

## PERTにおける資源需要の均衡化を求めるアルゴリズム

## An Optimum Solution Algorithm for Resource Balance in PERT

王 瑞剛 趙 華安 三原 徹治  
Ruigang Wang, Hua-An Zhao and Tetsuji Mihara

九州共立大学大学院工学研究科  
Graduate School of Engineering Science, Kyushu Kyoritsu University

あらまし プロジェクトの計画・管理法として、PERT/CPMがよく利用されている。クリティカル・パスを求めることにより、プロジェクトの最短完了期間が求められる。クリティカル・パスになっている作業は、その作業が遅れるとプロジェクト全体の納期が遅れてしまう。それに対して、クリティカル・パスではない作業には余裕がある。余裕範囲において作業の開始時刻が調整できる。作業開始時刻をいかに調整すれば、必要な資源需要が均衡になるか、本論文はこれについての最適法を提案する。

## 1. はじめに

建築工事などのプロジェクトには、多くの作業があり、作業Aが完了しないと作業Bに着手できないという順序関係が複雑に絡み合っている。そのような状況において、プロジェクト開始から完了までの期間を最短にするには、どの作業をいつから着手していつまでに完了しなければならないかを管理する必要がある。日程管理、または作業管理と呼ばれるPERT (Program Evaluation and Review Technique) 法がよく知られている。各作業を最も早く開始する時刻と、遅くとも完了していなければならない時刻が求められる。PERTとほぼ同時期に独立してCPM (Critical Path Method) が開発されたが、ともにグラフを用いてプロジェクトのスケジューリングを行うことから、一般に併せてPERT/CPMと呼ばれる。CPMとの違いは、CPMがコスト最適化の手法であるのに対して、PERTは不確定要素の多いプロジェクトにおいて確率的に時間見積もりを算出し、その時間を短縮することを図る手法である。プロジェクトの管理内容として、どの作業がクリティカルになるのが重点である。プロジェクト全体の納期を短縮するには、クリティカルな作業を短縮する必要がある。CPMではプロジェクトの最短完了時刻はクリティカル・パスを求めることにより得られ、クリティカル・パス上の作業が余裕がなく遅らせてはならないため、クリティカルな作業と呼ばれる。クリティカルな作業が遅延すると、プロジェクト全体の納期が遅らせてしまう。逆にクリティカル・パスが短縮できるとプロジェクト期間も短縮できる。このため、生産管理・プロジェクト管理において、PERT/CPMは非常に重要な管理方法である。クリティカル・パス上にない作業を非クリティカルな作業といい、このような作業が遅れが出ても余裕の範囲内であればプロジェクト全体のスケジュールには影響しないので、余裕範囲において作業の開始時刻が調整できる。その開始時刻は一般に最早開始時刻 (ES) または最遅開始時刻 (LS) が利用される。しかし、開始時刻

の違いにより資源 (人員、電力、設備など) 需要量の変動幅が大きく変わるので、資源の有効利用に不利がある。図1(a)はあるプロジェクトにおいて、非クリティカルな作業をESで計画した場合の資源需要量を示し、図2(b)は開始時刻を最適化したものである。

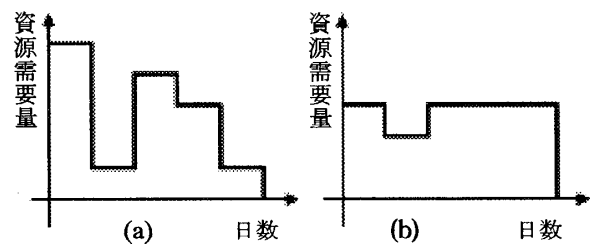


図1 (a) ESでの資源需給量 (b)最適化した資源需給量

本論文は資源需要を均衡化する最適化を行うアルゴリズムを提案し、その正確性を検証する。

## 2. PERT/CPMによる資源需要の解析

PERTは、プロジェクト計画でのスケジュール立案や進捗管理に広く利用され、実際に役立っている。また、クリティカル・パスの概念は、プロジェクト進行に伴う業務を管理する上で非常に重要である。現在、PERT/CPMの専用ソフトウェアが多く開発され、容易に利用できる。その基本的な処理過程は次のようになる。

- プロジェクトの各作業を明確にする。
- 各作業が完了するのに必要な所要時間と所要資源を見積もる。
- 作業の実行順序・作業同士の前後関係を明確にする。
- 各作業をつなぎ合わせ、有向グラフを作成する (各工程の開始日、終了日が決まる)。
- プロジェクト全体の所要時間を算出し、完了時期を明らかにする。

- クリティカル・パスを対象として、所要時間短縮を検討する。非クリティカルな作業について、作業の開始時刻と余裕時間を求め、余裕時間範囲で開始時刻を決める。

【例1】:あるプロジェクトは5つの作業A, B, C, D, Eから構成される。各作業の所要日数, 所要資源数と作業間の前後関係が表1のように与えられている。各作業の所要時間と作業順序は図2のような有向グラフで表現できる。各作業は有向辺で表し, 作業の完成までの所要時間と所要資源  $t_{ij}[r_{ij}]$  を各辺のウェイトとしてつけ,  $t_{ij}$  は所要時間,  $r_{ij}$  は所要資源である。頂点をイベントといい, 作業の開始点と完了点になっている。イベント  $i$  を頂点  $i$  で表し, 頂点の数値  $S/F$  は  $S$  はここから始まる作業が最も早く開始できる時刻,  $F$  はここで終わる作業が遅くともこの時刻には完了していなければならない時刻である。イベント1が  $0/0$ , イベント4が  $5/5$  になっている。よって, このプロジェクトの最短完了日数は5日である。太線で表しているのはクリティカル・パスであり, 作業A, CとEがクリティカルな作業で, 開始時刻の余裕がなく遅らせてはならない。

表1. プロジェクトの作業間関係

作業	所要日数	所要資源	先行作業
A	2	3	なし
B	1	2	なし
C	1	1	A
D	1	1	A
E	2	2	B, C

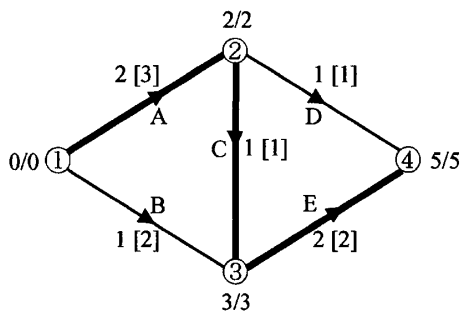


図2 有向グラフとクリティカル・パス

各作業の所要時間と作業順序および非クリティカルな作業の余裕時間を図3のように計算できる。非クリティカルな作業はBとDである。Bの余裕時間は2日間で、開始時刻は1日目, 2日目, 3日目のいずれにしてもよい。Dの余裕時間は2日間で、3日目, 4日目, 5日目のいずれに開始してもよい。

非クリティカルな作業を余裕範囲内で開始すれば, 全体の完了日数に影響しないことが容易に分かる。しかし, 非クリティカルな作業の開始時刻によって, 資源の需要量が大きく変わる。一般にESまたはLSで計画された場合が多い。図3はESで計画した場合の資源需要量を示している。1日目に需要量が大きく,

均衡的ではなく, 資源は有効的に合理的に利用されていない。資源均衡化ための調整は残念ながら, 一般的な解法は存在しない。近似的な解法, または, 組合せ最適化に基づく手法が利用される。本論文は, 統計学の偏差平方和を利用して, 資源需要の均衡化を考え, 最適化方法を提案する。

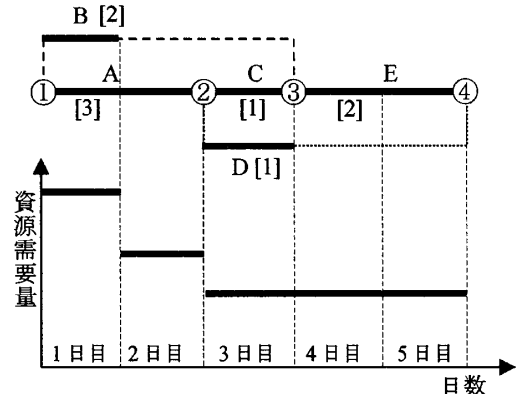


図3 非クリティカルな作業の余裕時間

### 3. 数学モデルの導出

資源需要量の均衡化は, 資源需要量曲線の偏差平方和を最小にすることと等価である。

定義1: ESで計画されたPERT/CPMの初期計画において, 第  $t$  日目に必要な資源需要量を  $r(t)$  で表す。

定義2: 第  $t$  日目において,  $n$  個の非クリティカルな作業を移動可能な場合, すべての  $r_i(t)$  の組合せを  $R(t)$  で表し,

$$R(t) = \{r_i(t)\}, i=1, 2, 4, \dots, 2^n$$

になり, 可能な資源需要量集合と呼ぶ。

定理1: 資源均衡の偏差平方和を最小にすること

は,  $\min \left\{ \sum_{t=1}^T r_i^2(t) \right\}$  と等価である。

証明: 偏差平方和  $\sigma^2$  の定義により,

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (r(t) - \bar{r})^2 dt$$

$T$  はプロジェクトの期間,  $\bar{r}$  は資源需要量の平均値である。よって,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T (r(t) - \bar{r})^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T r^2(t) dt - \frac{2\bar{r}}{T} \int_0^T r(t) dt + (\bar{r})^2 \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T r^2(t) dt - \frac{2\bar{r}}{T} \cdot \bar{r} \cdot T + (\bar{r})^2 \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T r^2(t) dt - (\bar{r})^2 \end{aligned}$$

資源需要曲線は階段式で, 間隔は単位日数であるので, 次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{T} \int_0^T r^2(t) dt = \sum_{t=1}^T r^2(t)$$



■有限グラフにおいて、2点間のパスは有限であるので、このアルゴリズムは必ず終了する。

■始めて見つけた実行可能なパスは必ず最適解になる(定理1による)。

例1と例2を用いて、アルゴリズムを説明する。図4に示すグラフモデルにおいて、STEP1で第1番目の最短パス  $P_1 = \{9, 9, 1, 4, 4\}$  を見つけ、STEP2で  $P_1$  を判断して、このパスは実行可能ではないと分かる(第1と2段階とも資源需要量の平方が9であるなら、第3段階に1になることが不可能である)。繰り返して、第6番目のパス  $P_6 = \{9, 9, 9, 9, 4\}$  が実行可能であるので、STEP3で  $r_{opt} = \{3, 3, 3, 3, 2\}$  が得られ、終了する。STEP4で最適解として、非クリティカルな作業Bを右へ第3段階に移動し、Dを第4段階に移動する。最適化した結果を図5に示す。図3の最適化前の資源需要量と比べて、資源需要量が均衡化されていることが明らかである。

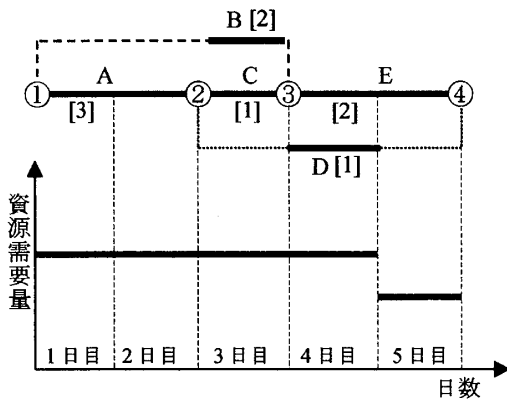


図5 最適化した資源需要量

### 5. 終わりに

大きなプロジェクトは数多くの従属関係(前工程が終わらないと次工程に進めないなど)のある複数の作業からなる。それぞれの作業の開始と終了時刻を定めるのは、プロジェクトの納期を守る重要なことである。PERT/CPMにより、クリティカル・パスが求められる。どの作業がクリティカルになるのが注目される。また、プロジェクト全体の納期を短縮するには、クリティカルな作業を短縮すれば実現できる。

本研究は非クリティカルな作業に注目して、その開始時刻に余裕があるため、開始時刻の違いで資源の需要量が大きく変わるので、資源需要の均衡化を行った。まず、PERT/CPMで非クリティカルな作業を求め、そしてグラフモデルを導出する。このグラフモデル上で最短パスを続々求めることにより最適解が得られる。アルゴリズムの計算量は  $O(n^2)$  に劣らない。今後の課題として、複数の最適化条件の下で、最適解を求めることである。

### 文 献

[1] F. D. Robinson, "The background of the PERT algorithm," The computer Journal 5, pp.297-300.

[2] R. D. Archibala and R. L. Villoria, "Network Based Management Systems (PERT/CPM)," N.Y. 1967.

[3] J. D. Wiest and F.K. Levy, "A Management Guide to PERT/CPM with GERT/PDM/DCPM and Other Networks," Prentice-Hall, Inc., Ch7, 1977.

[4] E. Minieka, "Optimization Algorithms for Networks and Graphs," Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, Ch.3, 1978.

[5] 木暮仁, <http://www.kogures.com/hitoshi/webtext/pt-intro/index.html>