母関数を用いた節集合のリネーミング法†

西岡 弘明††*

節集合は導出原理に基づく証明法（導出法）の入力とされる論理式の集合である．導出をより効率的に行うため，ホーン節集合がしばしば用いられる．節集合を論理的に等価な形でホーン節集合へと変換するリネーミングを系統的に行う方法はこれまでにいくつか提案されている．本研究では計数母関数を用いることにより，与えられた節を任意の個数の正リテラルを持つ節へと変換するすべてのリネーミングが母関数の係数から同時にすべて求められることを示す．言い換えれば，母関数から節のリネーミング後の正リテラル数の状態に対応したリネーミングの分類を得ることが可能となる．この分類から，対象とする節を0または1個の正リテラルを持つ節に変換するリネーミングだけを抽出することによって節のホーン化条件が得られる．さらに節集合の各要素に対する節のホーン化条件の共通部分を抽出することにより，節集合のホーン化条件すなわち節集合をホーン節集合に変換するすべてのリネーミングが得られる．本方法は，このようなリネーミングが一括して求まるという点で他の方法と大きく異なっている．さらに計数母関数の高次係数を用いることにより，今まで系統的な方法の確立されていなかったホーン節集合よりも条件のゆるやかな節集合を，ホーン節を求めるためのリネーミング法の理論的拡張として求める手順が得られることを示す．そして，その具体例として節集合の分割問題への応用についても言及する．

1. まえがき

導出法[1),2)]によって定理の証明を行う場合，与えられる問題は，節集合と呼ばれる論理式集合で表されなければならない．SNL 導出法や SPU 導出法[3)]などを用いて証明をより効率的に行うために，入力となる節集合はホーン節集合であることが望ましい．非ホーン節集合をホーン節集合に変換する方法として，最もよく知られているのはリネーミング (renaming)[3)] による方法である．リネーミングによって得られるホーン節集合は元の節集合と充足不可能性に関して等価であるという重要な性質を持っている．リネーミングを行うには，通常，節集合の要素である節の各リテラルに付加されている符号（否定記号）を，同一の述語記号をひとまとまりとして，一括して反転させる必要があり，これを系統的かつ効率的に行うのは困難である．本研究では，このリネーミング問題を計数母関数 (enumerator) と呼ばれる有限次数の母関数を用いて定式化する．この計数母関数の各係数は節のリネーミング後の正リテラル数に対応していることが示される．そしてさらに計数母関数の1次および0次の係数から得られる命題論理式（ホーン化論理式）を選言標準形 (disjunctive normal form) へと導くことにより，元の節集合をホーン節集合へと変換するリネーミングが一括してすべて求められることを示す．そしてさらに，計数母関数の高次の係数を活用することにより，対象とされる節のリネーミング後の正リテラル数を自由に制御できるようなリネーミングが容易に求められることを示し，この応用として Loveland の節集合分割法への適用例を示す．ここで示されるような，特定の節を複数の正リテラルを持つ節に変換し，残りの節をホーン節へと変換するようなリネーミングを求める問題はこれまで具体的な解法が示されておらず，本方法によってはじめて系統的に解を得ることができる．

2. 節集合のリネーミング

ここでは，導出原理に関する用語・定義は Chang[1)] に従うものとし，連言・選言・否定をそれぞれ「∧」,「∨」,「～」で表すものとする．原子論理式 (atomic formula) またはその否定をリテラルと言い，リテラルの有限個の選言を節と言う．論理式が有限個の節の連言として表されている時，これを連言標準形 (conjunctive normal form) と言う．（選言標準形は，これと双対 (dual) な概念として定義される．この場合のリテラルを特に双対リテラルと呼び，有限個の双対リテラルの連言を双対節 (dual clause) と呼ぶ．選言標準形は有限個の双対節の選言という形をとる．）また，連言標準形の論理式の各節を連結している連言記号をとり除いて論理式の集合とみなしたものを節集合と呼ぶ．節を構成するリテラルのうち正リテラル (positive literal) をたかだか一つしか持たないものをホーン節と呼び，ホーン節のみから成る節集合をホーン節

† A Renaming Method for Set of Clauses Using Generating Functions by HIROAKI NISHIOKA (Information Processing Center, Yamaguchi University).

†† 山口大学情報処理センター
* 現在 福井大学工学部

集合 (Horn set) と呼ぶ．さらに，節集合 S の要素である節の各リテラルのうち，述語記号 $P_1, P_2, \cdots, P_K$ を持つものすべてについて，リテラルの符号（否定記号）を反転して得られる節集合を $r(S;\{P_1, P_2, \cdots, P_K\})$ で表し，これを S の $P_1, P_2, \cdots, P_K$ についてのリネーミング (renaming) と呼ぶ．（ここで，$\{P_1, P_2, \cdots, P_K\}$ は述語記号の集合を表す．）また，節 C についても同様の記法でリネーミングを表すものとする．リネーミングによってホーン節集合が生成されるならば，SNL 導出法や SPU 導出法により証明可能[3]であるが，S と $r(S;\{P_1, P_2, \cdots, P_K\})$ は充足不可能性に関して同値であるので，$r(S;\{P_1, P_2, \cdots, P_K\})$ に対して SNL または SPU 導出法で空節が導かれることと，元の S に対して導出によって空節が導かれることとは同値となる．

3. 計数母関数

与えられた節に対して，リネーミングを行った時にできる節に含まれる正リテラルの個数は，元の節とリネーミングの仕方の両方の関数となる．ここでは，このような関数を直接的に用いるのではなく，その係数が，正リテラルの個数と対応を持つような母関数を考える．

［定義1］ 節Cの計数母関数 (enumerator) $g_C(X)$ は次のように定義される．

$$g_C(X)=\prod_{L\in C} f_L(X)$$

ここで，$\prod_{L\in C}$ は節Cを構成する各リテラルLについての積をとることを意味している．また，Lが述語記号Pを持つリテラルである時，$f_L(X)$ は次のように定義される．

$$f_L(X)=\begin{cases}pX+\bar{p} & \text{（Lが正リテラルの時）}\\ \bar{p}X+p & \text{（Lが負リテラルの時）}\end{cases}$$

ここで p, $\bar{p}$ は，述語記号Pに対応して生成される変数である．（p, $\bar{p}$ は述語記号と区別するために小文字を用いる．）また，X は母関数定義のために導入された形式的な変数であり，それ自身の値には意味はなく，その係数にのみ意味を持つ．

（注） 統計学の積率母関数 (moment generating function) などのように，母関数は一般には，X についての任意の次数の項を持つが，ここで定義された計数母関数は，節の長さ（リテラル数） length (C)を最高次数として持つ多項式となる．また，$f_L(X)$の X の0次項（定数項）が1でないという点において，Liu[4]の計数母関数とも若干異なっている．

［例1］ 節集合 $S_1=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$，$C_1=\sim P(y)\vee Q(y)\vee R(y)$，$C_2=\sim R(y)$，$C_3=\sim Q(y)$，$C_4=P(y)\vee R(y)$ を考える．この時，C_1～C_4 の計数母関数は，それぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned}g_{C_1}(X)&=(\bar{p}X+p)\cdot(qX+\bar{q})\cdot(rX+\bar{r})\\&=\bar{p}qrX^3+(pqr+\bar{p}\bar{q}r+\bar{p}q\bar{r})X^2\\&\quad+(p\bar{q}r+\bar{p}\bar{q}\bar{r}+pq\bar{r})X+p\bar{q}\bar{r}\\ g_{C_2}(X)&=\bar{r}X+r\\ g_{C_3}(X)&=\bar{q}X+q\\ g_{C_4}(X)&=(pX+\bar{p})\cdot(rX+\bar{r})\\&=prX^2+(p\bar{r}+\bar{p}r)X+\bar{p}\bar{r}\end{aligned}$$

4. 論理式生成写像

ここでは3章で定義した計数母関数の各係数から成る式を命題論理式に変換する写像 ω を定義する．

［定義2］ U を算術式の集合，V を命題論理式の集合とする時，写像 $\omega: U\rightarrow V$ は次のように定義される．

（1） p, $\bar{p}$ が定義1において述語記号Pに対応して生成される変数である時，$\omega(p)=P^{**}$，$\omega(\bar{p})=\sim P^{**}$ である．

（ここで P^{**} は p, $\bar{p}$ に対応して生成される命題記号である．）

（2） $E_1, E_2\in U$ の時，$\omega(E_1+E_2)=\omega(E_1)\vee\omega(E_2)$，$\omega(E_1\cdot E_2)=\omega(E_1)\wedge\omega(E_2)$ である．

（3） $E_1\in U$ かつ k が定数である時，$\omega(kE_1)=\omega(E_1)$ である．

（注） 定義2の$\sim P^{**}$ を $\overline{P^{**}}$ と略記し，命題論理の選言記号「$\vee$」および連言記号「$\wedge$」をそれぞれ「+」および「・」で表すならば，式Eと命題論理式 ω(E) の形態上の差異は定数係数の有無だけとなる．（このような表記法は論理回路設計などで日常的に用いられている．）したがって，以下の例題では，この簡略記法を採用し，さらに命題記号 P^{**} についても小文字の p を用いることにより，論理式への書き換えの手数を実質的に省くものとする．

［例2］ 例1の計数母関数について考える．例えば $g_{C_1}(X)$ の1次の係数は $p\bar{q}r+\bar{p}\bar{q}\bar{r}+pq\bar{r}$ であるが，この場合，厳密には

$$\omega(p\bar{q}r+\bar{p}\bar{q}\bar{r}+pq\bar{r})=(P^{**}\wedge\sim Q^{**}\wedge R^{**})\vee(\sim P^{**}\wedge\sim Q^{**}\wedge\sim R^{**})\vee(P^{**}\wedge Q^{**}\wedge\sim R^{**})$$

となる．

しかし，上述の（注）に従って略記するならば，この命題論理式は，$p\bar{q}r+\bar{p}\bar{q}\bar{r}+pq\bar{r}$ となり，少なくとも

形態上は元の算術式のままでよいことになる．例1の四つの計数母関数の各係数について，このことは同様に成り立つ．

5. 母関数による節のリネーミング

写像 ω によって得られる命題論理式と元の節との間の関係について考える．

節Cの計数母関数 $gc(X)$ の n 次の係数が a_n である時，$\omega(a_n)$ を選言標準形で表したものを，$\mathrm{D}_{n,1}^{**}\vee\mathrm{D}_{n,2}^{**}\vee\cdots\vee\mathrm{D}_{n,k}^{**}$ とする．ここで，双対節 $\mathrm{D}_{n,i}^{**}$ $(1\leqq i\leqq k)$ は，双対リテラルの連言として次のように表されているものとする．

$$\mathrm{D}_{n,i}^{**}=\mathrm{d}_1^{**}\wedge\mathrm{d}_2^{**}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}_j^{**}$$

この時，$1\leqq i\leqq k$ の範囲の各 $\mathrm{D}_{n,i}^{**}$ について，次の定理が成り立つ．

［定理1］ 双対節 $\mathrm{D}_{n,i}^{**}$ が j 個の双対リテラル $\mathrm{d}_1^{**}, \mathrm{d}_2^{**}, \cdots, \mathrm{d}_j^{**}$ から構成されるとする．これらの双対リテラルのうちで否定記号を持つもの（負の双対リテラル）の持つ命題記号すべてから成る集合を $N_{n,i}^{**}$ とし，定義1, 2によって，これに対応する節Cの述語記号の集合を $N_{n,i}$ とする．このとき，節Cについて，$N_{n,i}$ に含まれるすべての述語記号に関してリネーミングを行って得られる節 $r(\mathrm{C}; N_{n,i})$ は，ちょうど n 個の正リテラルを含む節である．

（証明） 定義1より，計数母関数 $gc(X)$ は，Cを構成する各リテラルLについての $f_{\mathrm{L}}(X)$ の積の形をとり，各 $f_{\mathrm{L}}(X)$ は，p および $\bar{p}$ を係数として持つ一次式となっている．（ただし，リテラルLは述語記号Pを持つものとする．）したがって，$gc(X)$ の X^n の係数 a_n は，$f_{\mathrm{L}}(X)$ の積の展開後にできる同次の項の係数の和に等しい．

ここで，Lが述語記号Pを持つ正リテラルであるならば，$f_{\mathrm{L}}(X)=pX+\bar{p}$ と定義されているので，p を述語記号Pについてのリネーミングを行わないことに対応させ，$\bar{p}$ を述語記号Pについてのリネーミングを行うことに対応させて考えると，pX を選択することは，リネーミング後にリテラルLが正リテラルになることに対応し，$\bar{p}$ を選択することは，リネーミング後にリテラルLが負リテラルになることに対応すると解釈することができる．

逆に，Lが述語記号Pを持つ負リテラルであるならば，$f_{\mathrm{L}}(X)=\bar{p}X+p$ と定義されているので，正リテラルの場合と同様に，p をPについてのリネーミングを行わないことに対応させ，$\bar{p}$ をリネーミングを行うことに対応させると，$\bar{p}X$ を選択することは，リネーミング後にリテラルLが正リテラルになることに対応し，p を選択することは，リネーミング後にリテラルLが負リテラルになることに対応する．

したがって，Lが正・負どちらのリテラルである場合にも，X についての一次式である $f_{\mathrm{L}}(X)$ の1次の項を選択することは，Lを正リテラルに変換するリネーミングに対応し，$f_{\mathrm{L}}(X)$ の0次の項を選択することは，Lを負リテラルに変換するリネーミングに対応する．（さらに，各係数は，それぞれの場合のリネーミングの仕方を指示している．）

$gc(X)$ の n 次の係数 a_n は，このような $f_{\mathrm{L}}(X)$ $(\mathrm{L}\in\mathrm{C})$ をリテラルLの個数 (length(C)) だけ乗じて生成される．すなわち，a_n は各 $f_{\mathrm{L}}(X)$ のうち，n 個については X の1次の項を選択し，残りの (length(C)$-n$) 個については X の0次の項を選択してできる積の係数を集めたものとなる．

このことは，係数 a_n の指示するリネーミングを行った場合，節Cの中の n 個のリテラルが正リテラルとなり，残りの (length(C)$-n$) 個のリテラルが負リテラルとなることを示している．

a_n を命題論理式 $\omega(a_n)$ に変換する写像 ω は，a_n に含まれる「・」,「+」,「$^-$」をそれぞれ「∧」,「∨」,「～」に置き換え，項の重複を除いているにすぎない．また，$\omega(a_n)$ を選言標準形に直すことは，$\mathrm{P}^{**}\wedge\sim\mathrm{P}^{**}\wedge\mathrm{Q}^{**}$ のような恒偽(F)の双対節を除いているにすぎず，かつこのような双対節に対応するリネーミングは，Pについてリネーミングし，かつPについてリネーミングしないというような相矛盾する要求に対応するため，標準形に変換する際に削除されても問題は生じない．

（証明終）

［例3］ 例1の C_1 および $gc_1(X)$ について考える．$gc_1(X)$ の2次の係数は $pqr+\bar{p}\bar{q}r+\bar{p}q\bar{r}$ であるから，簡略記法で表すと pqr, $\bar{p}\bar{q}r$, $\bar{p}q\bar{r}$ という3個の双対節が得られる．それぞれの場合について，C_1 をリネーミングすると次のようになる．

双対節 pqr は節 C_1 をリネーミングしないことに対応するので，$r(\mathrm{C}_1; \phi)=\sim\mathrm{P}(y)\vee\mathrm{Q}(y)\vee\mathrm{R}(y)$ となる．

双対節 $\bar{p}\bar{q}r$ は節 C_1 を述語記号P，Qに関してリネーミングすることに対応するので，$r(\mathrm{C}_1; \{\mathrm{P}, \mathrm{Q}\})=\mathrm{P}(y)\vee\sim\mathrm{Q}(y)\vee\mathrm{R}(y)$ となる．

双対節 $\bar{p}q\bar{r}$ は，節 C_1 を述語記号P，Rに関して

リネーミングすることに対応するので，$r(\mathrm{C}_1; \{\mathrm{P}, \mathrm{R}\}) = \mathrm{P}(y) \vee \mathrm{Q}(y) \vee \sim\mathrm{R}(y)$ となる．

これらのいずれの場合にも，リネーミング後に得られる節は，正確に2個の正リテラルを持っており，このことは定理1の結論と一致するものである．

［定理2］ 節Cの計数母関数 $gc(X)$ の1次および0次の係数がそれぞれ a_1，a_0 である時，$\omega(a_1+a_0)$ を選言標準形で表したものを，$\mathrm{D}_{\mathrm{H},1}^{**} \vee \mathrm{D}_{\mathrm{H},2}^{**} \vee \cdots \vee \mathrm{D}_{\mathrm{H},k}^{**}$ とする．さらに，各 $\mathrm{D}_{\mathrm{H},i}^{**}$ $(1 \leqq i \leqq k)$ について，定理1と同様に，双対節 $\mathrm{D}_{\mathrm{H},i}^{**}$ を構成するすべての負の双対リテラルの持つ命題記号の集合を $N_{\mathrm{H},i}^{**}$ とし，定義1，2によって，これに対応する節Cの述語記号の集合を $N_{\mathrm{H},i}$ とする．この時，Cに対して $N_{\mathrm{H},i}$ に含まれるすべての述語記号に関してリネーミングを行って得られる節 $r(\mathrm{C}; N_{\mathrm{H},i})$ はホーン節となる．

（証明） 定義2より，$\omega(a_1+a_0) = \omega(a_1) \vee \omega(a_0)$ である．したがって，$\omega(a_1+a_0)$ の選言標準形は，$\omega(a_1)$ および $\omega(a_0)$ の選言標準形をそれぞれ構成する双対節を併合したものとなる．ところが，定理1より，$\omega(a_1)$ から得られるリネーミングをCに施した場合には，ちょうど1個の正リテラルを持つ節が生成され，$\omega(a_0)$ から得られるリネーミングの場合には，0個の正リテラルを持つ節が生成される．したがって，$\omega(a_1+a_0)$ からホーン節が生成されることは明らかである．

（証明終）

［例4］ 例1の C_1 および $gc_1(X)$ について考えると，

$$\begin{aligned}\omega(a_1+a_0) &= \omega((p\bar{q}r + \bar{p}\bar{q}\bar{r} + pq\bar{r}) + (p\bar{q}\bar{r})) \\ &= p\bar{q}r + \bar{p}\bar{q}\bar{r} + pq\bar{r} + p\bar{q}\bar{r}\end{aligned}$$

となり，4個の双対節が得られる．それぞれの双対節に対応するリネーミングの結果は次のようになる．

$r(\mathrm{C}_1; \{\mathrm{Q}\}) = \sim\mathrm{P}(y) \vee \sim\mathrm{Q}(y) \vee \mathrm{R}(y)$

$r(\mathrm{C}_1; \{\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}\}) = \mathrm{P}(y) \vee \sim\mathrm{Q}(y) \vee \sim\mathrm{R}(y)$

$r(\mathrm{C}_1; \{\mathrm{R}\}) = \sim\mathrm{P}(y) \vee \mathrm{Q}(y) \vee \sim\mathrm{R}(y)$

$r(\mathrm{C}_1; \{\mathrm{Q}, \mathrm{R}\}) = \sim\mathrm{P}(y) \vee \sim\mathrm{Q}(y) \vee \sim\mathrm{R}(y)$

これらいずれの場合も，生成される節はホーン節となっており，定理2の結論と一致することが確認される．

次の定理は計数母関数の係数が，X に関する微分によって求められることを示している．

［定理3］ 節Cの計数母関数 $gc(X)$ の k 次の係数を a_k とした時，$a_k = \dfrac{1}{k!} \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}^k gc}{\mathrm{d}X^k}\right|_{X=0}$ である．

（証明） Cの長さ（リテラル数）を l とする（$l=\mathrm{length}(\mathrm{C})$）．この時，$gc(X)$ は次のように表される．

$$gc(X) = a_l X^l + a_{l-1} X^{l-1} + \cdots + a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0$$

したがって，この式を X について k 回微分して $X=0$ を代入すると

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k gc}{\mathrm{d}X^k}\right|_{X=0} = a_k \cdot k!$$

よって，$a_k = \dfrac{1}{k!} \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}^k gc}{\mathrm{d}X^k}\right|_{X=0}$ となる． （証明終）

［例5］ 例1の $gc_1(X)$ の2次の係数 a_2 は

$$a_2 = \frac{1}{2!} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}^2 gc_1}{\mathrm{d}X^2}\right|_{X=0} = pqr + \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}q\bar{r}$$

となる．

［定理4］ 節Cの計数母関数を $gc(X)$ とする時，命題論理式 $\omega\left(\left.\dfrac{\mathrm{d}gc}{\mathrm{d}X}\right|_{X=0} + gc\Big|_{X=0}\right)$ を選言標準形で表したものを，$\mathrm{D}_{\mathrm{H}',1}^{**} \vee \mathrm{D}_{\mathrm{H}',2}^{**} \vee \cdots \vee \mathrm{D}_{\mathrm{H}',k'}^{**}$ とする．さらに，各 $\mathrm{D}_{\mathrm{H}',i}^{**}$ $(1 \leqq i \leqq k')$ について，定理1と同様に，双対節 $\mathrm{D}_{\mathrm{H}',i}^{**}$ を構成するすべての負の双対リテラルの持つ命題記号からなる集合を $N_{\mathrm{H}',i}^{**}$ とし，定義1，2によって，これに対応する節Cの述語記号の集合を $N_{\mathrm{H}',i}$ とする．この時，節 $r(\mathrm{C}; N_{\mathrm{H}',i})$ は，ホーン節となる．

（証明） $gc(X)$ の1次および0次の係数をそれぞれ a_1，a_0 とすれば，定理3から

$$\omega\left(\left.\frac{\mathrm{d}gc}{\mathrm{d}X}\right|_{X=0} + gc\Big|_{X=0}\right) = \omega(a_1+a_0)$$

が導かれるので，定理2により，節 $r(\mathrm{C}; N_{\mathrm{H}',i})$ が，ホーン節になるのは明らかである． （証明終）

6. 母関数による節集合のリネーミング

5章では，母関数を用いて単独の節をリネーミングする場合について考察した．節を単独でリネーミングするということは実際にはありえず，通常は節集合の単位で同時に同じリネーミングを施し，かつその結果としてできる節集合がホーン節集合となることが望まれている．ここでは，3章で各節ごとに定義した計数母関数を，同一の節集合に含まれるすべての節に関して組み合わせて用いることにより，節集合をホーン節集合に変換するリネーミングが求められることを示す．

［定義3］ 節集合 S が与えられた時，S のホーン化論理式 (Hornizing formula) $Hr(S)$ は次のように定義される命題論理式である．

$$Hr(S) = \omega\left(\prod_{\mathrm{C} \in S}\left(\left.\frac{\mathrm{d}gc}{\mathrm{d}X}\right|_{X=0} + gc\Big|_{X=0}\right)\right)$$

（ここで，$\prod_{\mathrm{C} \in S}$ は S のすべての要素についての積をと

ることを意味している．また，$gc(X)$ および ω はそれぞれ定義 1，2 で与えられたものと同じである．)

［定理 5］ 節集合 S のホーン化論理式 $Hr(S)$ を選言標準形で表したものを，$D_1^{**} \vee D_2^{**} \vee \cdots \vee D_k^{**}$ とする．(ただし $D_i^{**} = d_{i,1}^{**} \wedge d_{i,2}^{**} \wedge \cdots \wedge d_{i,m(i)}^{**}$ とする $(1 \leqq i \leqq k)$.) 各双対節 D_i^{**} について，集合 $N_i^{**} = \{P_{i,j}^{**} \mid 1 \leqq j \leqq m(i)$ かつ $P_{i,j}^{**}$ は負の双対リテラル $d_{i,j}^{**}$ の持つ命題記号$\}$ を考え，さらに定義 1，2 において，N_i^{**} に対応する S の述語記号の集合を N_i とする．この時，リネーミングによって得られる節集合 $r(S; N_i)$ はホーン節集合である．

(証明) 定義 3 の式に，定義 2 (2) を適用すると

$$Hr(S) = \bigwedge_{C \in S} \left\{ \omega \left(\left. \frac{dgc}{dX} \right|_{X=0} + \left. gc \right|_{X=0} \right) \right\}$$

となる．(ここで $\bigwedge_{C \in S}$ は，S のすべての要素 C についての連言をとることを意味している．)

定理 4 により，$\omega \left(\left. \frac{dgc}{dX} \right|_{X=0} + \left. gc \right|_{X=0} \right)$ の選言標準形の双対節の負の双対リテラルによるリネーミングは節 C をホーン節とする．したがって，$\omega \left(\left. \frac{dgc}{dX} \right|_{X=0} + \left. gc \right|_{X=0} \right)$ を，S の各要素 C ごとに連言をとることは，各リネーミングの共通部分を取り出すことにほかならない．よって $Hr(S)$ の選言標準形の各双対節の負の双対リテラルから得られるリネーミングは，明らかに S のすべての節をホーン節に変換する． (証明終)

［例 6］ 例 1 の節集合 S_1 のホーン化論理式 $Hr(S_1)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} Hr(S_1) = \omega \Bigg(& \left(\left. \frac{dgc_1}{dX} \right|_{X=0} + \left. gc_1 \right|_{X=0} \right) \\ & \cdot \left(\left. \frac{dgc_2}{dX} \right|_{X=0} + \left. gc_2 \right|_{X=0} \right) \\ & \cdot \left(\left. \frac{dgc_3}{dX} \right|_{X=0} + \left. gc_3 \right|_{X=0} \right) \\ & \cdot \left(\left. \frac{dgc_4}{dX} \right|_{X=0} + \left. gc_4 \right|_{X=0} \right) \Bigg) \\ = {} & pq\bar{r} + p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}\bar{q}\bar{r} \end{aligned}$$

したがって，$Hr(S_1)$ の選言標準形は三つの双対節から成る．各双対節に対応する S_1 のリネーミングは，それぞれ次のようになる．

$pq\bar{r}$ の場合，述語記号 R についてのみ，リネーミングすればよいので，

$r(S_1; \{R\})$
$= \{\sim P(y) \vee Q(y) \vee \sim R(y),$
$R(y), \sim Q(y), P(y) \vee \sim R(y)\}$

となる．

$p\bar{q}\bar{r}$ の場合には，

$r(S_1; \{Q, R\})$
$= \{\sim P(y) \vee \sim Q(y) \vee \sim R(y),$
$R(y), Q(y), P(y) \vee \sim R(y)\}$

となる．

$\bar{p}\bar{q}\bar{r}$ の場合には，

$r(S_1; \{P, Q, R\})$
$= \{P(y) \vee \sim Q(y) \vee \sim R(y),$
$R(y), Q(y), \sim P(y) \vee \sim R(y)\}$

となる．

これら 3 通りのいずれの場合も，明らかにホーン節集合が生成されている．

7. 節集合の分割

6 章では，計数母関数を用いて，節集合をホーン節集合に変換するリネーミングが求められることを示した．ホーン節集合への変換には計数母関数の係数のうちの 1 次項と 0 次項の係数以外は必要とされない．これに対して，ここでは同じ計数母関数の高次項を用いることによって，ホーン節集合よりも条件のゆるやかな節集合を得るリネーミングを求めることができることを示し，その例として Loveland[2] の分割法 (Splitting) への適用を示す．

Loveland の分割法は，分配律に基づく次の関係が成立することを利用している．

$$S \wedge (L_1 \vee L_2 \vee C) \equiv (S \wedge (L_1 \vee C)) \vee (S \wedge (L_2 \vee C))$$

ここで，S がいくつかのホーン節の連言であり，L_1, L_2 が正リテラルであり，かつ C が負リテラルの選言であるならば，$S \wedge (L_1 \vee L_2 \vee C)$ から得られる節集合は，一つの節を除いてすべてホーン節から成るのに対し，$S \wedge (L_1 \vee C)$ および $S \wedge (L_2 \vee C)$ から得られる節集合は，ともにホーン節集合となる．Loveland の分割法では，後者の二つのホーン節集合を用いて証明を行うが，その際に両者の間の共有変数への代入に考慮する必要がある．

［例 7］ 節集合 $S_2 = \{C_5, C_6, C_7, C_8\}$

$C_5 = \sim P(y) \vee \sim Q(y) \vee R(y)$,
$C_6 = P(y) \vee P(a)$, $C_7 = Q(y) \vee Q(z)$,
$C_8 = \sim R(y)$

について考える．S_2 に対していかなるリネーミングを行っても，ホーン節集合を得ることはできない．したがって，S_2 を Loveland の分割法を適用できるような形，すなわち $C_6 \sim C_8$ をホーン節とし，C_5 をちょ

うど正リテラル2個を持つ節へと変換するリネーミングを考える.

このようなリネーミングを求めるには，ホーン化論理式 $Hr(S_2)$ を次のように修正した式を用いればよいことは，定理1，3より明らかである.

$$
\begin{aligned}
Hr'(S_2)=\omega\Biggl(&\Biggl(\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2 gc_8}{dX^2}\bigg|_{X=0}+\frac{dgc_8}{dX}\bigg|_{X=0}\\
&+gc_8\bigg|_{X=0}\Biggr)\cdot\Biggl(\frac{dgc_6}{dX}\bigg|_{X=0}+gc_6\bigg|_{X=0}\Biggr)\\
&\cdot\Biggl(\frac{dgc_7}{dX}\bigg|_{X=0}+gc_7\bigg|_{X=0}\Biggr)\\
&\cdot\Biggl(\frac{dgc_8}{dX}\bigg|_{X=0}+gc_8\bigg|_{X=0}\Biggr)\Biggr)\\
=&(\bar{p}\bar{q}\bar{r}+p\bar{q}r+\bar{p}qr+pqr\\
&+p\bar{q}\bar{r}+\bar{p}q\bar{r}+pq\bar{r})\cdot\bar{p}\cdot\bar{q}\\
=&\bar{p}\bar{q}\bar{r}
\end{aligned}
$$

したがって，述語記号P，Q，Rについて S_2 をリネーミングすれば目的の節集合が得られる.

$r(S_2;\ \{P, Q, R\})$
$=\{P(y)\vee Q(y)\vee\sim R(y),$
$\sim P(y)\vee\sim P(a), \sim Q(y)\vee\sim Q(z), R(y)\}$

ホーン節でない節は $P(y)\vee Q(y)\vee\sim R(y)$ だけであるので，$r(S_2;\ \{P, Q, R\})$ に対して，Loveland の分割法を適用すると，次の二つのホーン節集合 S_2'，S_2'' が得られる.

$S_2'=\{P(y)\vee\sim R(y), \sim P(y)\vee\sim P(a),$
$\sim Q(y)\vee\sim Q(z), R(y)\}$
$S_2''=\{Q(y)\vee\sim R(y), \sim P(y)\vee\sim P(a),$
$\sim Q(y)\vee\sim Q(z), R(y)\}$

S_2' からは次のようにして反駁（空節を導く演えき）が得られる．節 $P(y)\vee\sim R(y)$ と $\sim P(y)\vee\sim P(a)$ との導出により $\sim R(a)$ が得られる．この導出形と R(y との導出により空節が得られる.

S_2'' の反駁を行う前に，節 $Q(y)\vee\sim R(y)$ に対して，S_2' との共有変数 y に a を代入しておく必要がある．すなわち S_2'' の第一の節は $Q(a)\vee\sim R(a)$ としておく．この節と $\sim Q(y)\vee\sim Q(z)$ との導出により，$\sim R(a)$ が得られ，この導出形と $R(y)$ との導出により空節が得られる.

このようにして，S_2' および S_2'' の反駁が得られ，両者から S_2 が充足不可能であることが保証される.

8. むすび

節集合のリネーミング問題が，計数母関数の係数から得られるホーン化論理式の計算へと還元できることを示した．本方法は，節集合をホーン節集合へと変換するすべてのリネーミングを一括して求めることができるという利点を持ち，この点で原則として一度に一個のリネーミングしか求まらない 0-1 計画法を用いたリネーミング法[5]などと大きく異なる．またリネーミング計算の過程において，ホーン化論理式が生成されるという点では，行列を用いたリネーミング法[6]と共通概念を用いているが，行列による方法では計数母関数における2次以上の高次係数に対応するものが定義されていないため，ホーン節よりもゆるやかな条件の節を求めることができない．ここで用いられるホーン化論理式の展開計算に際しては，論理回路設計等に用いられている簡略記法を用いることが有効であり，これによって計算の手数を大幅に短縮できることを示した．さらに，ホーン化論理式の定義においては用いられない計数母関数の2次以上の高次係数を用いることによって，含まれる正リテラル数に関してホーン節集合よりもゆるやかな条件を満たす節集合を得るリネーミングが求められることを示し，その応用として Loveland の分割法による証明への適用例を示した．このような問題に関しては，0-1 計画法や行列を用いた方法は全く無力であるため，今までは発見的な手法によってのみ解かれており，手続き的な方法は確立されていなかった．このように，計数母関数を用いたリネーミング法は他の方法と比較した場合，その理論的拡張性に特色があり，ホーン節集合を得るためよりも，むしろより一般的な性質を持つ節集合を理論的にすべて列挙する必要がある場合に適用する方が適していると考えられる．Loveland の分割法以外の分野にも本方法を適用することが今後の課題である.

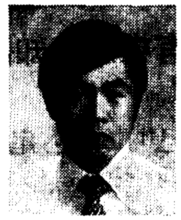
謝辞 本研究は文部省科学研究費によって行われた.

参考文献

1) Chang, C.L. and Lee, R.C.T.: *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, New York (1973).
2) Loveland, D.W.: *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*, North Holland, Amsterdam (1978).
3) Kuehner, D.: Some Special Purpose Resolution Systems, *Machine Intelligence 7*, pp. 117-128 (1972).
4) Liu, C.L.: *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill (1968).
5) 西岡弘明：0-1 計画法を用いた節集合の簡約法，信学論（D)，Vol. J 67-D, No. 11, pp. 1317-

1324 (1984).
6) 西岡弘明：行列を用いた節集合の簡約法，信学論(D)，Vol. J 69-D, No. 1, pp. 72-79 (1986).

(昭和 61 年 1 月 8 日受付)
(昭和 61 年 8 月 27 日採録)



西岡 弘明（正会員）

昭和 27 年生．昭和 51 年大阪大学工学部通信工学科卒業．昭和 56 年同大学院工学研究科通信工学専攻博士課程修了．工学博士．同年山口大学情報処理センター助手．昭和 61 年福井大学工学部助教授，現在に至る．人工知能・自動定理証明・プログラム理論・記号処理言語に関する研究に従事．電子通信学会，IEEE 各会員．