910	1.800	1.850	1.780	1.965	1.900	1.990	1.975
NI	105	89	91	63	97	83	170	125

$\omega_1$ : relaxation factor for rotation equations,  
 $\omega_2$ : relaxation factor for displacement equations

表 9 物理変数の種類ごとに加速係数を用意する SBOR 法の収束までの反復回数  
Table 9 Number of iterations in the case of SBOR with plural relaxation factors.

Problem	E								
	No.	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega_1$		2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
$\omega_2$		1.840	1.970	1.840	1.850	1.960	1.830	1.825	1.960
NI		101	296	120	110	372	175	79	257

$\omega_1$ : relaxation factor for rotation equations,  
 $\omega_2$ : relaxation factor for displacement equations

類ごとに加速係数を用意する SBOR 法も考えられるので、次にその数値実験を行った。試行錯誤による多くの実験結果から最も早く収束するものを表 8、表 9 に示す。表 8 は骨組構造問題、表 9 は板構造問題に関する結果である。これらの表によると、一部の例外を除いて単一加速係数の SBOR 法に比較して 5~35% の収束性の改善が得られるが、前に説明した三つの加速係数を用いる SBOR 法に比較してその大きさは小さい。

以上において数値実験結果を私見をまじえずにそのまま説明した。その結果から、複数の加速係数を使用する SBOR 法により単一加速係数の SBOR 法の収束性を改善できることが明らかになったが、この方法を真に有用なものにするためには係数行列のグループ分けと対応する加速係数の大きさを決定するための方法の開発あるいは数値実験結果の積上げが不可欠であると考えている。

## 5. 結 言

連立一次方程式の反復解法の一つである SBOR 法において、複数の加速係数を用意して各行の優対角性の大小に応じてそれらを使いわける方法を採用すれば、SBOR 法の収束速さを加速できると考えられるので、三次元骨組構造問題および立体平板構造問題を例にとり、複数の加速係数を使用する SBOR 法により従来の単一加速係数を使用する SBOR 法の収束性をどの程度改善できるかについて数値実験し、5~35% 収束性を改善できることを明らかにした。

謝辞 終りに、日頃有益な助言とご協力をいただいている本学大学院総合理工学研究科 林 国一教授に厚く謝意を表す。

## 参 考 文 献

1) Westlake, J. R. (戸川隼人訳) : コンピュータの

ための線形計算ハンドブック, p. 38, 培風館, 東京 (1972).

- 2) 横山正明, 沢井 淳 : 複数の加速係数を使用する連立一次方程式の SOR 解法, 情報処理学会論文誌, Vol. 26, No. 1, pp. 40-45 (1985).
- 3) Nallasamy, M. and Prasad, K. K. : Numerical Studies on Quasilinear and Linear Elliptic Equations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 15, No. 4, pp. 429-448 (1974).
- 4) 松田安弘, 堀川 明 : 有限要素法による拡散-流動問題の解析 (第 3 報), 日本機械学会論文集, Vol. 47, No. 416, pp. 569-578 (1981).
- 5) 鮎川恭三, 高島 伸 : ぜん動流路内の流れの数値解析 (第 1 報), 日本機械学会論文集, Vol. 47, No. 423, pp. 2120-2130 (1981).
- 6) Shouying, L. and Shijun, L. : Finite difference Computation of Pressure and Wave-drag of Slender Bodies of Revolution at Transonic Speeds with Zero-lift, Proc. 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, pp. 350-356 (1982).
- 7) 横山正明 : 反復法に基づく並列処理方式の収束性, 情報処理学会論文誌, Vol. 22, No. 6, pp. 535-540 (1981).
- 8) 石黒美佐子, 難波克光 : 差分法のベクトル計算, 情報処理学会論文誌, Vol. 24, No. 1, pp. 8-14 (1983).
- 9) Varge, R. S. : *Matrix Iterative Analysis*, p. 75, Prentice-Hall, New Jersey (1962).
- 10) 横山正明, ほか 2 名 : 機械骨格への自動的肉付け法 (第 1 報), 日本機械学会論文集, Vol. 48, No. 433, pp. 1456-1462 (1982).
- 11) 成岡昌夫, ほか 4 名 : 骨組構造解析, p. 120, 培風館, 東京 (1971).
- 12) 吉田 裕, ほか 2 名 : 立体構造解析のための薄板有限要素, 土木学会論文報告集, No. 211, pp. 19-28 (1973).

(昭和 59 年 8 月 7 日受付)

(昭和 59 年 10 月 18 日採録)