

囚人のジレンマゲームに基づいたネットワーク成長の解析
Analyses of Growing Networks based on Prisoner's Dilemma

豊田 規人†
Norihito Toyota

1. まえがき

20世紀の終わり頃から、現実世界にあるネットワークがスモールワールド[1], スケールフリー[2]といった特性を持つことが明らかになってきた。同時にそれらのネットワーク構成の研究も進んできた[3], [4]。しかしそれらの構成法では、基本的に、ネットワークは表面的なトポロジーだけに依存した固定されたアルゴリズムによって強制的に作られていく。たとえば優先的付加法では[2], 優先されたノードは永久に優先され続けるであろう。しかし実際の系ではそのようなことが必ずしも正しいとは限らず、系のダイナミクスによって優先されるノードは時々刻々変わっていくことが多いと考えられる。ここでは、そのように成長アルゴリズムが、ネットワーク内のダイナミクスに依存したプロセスを考える[5]。現実世界でもこういったシステムは多く見られると考えられ、こういった成長過程を通して構築されたネットワークの研究は、そういった仕組みのない場合より一層汎用性に富むはずである。

ダイナミクスを考える上で必然的にノードに内部自由度を持たせなくては行けない。ここでは、具体的ダイナミクスとしては、社会学、数理生物学などさまざまな領域で汎用なダイナミクスの一つである囚人のジレンマゲーム(PDgame)を採用する。この場合、戦略は2種類あり、ノードの内部自由度は最小の2となる。このダイナミクスに立脚したネットワーク成長をシミュレートし、相転移と考えられる際立った特徴があることを示すとともに、次数分布などの代表的統計量の特徴などを評価する。更にそれらに対して理論的考察を与える。

2. ネットワーク成長モデル

この論文における、ネットワークに内部ダイナミクスを持つ成長モデルを記述する。

- ① ランダムな戦略 C or D が付与されている $k+1$ 個のノードからなる完全グラフを用意する。
- ② 各ノードは自分に付与された戦略で、アークで連結されたノード達および自分と各々1:1のPDgameを行う。その利得表は表1で与えられる。
- ③ 各ノード i は、それぞれの対戦で獲得した利得の合計 R_i を評価する。
- ④ 各ノード i は、連結しているノードの中で最も利得の高いノードの戦略に自身の戦略を更新する。
- ⑤ ランダムに選ばれた戦略を持つ新しいノードを追加するが、アークは R_i に比例した(実際は(1)式で与えられる)確率で既存のノードと連結する。

$$P_i = \frac{1}{1 + \exp(-R_i/A)}, \text{ with } A > 0. \quad (1)$$

⑥新参加のノードは既存のノード達と⑤に従い、計 k

本のアークを張る。

⑦ ②から⑥を n 回繰り返す。

このルールより各戦略の時間変化、次数分布などを評価する。

表1. PDgameの利得表($t+s+c+d=0, t < c > d > s$)

戦略	C	D
C	(c,c)	(s,d)
D	(t,s)	(d,d)

3. シミュレーション結果

前章で記述したアルゴリズムに対し、シミュレーションを行うが、パラメーターは $k=5, A=30, t=-s=5$ とし、収束に関して特別な事情がない限り、 $n=1000$ とする。又、ここでの動的変数は $c=-d$ としこの値を変えてシミュレートする。

3.1 次数分布

次数分布についての主な結果は以下の通りである。

・ $c < 4$: All-D に収束し次数分布はリニア(図1),

・ $c > 4.4$: All-C に収束し次数分布は指数分布(図2).

予想されるように c の値が小さいときは支配戦略である D が蔓延する。しかしある程度以上 c の値が大きくなると全てのノードが C をとるようになる。しかも、このことにより次数分布の特性も変わる。上記は、図1, 2から現象論的に推測した次数分布関数である。又、中間的 c の値では不安定で、確率的に All-C or All-D になる。この間、どの位の割合で All-C になったかを図3で示している。試行回数10回程度の平均であるが、この間で c をオーダー

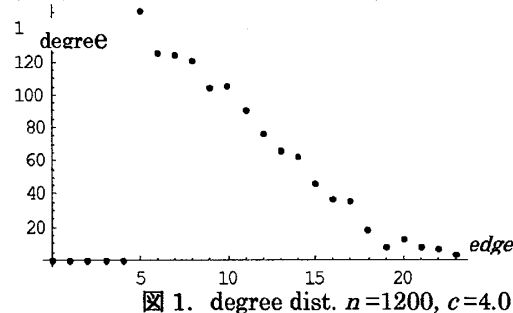


図1. degree dist. $n=1200, c=4.0$

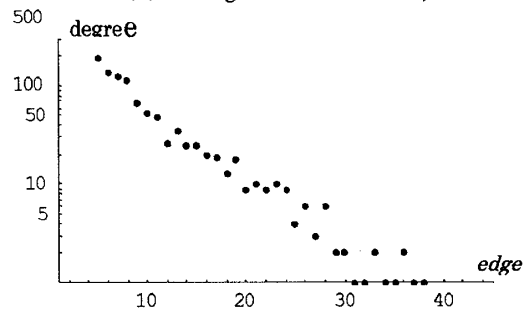


図2. $n=1000, c=4.5$ degree dist. 片 log-plot

表2. Cに対して、(4)を満たす最小のx

C	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9
X	6.7	6.5	6.3	6.1	6.0	5.8	5.7	5.5	5.4	5.3	5.1

パラメーターとした、一種の相転移様相(D-C transition)を示すことは明らかである。しかし、これら全ての場合において、初めは支配戦略 D が蔓延した状態である。しかし、 $c > 4$ では、時間発展するうちに急激に C が蔓延しだす(図4)。次にこういった現象の理論的解析を展開する。

3.2 D-C transition

新しく付加されるノードの戦略が C であっても、連結されたノードの中で最も利得が高くなければ、その C は D 化してしまう。C が all-D の世界に連結した場合、C の利得 P_c は、以下のようになる；

$$P_c = c + ks = c - tk. \tag{2}$$

連結される D の利得と比較することによって、この C が D 化しないための条件は以下のようになる；

$$c + ks > t + xd. \tag{3}$$

つまり、c に対して

$$c > \frac{1+k}{1+x}t \text{ for } k=t=5 \tag{4}$$

を満たせばよい。但し、x は新ノードが連結したノードの次数である。表2に、(4)を満たす最小の x の値が一覧されている。つまり、 $c > 4.3$ では $x=6$ で周りの D を C 化できるが、 $c < 4.3$ では $x=7$ でないと C 化できない。又、この C が周りに伝播可能な条件は、詳細に議論するとそれほど厳しくなくほぼ $c > 2$ であれば十分であることが分る。従って、自然な推論として $c = 4.3$ 前後で何らかのギャップがあると考えられる。このことは all-C になる確率の c 依存性を表す図3からも支持される。この点を更に追求する。

C の割合と次数5の割合の時間変化を表す図4、図5の比較はこの点について一つの示唆を与える。図5では、All-C への急激な変遷時に、一時的に次数の低い($x < 6$)ノードの割合が激減していることが分る。その後順調にこの割合が増大するが、この小次数のノードの減少により、新参のノードは次数の大きいノードと転移点直前で連結し、(4)の条件から C 化が進むことになる。

実際、次数の高いノードが 50%以上の確率で新参のノードと連結するための条件から、そのときの c の値が推測できる。これは(1)式の連結確率が利得値に依存しているからである。まず、あるノードの次数が x 以上である確率を p としたとき、C に連結される5つのノードが、ともに 50%以上の確率で次数 x 以上である条件から、p には以下のような制限がつく。

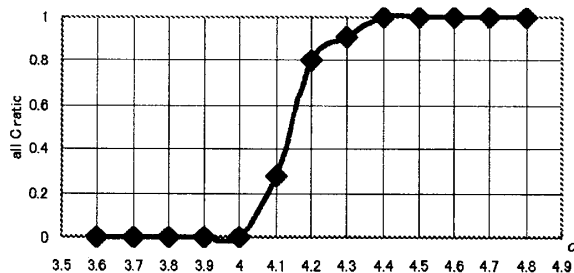


図3: c v.s. C-world になる確率

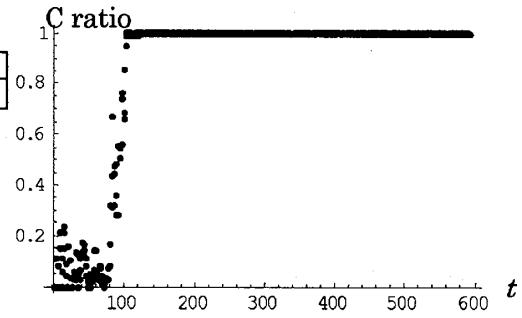


図4. D-C 相転移. $n=600, c=4.3$

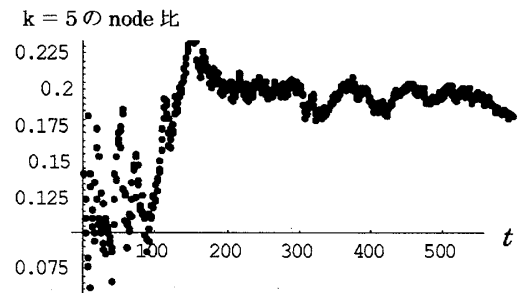


図5. 次数=5のノードの割合. $n=600, c=4.3$

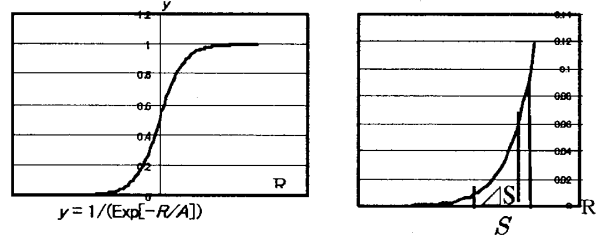


図6. 確率関数(1)とその拡大図

一方、All-D 世界における次数の分布は図1のようにリニアで、一般的に(6)で表されることが現象論的に示される。

$$Y = \alpha R + \beta \text{ with } \alpha = -\frac{2n}{15^2 c} \ll \beta = \frac{40n}{15^2}, R = kc. \tag{6}$$

これより、 $k = 9.4$ 以上の次数のノードで全体の過半数を占める。この値はこのネットワークの平均次数で、ここでは示さなかったシミュレーション結果ともよく合致している。

新参の C が大きな次数のノードと、高い確率で連結するための条件を考えるために、(1)の確率の規格化定数 $S(d)$ を評価する。

$$\begin{aligned} S(d) &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha R_i + \beta}{1 + e^{-R_i/A}} \sim \int_{R_{min}}^{R_{max}} \frac{\alpha R + \beta}{1 + e^{-R/A}} dR \\ &\sim \int_{6d}^{21d} \frac{\beta}{1 + e^{-R/A}} dR \\ &= \beta A \left(\ln[e^{6d/A} + 1] - \ln[e^{21d/A} + 1] \right). \end{aligned} \tag{7}$$

上記の数列の和は解析的に求められないゆえ連続近似をし、更にそれを解析的に求めるために、(6)を使って近似をした。図6の右の S で示されている全面積の部分集合 ΔS が

$$\frac{\Delta S(d, x)}{S(d)} > 0.87, \tag{8}$$

を満たせば、C が連結する過半数のノードの次数が x 以上であるといえる。但し、

$$\Delta S(d, x) \equiv \int_{21d}^{d(1+x)} \frac{\beta}{1 + e^{-R_i/A}} = \beta A (\ln[e^{d(1+x)/A} + 1] - \ln[e^{21d/A} + 1]). \quad (9)$$

まとめると、 d の臨界点は以下の連立方程式を満たせばよいことになる。

$$\begin{cases} \frac{\Delta S(d, x)}{S(d)} = 0.87, \\ c = \frac{1+k}{1+x}t \text{ with } k = t = 5, \quad c + d = 0. \end{cases} \quad (10)$$

これを数値的に解くと、

$$\begin{cases} d = 0.29 \text{ for } x = 7 \text{ this is nonsense,} \\ d = -4.14 \text{ for } x = 6. \end{cases}$$

となり、確かに次数が7から6になって初めて意味のある解を得、しかも d の臨界値 -4.14 は図6ともよく一致している。

3.3 次数分布関数

分布関数は、Barabashi らの処方によって評価できる [2]-[4]。今の場合にノード i の次数 k_i に対する該当する方程式は、

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} = \frac{m}{S(1 + e^{-R_i/A})} = \frac{m}{S(1 + e^{-rk_i/A})} \quad (11)$$

ここで $r = c$ or d であり、かつ $S(t)$ を表す図7より、時刻 t での S は All-C あるいは ALL-D 双方で時刻 t の一次になることが見て取れる。

$$S = \gamma t. \quad (12)$$

これを初期条件 で解くと

$$t = t_0, \quad k_i = m = 5 \\ (k_i(t) - m) + \frac{A}{r}(e^{-rm/A} - e^{-rk_i(t)/A}) = \frac{m}{\gamma} \log_e \frac{t}{t_0} \quad (13)$$

なり、 k_i について解析的には求まらない。しかし、分布関数は、

$$P(k) = -\frac{1}{\partial k_i(t)/\partial t_0} \quad (14)$$

で求めることができるので、

$$P(k) \sim \frac{\gamma t}{5} \frac{1 + e^{-rk/30}}{e^{\gamma(k-5)/5} e^{6\gamma/r} (e^{-\gamma/6} - e^{-rk/30})} \quad (15)$$

$$\sim \frac{\gamma t}{5} \frac{1 + e^{-rk/30}}{e^{\gamma(k-5)/5} e^{6\gamma/r}} \text{ for } r = c \quad (16)$$

となる。(16)は $r=c$ のときの近似式で、Exp 減衰 + Exp²

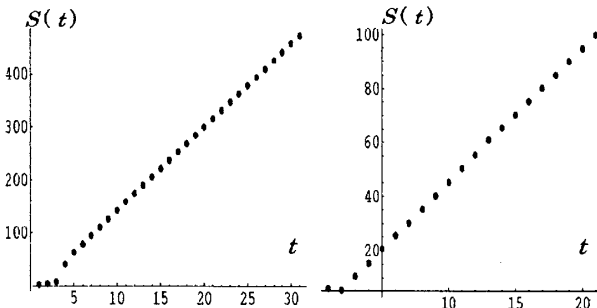


図7. $S(t)$. 左, 右図はそれぞれ all C, all D の場合

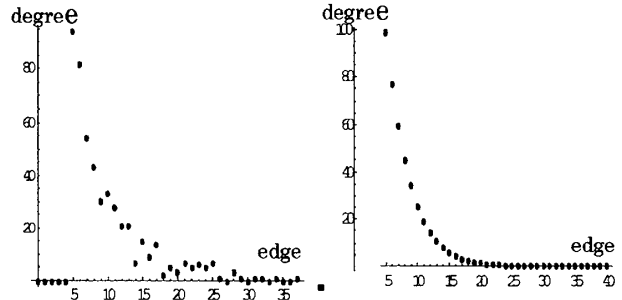


図8. $c=4.5$ における次数分布. 実験($n=500, k=5$): 理論 ($\gamma=1/3$)

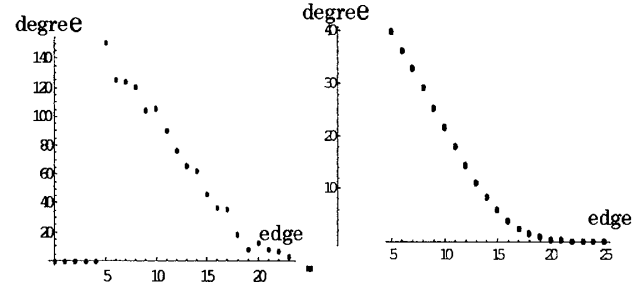


図9. $c=4$ における次数分布. 実験($n=1200, k=5$): 理論 ($\gamma=1/15$)

減衰になっていて、大雑把には、指数減衰といえる。実際、数値実験と理論値を比較したのが、図8であり、双方よく一致しているといえる。又、(15)式を All-D の場合評価したものが図9で与えられている。図8, 9から All-C, All-D どちらの場合も理論式は数値実験の結果とよく一致している。

このように、相転移点、およびその前後の次数分布の様子は理論的に理解できたといえる。

4. まとめ

この論文では内部にゲームダイナミクスが動いているネットワークの利得優先的アーク付加モデルを提案し、それをシミュレートした。ここでは少数の特徴的な振舞いのみを示したが、それらは理論的解析とよく合致しており、その特徴は定量的にも理解できたと考えられる。

紙面の関係上、これらの振舞いの A 依存性に対するいくつかの特性とその理論的考察は記述できなかったが、これらは、より精査な理論的考察とともになされるべきであろう。

参考文献

- [1] D-J. Watts and S-H. Strogatz, "Collective dynamics of 'small-World' networks", Nature, vol.393,1998
- [2] R.Albert and A-L. Barabasi, "Emergence of Scaling in Random Networks", Science, vol.286, 1999
- [3] R.Albert and A-L. Barabasi, Rev. Mod. Phys. 74, 47-97(2002); Science, 286, 509-512(1999)
- [4] M.Newman, A-L. Barabasi and D-J. Watts, "The structure and Dynamics of Networks", Princeton Univ. Press, 2006
- [5] G. Szabo, "Evolutionary games on graphs", e-print arXiv:cond-mat/0607344