

## J-9 乱数を用いた動き推定による降雪の効率的シミュレーション

An Efficient Method for Simulation of Snowfall Approximating its Movement Using Random Numbers

山田 文裕† 土橋 宜典† 山本 強†  
Fumihiro Yamada Yoshinori Dobashi Tsuyoshi Yamamoto

## 1 はじめに

コンピュータグラフィックスを用いて様々な屋外景観画像が生成されている。中でも季節特有の自然景観画像の生成は魅力的なテーマのひとつであり、特に冬季の降雪および積雪現象は代表的なものといえる。積雪画像に関しては現在までに様々な手法が提案されてきたが、降雪まで考慮しているものはほとんどない。したがって本稿では、降雪による雪片(snowflake)のリアルな動きシミュレーションする手法を提案する。まず雪の結晶の集合体である雪片のモデルを定義し、その雪片が落下する動きを物理法則に基づいて計算する。さらに、算出した様々な雪片の落下軌跡を解析することで軌跡の近似式を算出する。これにより複雑な運動方程式を解くことなく容易に降雪シミュレーションが可能となる。

## 2 降雪のシミュレーション

自然界において雪片は数千メートルの高さから大気中を落下する。このとき雪片はその形状に依存して、単に真下に落下するのではなく、特徴的な動きをする。降雪のシミュレーションにあたり物理法則に基づき雪片の運動方程式を導出し、オイラー法を用いて雪片の動きを算出する。

## 2.1 雪片モデル

雪の結晶は針状・角柱・角板・樹枝・つづみなどが存在し、雪片はこれらの雪の単結晶または複数の組み合わせで構成されている。しかし、結晶は一般に非常に小さく、それぞれの形状を正確に表現することは困難である。また、雪片の動きは雪片の面積および落下姿勢(慣性主軸が水平面となす角度)に大きく依存することが確認されている[3]。したがって本稿では、この2点に注目し、下記の方法により雪片形状のモデル化を行う(図1参照)。

- ・結晶を1つの質点とみなし、雪片はこの質点の集合体とする。
- ・結晶  $a_i$  は2点(始点  $O$  と終点  $A_i$ ) から与えられ、終点  $A_i$  を質点とする。また、2点間の距離を直径とみなし結晶の表面積および体積は、これを直径とする円の表面積そして球の体積とする。
- ・結晶が付着する場合、次の結晶  $a_{i+1}$  は  $O$  を共有し終点  $A_{i+1}$  との2点から与えられる。
- ・ $\Sigma A_i$  から雪片の重心  $C$  を計算する。 $C$  と  $A_i$  で決まる平面を雪片の形状とする。

## 2.2 作用する力

雪片に働く力  $F$  は21節の雪片を構成する各結晶に働く力  $f$  の総和である。働く力の要素としては重力  $G$ 、浮力  $L$ 、そして空気による抵抗力  $R$  が挙げられる。重力は常に鉛直下向きに働く力であり、浮力はそれを妨げる向きに働く力である。空気抵抗は運動速度の2乗に比例する値を持ち、図2に示すように、結晶面に対して垂直に働くことにする。以上より  $F$  は(1)式で表わすことができる[1]。

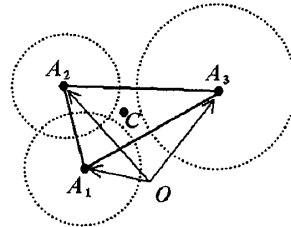


図1 雪片モデル

$$F = \sum_{i=0}^n f_i \quad (1)$$

$$f_i = G_i - L_i - R_i$$

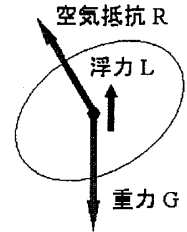


図2 雪片に働く力

ここで、重力  $G_i$ 、浮力  $L_i$ 、空気抵抗  $R_i$  は以下の式により計算できる。

## ① 重力 (1)式第1項)

$$G = \rho_s V g$$

$\rho_s$ : 結晶の密度,  $V$ : 結晶の体積,  $g$ : 重力加速度

## ② 浮力 (1)式第2項)

$$L = \frac{\rho_a}{\rho_s} V g$$

$\rho_a$ : 空気の密度

## ③ 空気抵抗 (1)式第3項)

$$(R_x, R_y, R_z) = \left( C_x \frac{1}{2} \rho_a S v^2, C_y \frac{1}{2} \rho_a S v^2, C_z \frac{1}{2} \rho_a S v^2 \right)$$

$C_x, C_y, C_z$ : 抵抗係数,  $S$ : 結晶の表面積,  $v$ : 雪片の速度

3つの力がつりあったとき、つまり(1)式において  $F=0$  となったとき、雪片の落下速度は一定となりこのときの速度が終端速度(terminal velocity)  $v_t$  である。

## 2.3 オイラー法

雪片の加速度を  $a$ 、速度を  $v$ 、質量を  $m$  とすると、22節の雪片にかかる力  $F$  を用いて(2)式のような運動方程式で表せる。

$$m a = m \frac{\partial v}{\partial t} = F \quad (2)$$

力  $F$  は、複雑な雪片の形状に依存しているため、(2)式を解析的に解くことは困難である。したがってオイラー法を用いて数值的に計算する。微小時間  $\Delta t$  を考え、離散的な時刻  $t_n = n \Delta t$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) での雪片の位置  $p$  と速度  $v$  を考えると(3)(4)式が得られる。

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + \frac{F(t_n)}{m} \Delta t \quad (3)$$

$$p(t_{n+1}) = p(t_n) + v(t_{n+1}) \Delta t \quad (4)$$

## 2.4 モーメント

各雪片に対して、図1に示すように結晶の終点  $A_i$  と重心  $C$  から求められる位置ベクトル  $r_i (=C - A_i)$  と22節の雪片にかかる力  $F$  よりモーメント  $N_i$  が得られる。

$$\sum_{i=0}^n N_i = \sum_{i=0}^n r_i \times F \quad (5)$$

† 北海道大学大学院工学研究科

このとき結晶の質量を  $m_i$  とすると慣性モーメント  $I$  が求まり、角速度を  $\omega$  とすると (6) 式が得られる。

$$I = \sum_{i=0}^n m_i |r_i|^2$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=0}^n N_i \quad (6)$$

(5) 式が値をもつとき雪片は重心を通る  $y$  軸を中心に (6) 式で求められる角速度  $\omega$  で回転する。

### 2.5 シミュレーション結果

高度 1000m に雪片を発生させて (3)(4)(5) 式に基づいて雪片の落下シミュレーションを行った (図 3)。このとき用いたパラメータを以下に示す。[2]

結晶数  $i=4$  (雪片長径=23[cm])  
 結晶の密度  $\rho_s=0.08[\text{g}/\text{cm}^3]$ , 空気密度  $\rho_a=0.0012[\text{g}/\text{cm}^3]$   
 重力加速度  $g=9.80665[\text{m}/\text{s}^2]$ , 空気の粘性係数  $\mu=0.00018$

この結果、どの雪片もほぼ図 3 のようならせんを描きながら落下した。終端速度は  $v_t = 38.2[\text{cm}/\text{s}]$  となり、実際の降雪現象と比較してみても良好な結果といえる[3]。

### 3 雪片の動き推定

降雪のシミュレーションを行うためには、大量の雪片を落下させる必要があり、前節の方法では、多くの計算時間を必要とする (図 6)。そこで、シミュレーションにより得られた雪片落下の軌跡を解析し、類似した落下軌跡を乱数を用いて擬似的に生成することを考える。2.5 節から雪片はらせん状に落下していくことがわかった。落下速度は終端速度に達した後は一定値のままである。雪片の形状により変化する値はらせんの振幅  $amp$ 、周期  $T$ 、雪片の終端速度  $v_t$  である。図 4 に、様々な雪片に対するらせんの振幅を示す。図 4 からわかるとおり、バラつきはあるが一定の範囲内に値はおさまっている。したがって、様々な雪片の落下シミュレーションからそれぞれの平均および標準偏差を求める。そして、これらの値を用いて乱数を発生させる。得られた乱数値をらせんの振幅・周期・終端速度として用い、雪片をそのらせん形状に沿って落下させる。これにより、前節で述べた数値シミュレーションを行う必要がないため、大量に雪片を落下させても少ない計算時間で降雪のシミュレーションを行うことができる。図 4 から振幅について  $N=200$  個の雪片から平均および標準偏差  $s$  を求めると、

$$\overline{amp} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N amp_i = 7.76[\text{cm}]$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (amp_i - \overline{amp})^2} = 3.73[\text{cm}]$$

となりまた、終端速度・周期についても同様に平均および標準偏差を求めた。なお、らせん形状に沿った雪片の軌跡  $(x(t), y(t), z(t))$  は次式で与えられる。図 5 に、上述の本手法により生成した雪片の軌跡の一例を示す。

$$x(t) = amp \cos \frac{2\pi}{T} t + x_0$$

$$y(t) = v_t t + y_0$$

$$z(t) = amp \sin \frac{2\pi}{T} t + z_0$$

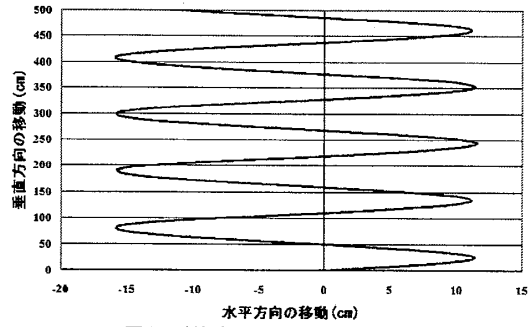


図 3 計算式による雪片の xy 平面投影

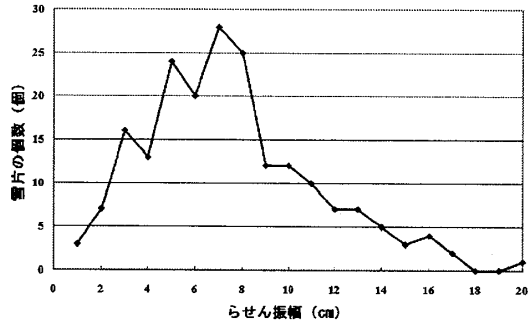


図 4 様々な雪片に対する振幅の比較

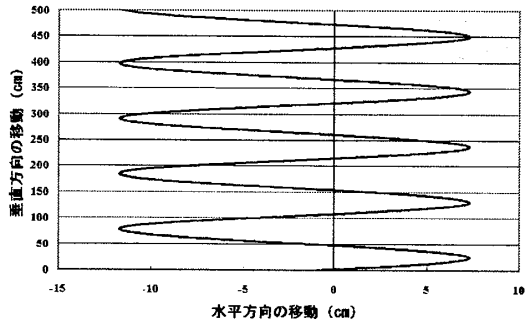


図 5 近似式による雪片の xy 平面投影

時間/計算法	物理計算	近似計算
計算時間[ms]	51.7	0.317

図 6 計算時間比較 (CPU: Pentium4 1.8GHz)

但し、 $4.03 < amp < 11.49[\text{cm}]$ ,  $1.888 < T < 2.952[1/\text{s}]$ ,  $24.6 < v_t < 48.8[\text{cm}/\text{s}]$ 。

### 4 まとめと今後の課題

物理法則を用いて正確に雪片の落下のシミュレーションを行った。そしてそれを解析することで近似的に雪片落下の軌跡を生成する手法を提案した。この提案手法は雪のみならず他の落下物への応用も期待できる。今後は[4]の積雪画像と融合しフォトリアリスティックな雪景色のレンダリングを目指す。

### 参考文献

- [1] M.Tada “物理学概説 上巻”, 学術図書出版社, 1974
- [2] K.Kikuchi, T.Ohata and M.Higashimura “降雪現象と積雪現象”, 古今書院, 1995
- [3] T.Shina, K.Muramoto “連続画像を用いた降雪雪片の落下解析システム”, 画像電子学会誌, Vol31, No.3, 2002
- [4] F.Yamada, Y.Dobashi and T.Yamamoto “輝度分布テーブルを利用した雪の高速レンダリング”, 電子情報通信学会総合大会, D-12-89, 2002