

有限要素法-カルマンフィルタ解析

Kalman Filter - Finite Element Method Analysis of the inverse problem about source presumption of current in Magnetoencephalography

井上 藍† 宮崎 保光†
Ai Inoue Yasumitsu Miyazaki

1. はじめに

脳磁図 (MEG) より脳内の電気活動を推定するような、結果から原因を推定する逆問題を解くには適当なモデルを仮定し、観測されるであろう磁界を計算する順解析と、それを元にした逆解析が必要となる。順解析には生体の複雑性を考慮し、有限要素法を適用する。有限要素法の精度を向上させるために、Delaunay 三角分割法による要素自動分割を用いた。また、ジオサバールの法則による理論値と数値計算結果の比較を行い、数値計算の精度を計算し、有限要素法による同心円モデルの順解析では脳内に単一雙極子を配置した場合の頭皮法線成分の磁界分布を求めた。また逆解析にはカルマンフィルタを用いる。そのためのアルゴリズムの定式化を行い、有限要素法-カルマンフィルタによる逆解析を行った。

2. 順解析

2次元場で、なおかつ頭部断面内に雙極子が平行に存在すると、頭皮に垂直に磁場を測定するので MEG では観測できない。従って、紙面に垂直な z 方向の電流源 (\mathbf{J}_z) を扱うので、MEG において測定される磁界 \mathbf{B} は、ベクトルポテンシャルを用いて以下の式に支配される。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_z, \quad \nabla^2 \mathbf{A}_z = -\mu \mathbf{J} \quad (1)$$

μ は透磁率で生体では $\mu = \mu_0$ ($4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$) で一定である^[2]。ベクトルポテンシャルは z 方向の成分のみを持つことになるので、 \mathbf{A}_z で表す。

(1) 式の Poisson 方程式を解くために有限要素法、ここでは Galerkin の重み付き残作法を用いる。(1) 式において、領域 Ω で未知関数 \hat{A}_z を n 個の既知の関数列 ϕ_j ; $j = 1 \sim n$ を用いて近似されるとすると、

$$\hat{A}_z = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \quad (2)$$

重み関数 w_i , $i = 1 \sim n$ を乗じて積分し、それを 0 とおく。

$$\int \left\{ w_i \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial y^2} \right) + w_i J_z \right] \right\} d\Omega = 0 \quad (3)$$

上式の二階微分に関する項を、Green-Gauss の定理により部分積分すると、

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} w_i \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial y^2} \right) + J_z \right\} dx dy \quad (4) \\ &= \int \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial x} w_i dy - \int \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial y} w_i dx - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial y} - w_i J_z \right) dx dy \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{1}{\mu} \int \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial x} w_i dy - \frac{1}{\mu} \int \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial y} w_i dx = \int \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial n} w_i d\Gamma \quad (5)$$

となる。各要素について内挿関数による補間を考えると、面積座標 $N_{1,3}$ と、e 番目の三角要素各頂点のベクトルポテンシャル値 $\hat{A}_{z1}^e, \hat{A}_{z2}^e, \hat{A}_{z3}^e$ を用いて次式を得る。

$$A_z = N_1 A_{z1}^e + N_2 A_{z2}^e + N_3 A_{z3}^e \quad (6)$$

$$N_1 = \xi, N_2 = \eta, N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (7)$$

重み関数、要素座標もこれと同様の補間を適用する。ここで、残差 \mathbf{R} を要素上の積分量の和で表すと、

$$\mathbf{R} = \sum_{e=1}^m \mathbf{R}_i^e, \quad i = 1 \sim n \quad (8)$$

内挿関数を用い、e 番目の要素のみの寄与を考える。また、Galerkin 法では、重み関数は以下の式で与えられる。

$$w_i = \begin{cases} N_i & \text{要素 } e \text{ 内} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (9)$$

各要素に分割された残差は次式のようになる。($N_{1,3}$: 三角要素の面積座標)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^e &= \sum_{j=1}^3 \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega A_{zj}^e \\ &\quad - \int N_i J_0 d\Omega - \int N_i \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \quad (10) \end{aligned}$$

上式をまとめてマトリックス表示すると、

$$\{\mathbf{R}^e\} = [\mathbf{K}]\{A_z^e\} - \{f^e\} - \left\{ \int N_i \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad (11)$$

$$\{f^e\} = \left\{ \int_{\Omega^e} N_i J_z d\Omega \right\} \quad (12)$$

$\{\mathbf{R}^e\} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$ より次のように書き直すことができる。

$$[\mathbf{K}]\{A_z\} = \{f\} \quad (13)$$

これを解くと、各節点上の未知ポテンシャルが得られる。

以上の理論により、(1) 式から数値計算を用いて頭皮上のベクトルポテンシャル求めることができる。三角分割には、Delaunay 三角分割法による要素自動生成法を用いた^[3]。

図 2 に、中心部に電流源を配置した同心楕円モデルを分割し、可視化した結果を示す。電流源付近と散乱の多い頭蓋骨の部分が細かく三角分割されていて、解析モデルとしては良いものである。また、半径 7.8cm の位置に 10.0nA/m² の大きさの電流源を配置したモデルの半径 9.0cm の頭皮上の放線方向磁束密度を計算した結果とジオ・サバール則による理論値との比較を図 3 に示す。精度は、99.7% であった。

† 豊橋技術科学大学 工学部

3. カルマンフィルタを用いた逆解析

(13)式の{A₁}を観測項{A₂^{*}}と非観測項{A₂⁺}に分け, {A₂^{*}}を消去する.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2^* \\ A_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^* \\ f^+ \end{bmatrix} \quad (14)$$

$((K_{11}) - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])\{A_2^*\} = -[K_{12}][K_{22}]^{-1}\{f^+\}$ (15)
 $-[K_{12}][K_{22}]^{-1} = [H]$, $((K_{11}) - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])\{A_2^*\} = \{u\}$
 と置くと, 次の線形確率システムを考えることになる.

$$\{u\} = [H]\{f\} + \{v\} \quad (16)$$

{v}は共分散行列[R]の観測雑音ベクトルである. このような系のカルマンフィルタは以下の4式の繰り返しアルゴリズムで得られる.

フィルタ方程式

$$\{\hat{f}_{t+1}\} = \{\hat{f}_{t+1}\} + [K_t]\{u_t\} - [H_t]\{\hat{f}_{t+1}\} \quad (17)$$

推定誤差共分散行列[P]

$$[P_{t+1}] = [P_{t+1}] - [K_t][H_t][P_{t+1}], \quad t = 0, 1, \dots \quad (18)$$

カルマンゲイン[K]

$$[K_t] = [P_{t+1}][H_t]^T([H_t][P_{t+1}][H_t]^T + [R_t])^{-1} \quad (19)$$

初期条件

$$\{\hat{f}_{0+1}\} = \hat{f}_0, [P_{0+1}] = \Sigma_0 \quad (20)$$

しかし, 上のアルゴリズムでは, [P]が桁落ちを生じて精度が悪くなり, 結果的にフィルタが数値不安定になる. そこで, [P]をU-D分解し, 新たに桁落ちのないアルゴリズムに変換する⁽⁴⁾.

$$a_t = \{h_t(1)\}^T [P_{t+1}] \{h_t(1)\} + R_t(1) \quad (21)$$

とおく. ここで, [P]_t, [P]_{t+1}が

$$[P_t] = [U_t][D_t][U_t]^T, [P_{t+1}] = [U_{t+1}][D_{t+1}][U_{t+1}]^T \quad (22)$$

のようにU-D分解されているとすると,

$$\begin{aligned} [U_t][D_t][U_t]^T &= [U_{t+1}][D_{t+1}] - c_{t+1}[D_{t+1}][U_{t+1}]^T \\ &\cdot \{h_t(1)\}\{h_t(1)\}^T [U_{t+1}][D_{t+1}][U_{t+1}]^T \\ &= [U_{t+1}][D_{t+1}] - c\{g\}\{g\}^T [U_{t+1}]^T \end{aligned} \quad (23)$$

を得る. ただし,

$$\{e\}^T = (e_1, \dots, e_n) = \{h_t(1)\}^T [U_{t+1}] \quad (24)$$

$$\{g\} = (g_1, \dots, g_n)^T = [D_{t+1}]\{e\}^T, g_j = d_{j,t+1}e_j, j = 1 \dots n$$

このときカルマンゲイン[K]は次のアルゴリズムで与えられる.

$$[U_{t+1}] = [\{\bar{u}_1\}, \dots, \{\bar{u}_n\}], [D_{t+1}] = \text{diag}(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n) \quad (25)$$

$$[U_t] = [\{\hat{u}_1\}, \dots, \{\hat{u}_n\}], [D_t] = \text{diag}(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n) \quad (26)$$

で与えられているとすると, j=1に対して,

$$a_1 = R_t(1) + e_1g_1, \{K_1\} = (g_1, 0, \dots, 0)^T \quad (27)$$

$$\hat{d}_1 = \hat{d}_1R_1(1)/a_1, \hat{u}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \quad (28)$$

とおき, j=2, ..., nに対して,

$$a_j = a_{j-1} + e_j^T g_j \quad (29)$$

$$\hat{d}_j = \bar{d}_j a_{j-1} / a_j \quad (30)$$

$$\lambda_j = e_j / a_{j-1} \quad (31)$$

$$\{\hat{u}_j\} = \{\bar{u}_j\} - \lambda_j \{K_{j-1}\} \quad (32)$$

$$\{K_j\} = \{K_{j-1}\} + g_j \{\bar{u}_j\} \quad (33)$$

を繰り返し計算する. また,

$$[K] = [K]/a \quad (34)$$

とおく. このアルゴリズムと順解析の結果を用いて逆解析を行った. モデルは, 直径10cmの円モデルで, y軸上(頭中心から2cmの位置; (x,y)=(0,2))で紙面に垂直な方向に電流源(1[nA/mm²])を配置した. その計算結果を図4に示す. 推定位置は, (x,y) = (0.0125, 1.95)で, 真値と比べx方向に0.125cm, y方向に0.05cmの誤差があった. また, 推定電流源の大きさは, 1.23[nA/mm²]で, 0.23[nA/mm²]の誤差があった.

4. 今後の方針

今後はより頭部に近い形状のモデルでの解析を行う. また, 複数の電流源の推定, 深い位置にある電流源の推定, 並びに雑音を加えた場合の推定を検討する.

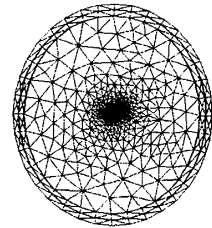
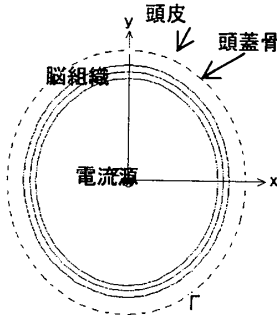


図1 解析モデル(楕円) 図2 分割結果(節点数660)

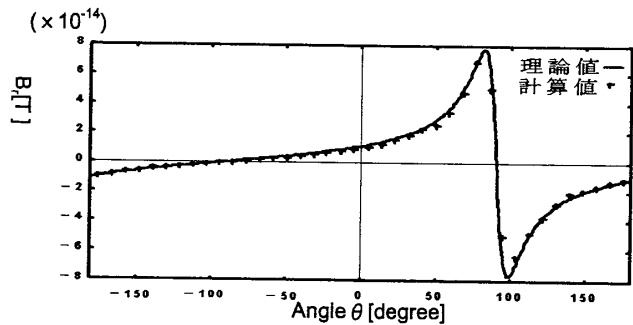


図3 順解析の計算結果

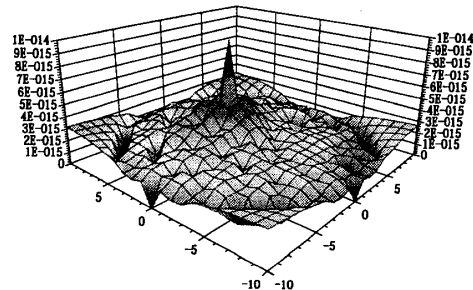


図4 逆解析結果

[参考文献] [1]田代洋行, 宮崎保光: MEGの有限要素法を用いた順・逆解析, 信学技法, BME95-131(1995)
 [2]Lauterbur, P. C., etal: Imaging formation by induced local interactions examples employing nuclear magnetic resonance, Nature, 242, pp190-191(1973)
 [3]谷口健男: FEMのための要素自動分割, 森北出版, pp9-21(1992)
 [4]片山徹: 新版応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, pp86-90,172-175,(2000)