ショートノート

ブロック3重対角行列形の状態方程式をもつ待ち行列の数値解法†

紀 一 誠††

積形式解をもたない待ち行列網を分解近似法を用いて解く場合には，非積形式ノードと合成ノードから成る2ノードの網の状態方程式の数値解が必要になる．この状態方程式は多くの場合ブロック3重対角行列を係数とする連立方程式として表現される．本稿では，この係数行列の特殊性を利用し，解くべき方程式の次元をその要素ブロック行列の次元数まで縮退させ，未知数を大幅に削減した方程式に置き換えてから解く方法について述べる．本稿の方法によれば，反復法を用いた場合の記憶領域を使用して，その1回の反復に必要な演算量とほぼ同程度の演算量で連立方程式の数値解を得ることができ，演算量の削減が実現できる．

1. まえがき

本稿では，ブロック3重対角行列を係数とする連立方程式の数値計算を効率的に行う方法について示す．

一般に，待ち行列システムをマルコフモデルとして表現した場合，この平衡状態確率ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める問題は，無限小生成作用素とよばれる行列 $\boldsymbol{A}$ を係数とする連立方程式（状態方程式），$\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ を確率条件，$\boldsymbol{x}$ の要素和が1，のもとに解くことに帰着される．系の性質は $\boldsymbol{A}$ の構造に反映される．$\boldsymbol{A}$ が有限次元の場合，原理的には直接数値計算が可能ではあるが，状態数（$\boldsymbol{A}$ の次元）は問題の規模に関して組合せ論的な勢で増加するので，実行に際しては記憶領域，演算量ともに大規模問題への対処が欠かせない．本稿では，積形式解をもたない待ち行列網を分解法（decomposition method）を用いて近似計算を行う際に現れるブロック3重対角構造をもつ $\boldsymbol{A}$ の場合に関する効率的な計算法を考察する．$\boldsymbol{A}$ がブロック3重対角という特殊な構造をもつ場合にはそれを利用して解くべき連立方程式の次元数をその要素ブロックの次元数まで削減することが可能である．本法では，元の方程式を反復法で解く際と同程度の記憶容量を使い，ほぼ反復1回分程度の演算量で解を得ることができる．

2. 分解近似法とブロック3重対角行列

待ち行列網は，その平衡状態確率が積形式に表現できるものとできないものに大別することができる．積形式解をもつ待ち行列網に関しては，たたみこみ法およびMVA法を基礎とする各種計算法が発表されている．一方，積形式解をもたない網の近似解法に関しても各種の計算法が研究されている．そのなかで最も基礎的な役割を果たしている方法が分解法である．分解法は，Chandy et al.[2]により提案され，パラメトリック・アナリシス，等価流量法，Norton の定理，等さまざまな名称でよばれている．分解法の考え方は次のごとくである．待ち行列網 Q を非積形式ノード Q_0 とその他の積形式ノード群 $Q_{[0]}$ に分解する．$Q_{[0]}$ とスループット等価となる合成ノード Q_c を構成する．二つのノードから成る網（Q_0, Q_c）を解くことにより近似解を得る．この手順中，Q_c を構成する部分は積形式解をもつ網を解くためのたたみこみ計算機構を利用して計算できる．一方，網（Q_0, $Q_{[0]}$）を解く部分では次の連立方程式を解くことが必要とされる．

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0},\quad |\boldsymbol{x}|=1 \tag{2.1}$$

ただし，$\boldsymbol{x}$ を状態確率ベクトルとし，$|\boldsymbol{x}|$ はその要素和を表すとする．係数 $\boldsymbol{A}$ は状態のとり方や Q_0 の特徴により変化するが，たとえば Q_0 において優先権制御を行う場合の例が文献5）に示されるように，しばしば次のようなブロック3重対角行列の形に表現される．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{00}, A_{01} & & \\ A_{10}, A_{11}, A_{12} & & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & A_{k-1,k-2}, A_{k-1,k-1}, A_{k-1,k} \\ & & \qquad A_{k,k-1}, A_{k,k} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

ただし，A_{ij} ($i, j=0, \cdots, k$) は ($m\times m$) の小行列と

† A Numerical Solution Method for Queueing Systems with Block Tri-Diagonal Balance Equation Matrices by ISSEI KINO (C & C Systems Research Laboratories, NEC Corporation).

†† 日本電気(株) C & C システム研究所

し，空白部分はすべてゼロとする．網 (Q_0, Q_c) が閉鎖型待ち行列網である限り $\boldsymbol{A}$ は有限次元であり，式(2.1)は数値計算が可能である．しかし，実用規模の網では $\boldsymbol{A}$ の次元数は大きく，たとえば部分連鎖数３，客数ベクトル $\boldsymbol{K}=(20,20,20)$ とすれば 21^3(約１万)次元程度の規模となる．次元数が大きくしかも疎な係数行列をもつ連立方程式の数値解法としては一般に反復法系統の解法 (SOR 法等) が利用される．しかし，反復法系統の解法は係数の疎密度に応じ記憶領域の節約ができる利点をもつ反面，解ベクトルの計算を収束に至るまで反復的に繰返す計算構造をもつため，演算量が直接法に比べて増大するという欠点をもっている．本稿では，$\boldsymbol{A}$ の特殊な構造を利用し，記憶領域に関する反復法系統の解法のもつ利点をそのまま残しながら，演算量をほぼ１回の反復程度に削減する数値計算法について示す．

3. 漸　化　法

係数 $\boldsymbol{A}$ は $m\times(k+1)$ 次元であり，方程式(2.1)は $m\times(k+1)$ 個の未知数をもっている．本章では，式(2.1)を要素ブロックと同次元の係数 $(m\times m)$ をもつ連立方程式に縮退させ，未知数の数を m 個に削減して解く解法について示す．

$\boldsymbol{x}_i$ をブロック i に対応する m 次元ベクトルとし，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k)$ とする．以下，$\boldsymbol{x}_i$ を $\boldsymbol{x}_0$ を用いて表現することを考える．$\boldsymbol{y}_i$ および $\boldsymbol{M}(i)$ を次に定義されるベクトルおよび行列とする．

$$\boldsymbol{y}_i=(\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{x}_i),\quad i=0,1,\cdots,k-1 \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{M}(i)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11}(i), \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{M}_{21}(i), \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ただし，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{0}$ はおのおの m 次元の単位行列とゼロ行列とし，$\boldsymbol{M}_{11}(i), \boldsymbol{M}_{21}(i)$ は次に定義される m 次元の行列とする．

$$\boldsymbol{M}_{11}(i)=-A_{ii}A^{-1}{}_{i+1,\,i},\ i=0,1,\cdots,k-1 \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{M}_{21}(i)=-A_{i-1,\,i}A^{-1}{}_{i+1,\,i},\ i=1,2,\cdots,k-1 \tag{3.4}$$

このとき，式(2.1)より次の関係が成り立っている．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_i&=\boldsymbol{y}_{i-1}\boldsymbol{M}(i)\\ &=\boldsymbol{y}_0\textstyle\prod_{j=1}^{i}\boldsymbol{M}(j)\end{aligned} \tag{3.5}$$

さらに，$\boldsymbol{Y}_{rs}(i), r, s=1,2$ を $(m\times m)$ の小行列とし，$\boldsymbol{Y}(i)$ を式(3.6)に定義される行列とする．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}(i)&=\textstyle\prod_{j=1}^{i}\boldsymbol{M}(j)\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11}(i), & \boldsymbol{Y}_{12}(i)\\ \boldsymbol{Y}_{21}(i), & \boldsymbol{Y}_{22}(i)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.6}$$

式(3.5)，(3.6)より $\boldsymbol{y}_i$ は次のごとくに表現される．

$$\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{Y}(i) \tag{3.7}$$

(3.7)式は，$\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{x}_0$ および $\boldsymbol{x}_1$ を用いて次のように表せることを意味している．

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{Y}_{21}(i-1)+\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{Y}_{11}(i-1) \tag{3.8}$$

一方，式(2.1)から，$\boldsymbol{x}_0A_{00}+\boldsymbol{x}_1A_{10}=\boldsymbol{0}$，すなわち $\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{M}_{11}(0)$ であり，これを式(3.8)に代入し次の関係を得る．ただし，$\boldsymbol{Y}_{11}(0)=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Y}_{21}(0)=\boldsymbol{0}$ とする．

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{D}(i-1),\quad i=1,2,\cdots,k \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{D}(i)=\boldsymbol{Y}_{21}(i)-\boldsymbol{M}_{11}(0)\boldsymbol{Y}_{11}(i-1) \tag{3.10}$$

以上の関係から，$\boldsymbol{D}(i)$を計算することによって$\boldsymbol{x}_i$を$\boldsymbol{x}_0$ を用いて表現することができる．定義(3.6)から，$\boldsymbol{Y}(i+1)=\boldsymbol{Y}(i)\boldsymbol{M}(i+1)$であり，したがって $\boldsymbol{Y}_{11}(i+1)$, $\boldsymbol{Y}_{21}(i+1)$ が式(3.11)のごとく逐次計算でき，これを用いて $\boldsymbol{D}(i)$ を計算することができる．

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}_{11}(i+1)=\boldsymbol{Y}_{11}(i)\boldsymbol{M}_{11}(i+1)+\boldsymbol{Y}_{12}(i)\boldsymbol{M}_{21}(i+1)\\ \boldsymbol{Y}_{21}(i+1)=\boldsymbol{Y}_{21}(i)\boldsymbol{M}_{11}(i+1)+\boldsymbol{Y}_{22}(i)\boldsymbol{M}_{21}(i+1)\end{cases} \tag{3.11}$$

さらに，式(2.1)から次の関係が成り立っている．

$$\boldsymbol{x}_{k-1}A_{k-1,k}+\boldsymbol{x}_kA_{k,k}=\boldsymbol{0} \tag{3.12}$$

式(3.9)に(3.12)を代入して次の関係を得る．

$$\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{S}=\boldsymbol{0} \tag{3.13}$$

ただし，$\boldsymbol{S}$ は次で定義される行列とする．

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}(k-1)A_{k,k}+\boldsymbol{D}(k-2)A_{k-1,k} \tag{3.14}$$

さらに，確率条件 $|\boldsymbol{x}|=1$ は次のごとくに表現される．

$$|\boldsymbol{x}_0\{\boldsymbol{E}+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{D}(i)\}|=1 \tag{3.15}$$

以上から，与えられた連立方程式(2.1)は，$\boldsymbol{x}_0$ を未知数とし，式(3.13)および(3.15)を連立させた次の連立方程式に置き換えることができる．

$$\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{S}=\boldsymbol{0},\ |\boldsymbol{x}_0\{\boldsymbol{E}+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{D}(i)\}|=1 \tag{3.16}$$

与えられた方程式が $m\times(k+1)$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知数とする連立方程式であったのに対して，式(3.16)はm次元ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を未知数とする連立方程式を意味しており，解くべき方程式の次元が大幅に削減されている．

行列 $\boldsymbol{S}$ から第１行および第１列を取り除いてできる行列を $\boldsymbol{R}$ とし，$\boldsymbol{S}$ の第１行からその第１要素を取り除いて得られる $(m-1)$ 次元ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．このとき，式(3.16)は未知数ベクトルを $\boldsymbol{z}$ とする次の $(m-1)$ 次元の連立方程式に置き換えることができることに注意．

$$\boldsymbol{z}\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{u} \tag{3.17}$$

式(3.17)を解いて得られる解 $\boldsymbol{z}$ から $\boldsymbol{x}_0$ を求めるのは以下の手続きによる.

$\boldsymbol{D}=\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{D}(i)$ とし，$\boldsymbol{D}$ の第 i 行ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ とする．$v_i=|\boldsymbol{v}_i|$ を要素とする m 次元ベクトルを $\boldsymbol{v}=(v_i)$ とし，$\boldsymbol{q}=(1,\boldsymbol{z})$，内積を $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v})$ とする．このとき，求むる $\boldsymbol{x}_0$ は次のごとくに得られる.

$$\boldsymbol{x}_0=(x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}),\quad x_0=1/(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) \qquad (3.18)$$
$$x_i=x_0 z_i,\quad i=1,2,\cdots,m-1$$

$\boldsymbol{x}_i$ は式(3.9)，(3.18)から計算でき，式(2.1)の解 $\boldsymbol{x}$ が得られる.

4. 計算アルゴリズム

前章に示した漸化法を計算アルゴリズムの形にまとめると以下のようになる.

S1：$\boldsymbol{D}(i), i=0,1,\cdots,k-1$ を計算 (3.10)，(3.11)

S2：$\boldsymbol{S}$ 行列の作成 (3.14)

S3：方程式，$\boldsymbol{zR}=-\boldsymbol{u}$，を解く (3.17)

S4：$\boldsymbol{x}_0$ を求める (3.18)

S5：$\boldsymbol{x}_i, i=1,2,\cdots,k$ を計算 (3.9)

以上の手順を吟味してみることによって，この計算法に必要な記憶領域が式(2.1)を反復法で解く場合に必要な量とほとんど同じであり，S3 を直接法で解くとすれば，演算量は1回の反復計算に必要な量と同程度であることを確かめることができる.

5. む す び

ブロック3重対角行列を係数とする連立方程式の効率的数値計算法について述べた．状態方程式の特殊性に着目して未知数を削減する考え方は文献1)，3)，4)等にも見られる．この方法は有効ではあるが，$\boldsymbol{A}$ の個性を直接利用しなければならないため，削減方法が問題ごとに異なり，個々に工夫をこらさざるをえない点が難点である．なお，本稿ではこの方法を文献4)にならい漸化法とよんだ．演算量の削減程度に関しては，本稿のモデルとは異なるが，文献4)に SOR 法と比較した数値実験例が示されており，おおむね計算所要時間が 1/3〜1/4 に削減されている．本稿の場合に関する SOR 法との比較実験は今後の課題である.

本稿では，待ち行列網理論への応用を念頭に置いて論を進めたが，本計算法が一般的なブロック3重対角行列を係数とする連立方程式の解法として適用可能なことは明らかであろう.

謝辞 本研究の基礎となる待ち行列網理論に関して有益なご指導をいただいた，防衛大学校川島武先生，筑波大学逆瀬川浩孝先生，工学院大学山崎源治先生に感謝いたします．また，日頃ご指導いただく，当社C＆Cシステム研究所三上徹所長代理，同研究所応用システム研究部難波田愈部長に感謝いたします.

参 考 文 献

1) Herzog, U., Woo, L. and Chandy, K. M.: Solution of Queueing Problems by a Recursive Technique, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 19, No. 3, pp. 295-300 (1975).
2) Chandy, K. M., Herzog, U. and Woo, L.: Parametric Analysis of Queueing Networks, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 19, No. 3, pp. 43-49 (1975).
3) 川島幸之助，原田要之助：閉そくのある有限待合室の2段直列形待ち行列モデルに対する数値解法，電子通信学会論文誌 (B)，Vol. J64-B, No. 8, pp. 769-776 (1981).
4) 能條 哲，川島幸之助：状態方程式の性質と数値解法，電子通信学会技報，Vol. SE 78-35, No. 7, pp. 17-24 (1978).
5) 紀 一誠：優先権付き待ち行列網の近似解法，京大数理解析研究所講究録，Vol. 519, pp. 137-155 (1984).

(昭和59年 7 月26日受付)
(昭和59年12月20日採録)