A安定な対称補間型ブロック法[†]

小藤 俊幸[††]

常微分方程式の初期値問題に対するA安定な数値解法は stiff な問題に対してその有効性が知られている．本論文では，Lagrange 補間から構成されるブロック法の幾つかの A 安定なクラスの存在を示す．具体的には，対称に分布した標本点（対称分点）上の Lagrange 補間多項式から構成される（対称補間型と称す）ブロック法がA安定となるための対称分点の条件を示し，A安定なブロック法のクラスの存在を示す．さらに，対称分点の特別な場合として，Gegenbauer 多項式のゼロ点を分点とするブロック法において，Legendre 多項式のゼロ点を分点に用いる Gauss-Legendre 型公式やChebyshev 多項式のゼロ点を分点に用いる Wright の方法を含む，A安定なクラスが存在することを示す．

1. はじめに

常微分方程式（ODE）の初期値問題

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)(a<x<b),\quad y(a)=y_0 \qquad (1.1)$$

に対する数値解法のひとつであるブロック法の安定性について考察する．もともとブロック法は多段階法の出発値を得るための計算法として Milne によって提案された方法であるが，Rosser により，ODE の初期値問題の一般的な解法に改良された[9]．

近年，安定性の興味とベクトル，並列計算機を中心とする ODE 解法の高速化の観点から，ブロック法は再び注目され始めた．実際，安定性に関しては，ブロック法は陰的 Runge-Kutta 法と等価であるという事実に着目すると，Ehle らによるA安定な陰的 Runge-Kutta 法の研究はA安定なブロック法の研究とも見なすことができる[2),6),11]．また，高速化のための研究は，線形多段階法に対する予測子-修正子法の視点から進められ，離散点上の近似解をベクトル的に一括して求めることができるブロック法の特徴を活かした高速化の研究が報告されている[3]．

本論文では，対称に分布した標本点（以降，対称分点と言う）上の Lagrange 補間多項式から構成されるブロック法のA安定性を解析することを通じて，A安定なブロック法のクラスが存在することを示す．このカテゴリに属する公式としては，Legendre 多項式のゼロ点を分点に用いる Gauss-Legendre 型の公式[1]や Wright, Watts-Shampine らによって研究された等間隔分点を用いる Newton-Cotes 型の公式[12),13]がよく知られている．これらの公式のA安定性に関しては，前者は任意の段数についてA安定であり，後者は8段までがA安定であることが数学的に証明されている．また最近，これら二つの公式の間の関係を明らかにする方向での興味ある研究が Mitsui-Sugiura によって行われている[5]．彼らは等間隔分点から Legendre 多項式のゼロ点へと，段階的に変化する対称分点の系列を構成して，Newton-Cotes 型の公式と Gauss-Legendre 型の公式との間を埋める公式群の存在を指摘している．

本論文では，Mitsui-Sugiura によって考察された等間隔分点に基づく分点の構成手法を，一般の対称分点に基づく分点の構成法に拡張して考察する．その構成法により得られる対称分点上の補間多項式から導出されるブロック法についてA安定性解析を行い，A安定なブロック法のクラスの確定を図る．

また，対称分点の興味ある特別な場合，上述の Gauss-Legendre 型公式や Chebyshev 多項式のゼロ点を用いる公式[12]の一般化として，Jacobi 多項式の一種である Gegenbauer 多項式のゼロ点を補間分点に取り上げ，その上で構成されるブロック法のA安定性を考察する．

以下，本論文の構成について述べる．まず第2章では，準備として補間型ブロック法を構成し，第3章ではA安定性解析のための道具を用意する．第4章では，対称分点の構成法を示し，その上で構成されるブロック法のA安定性について論じる．第5章では Gegenbauer 多項式の零点上で構成される公式（以降，Gauss-Gegenbauer 型の公式と言う）のA安定性を解析する．最後の第6章は，まとめとして，ブロック法を実際に用いる際の問題点などを指摘する．

† A-stable Symmetric Interpolatory Block Methods by TOSHIYUKI KOTO (International Institute for Advanced Study of Social Information Science, Fujitsu Limited).

†† 富士通(株)国際情報社会科学研究所

2. ブロック法の構成

本論文で用いる記号と基本的な概念を導入し，ブロック法の公式を構成する．

(a, b) を積分区間とし，次のような分割を考える．

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n<\cdots<x_N=b,$$

$$x_n=x_0+nh \quad (n=0,1,\cdots,N).$$

ここで，$h>0$（刻み幅と言う）は必ずしも定数である必要はないが，本論文では簡単のため定数とする．

また，m 個の点

$$x_{n,i}=x_n+c_ih \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

により各部分区間 (x_n, x_{n+1}) をさらに細かく分割する．ただし，

$$0<c_1<\cdots<c_m<1$$

を仮定し，これらの c_i を分点と呼ぶ．また，$c_0=0$ と $c_{m+1}=1$ を便宜的に定義しておく．

微分方程式(1.1)を x_n から x_n+th $(0<t\leqq 1)$ まで積分すると，

$$y(x_n+th)=y(x_n)+h\int_0^t f(x_n+sh, y(x_n+sh))\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

が得られる．いま，m 個の点 $x_{n,i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ を補間の標本点とする Lagrange 補間多項式を用いて，(2.1)式の右辺の被積分関数 $f(x_n+sh, y(x_n+sh))$ を置き換え，積分区間の上端を $t=c_i$ $(i=1,2,\cdots,m+1)$ として，それぞれ積分を実行すると，（補間により生じる誤差を無視することによって）次の方程式系を得る．

$$y_{n,i}=y_{n,0}+h\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}f(x_{n,j}, y_{n,j}) \quad (i=1,2,\cdots,m+1). \tag{2.2}$$

ここで，$y_{n,i}$ は $y(x_{n,i})$ の近似値であり，結合係数 $a_{i,j}$ は Lagrange の基本多項式

$$l_j(t)=\prod_{k=1,\neq j}^{m}\frac{t-c_k}{c_j-c_k}$$

を区間 $(0, c_i)$ で積分することにより得られる：

$$a_{i,j}=\int_0^{c_i}l_j(t)\mathrm{d}t.$$

$i=m+1$ のとき $y_{n,m+1}=y_{n+1,0}$ であることから，(2.2) は，$y_{n,0}$ をもとに，

$$y_{n,1},\cdots, y_{n,m}, y_{n+1,0}$$

を陰的に与える公式となる．公式 (2.2) を補間型ブロック法の公式と言う．また，整数 m をブロック法 (2.2)の段数と呼ぶことにする．

公式(2.2)の各 i に対する局所打ち切り誤差は，随伴する作用素 L_i を

$$L_i(y(x);h)=y(x+c_ih)-y(x)-h\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}y'(x+c_jh) \quad (i=1,2,\cdots,m+1) \tag{2.3}$$

と定めることによって評価される．関数 $y(x)$ を微分方程式(1.1)の十分滑らかな解とすると，(2.3)は

$$L_i(y(x);h)=\sum_{j=0}^{\infty}b_{i,j}y^{(j)}(x)h^j \tag{2.4}$$

のように展開できる．上式において，

$$L_i(y(x);h)=b_{i,p(i)+1}y^{(p(i)+1)}(x)h^{p(i)+1}+O(h^{p(i)+2}) \tag{2.5}$$

の関係が成立すれば，右辺の第1項が主要な打ち切り誤差項となり，$p(i)$ を公式(2.2)の各 i の次数と定めることができる．なお，(2.2)式が Lagrange 補間によって導出されていることとことに着目すれば，公式(2.2)の各 i が少なくとも m 次の次数を有することは容易に示すことができる．

なお，公式(2.2)と陰的 Runge-Kutta 公式との関係は表現上の相違だけであって，変数を

$$y_n=y_{n,0} \quad (n=0,1,\cdots),$$

$$b_i=a_{m+1,i},\ k_{n,i}=f(x_{n,i}, y_{n,i}) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

と置き換えることにより，次の補間型 Runge-Kutta 公式が得られることを指摘しておく．

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{j=1}^{m}b_jk_{n,j},$$

$$k_{n,i}=f\left(x_{n,i}, y_n+h\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}k_{n,j}\right) \quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{2.6}$$

3. 安定性解析のための基礎知識

ここでは，ブロック法の安定性解析に必要な予備知識を用意する．

まず，Wright にならって[12]，ブロック法のA安定性を次のように定義する．

ブロック法(2.2)がA安定であるとは，テスト方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda y \quad (\lambda\in C,\ \mathrm{Re}\,\lambda\leqq 0) \tag{3.1}$$

に(2.2)を適用したとき，任意の刻み幅 $h>0$ に対して，近似解 $y_{n,0}$ が $n\to\infty$ に関して有界であることとする．

公式(2.2)のA安定性を調べる手段として次の補題は有効である．

補題 テスト方程式(3.1)にブロック法(2.2)を適用するとき，次の関係式が成立する．

$$y_{n,i}=R_i(z)y_{n,0} \quad (z=\lambda h). \tag{3.2}$$

ここで，

$$R_i(z)=P_i(z)/P_0(z),$$

$$P_i(z)=\sum_{j=0}^{m} p^{(j)}(c_i)z^{m-j}$$

$$(i=1,2,\cdots,m+1). \tag{3.3}$$

ただし，$p^{(j)}(x)$ は次の多項式の j 次導関数である．

$$p(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-c_i). \quad \square \tag{3.4}$$

証明 $y_{n,i}$ を微分方程式(3.1)を(2.2)式に適用して得られる近似値，$p(x)$ を(3.4)で定義される m 次多項式とする．

いま，

$$u(t)=y_{n,0}+z\sum_{j=1}^{m}y_{n,j}\int_0^t l_j(s)\mathrm{d}s \quad (z=\lambda h) \tag{3.5}$$

と置くと，$u(t)$ は m 次多項式となる．$u(c_i)=y_{n,i}$ 等の関係から，$u(t)$ は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-zu(t)=Cp(t) \tag{3.6}$$

を満たすことが容易に示される．ここで，C は z に依存する定数であり，以下のように決定することができる．

まず，定数変化法により，(3.6)は

$$u(t)=y_{n,0}e^{zt}+C\int_0^t e^{z(t-s)}p(s)\mathrm{d}s \tag{3.7}$$

と解くことができる．さらに部分積分法を適用して，

$$u(t)=e^{zt}\left(y_{n,0}+C\sum_{j=0}^{m}p^{(j)}(0)z^{-j}\right)$$

$$-C\sum_{j=0}^{m}p^{(j)}(t)z^{-j} \tag{3.8}$$

を得る．しかし，$u(t)$ は多項式であることから e^{zt} の係数はゼロでなければならない．ゆえに定数 C は

$$C=-y_{n,0}\Big/\left(\sum_{j=0}^{m}p^{(j)}(0)z^{-j}\right) \tag{3.9}$$

と決定される．

この C を(3.8)式に代入すると e^{zt} の項は消えて，さらに，$t=c_i$ と置けば，$u(c_i)=y_{n,i}$ の関係により(3.2)，(3.3)を得る．$\square$

この補題から，$y_{n,0}$ $(n=0,1,\cdots)$ に対する次の漸化式を得る．

$$y_{n+1,0}=R_{m+1}(z)y_{n,0} \quad (n=0,1,\cdots) \tag{3.10}$$

さらに，$R_{m+1}(z)$ が n に依存しないことから，

$$y_{n,0}=(R_{m+1}(z))^n y_{0,0} \tag{3.11}$$

を得る．したがって，任意の $y_{0,0}$ に対して，$y_{n,0}$ が $n\to\infty$ に関して有界であるためには

$$|R_{m+1}(z)|\leqq 1 \quad (z\in C,\ \mathrm{Re}\,z\leqq 0) \tag{3.12}$$

が必要十分な条件である．

いま補間の標本点の対称的配置を考える上で分点 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ および c_0, c_{m+1} を

$$\xi_i=2c_i-1 \quad (i=0,1,\cdots,m+1) \tag{3.13}$$

のように変換しておくと便利である．このとき，新しい分点と両端の点の集合 $\{\xi_i\}$ に対して，次の順序関係が成立する．

$$-1=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_m<\xi_{m+1}=1.$$

逆に，このような $\{\xi_i\}$ が与えられたとき，$c_1, c_2, \cdots, c_m$ が(3.13)式によって一意に決定されることに着目して，以降，分点を区間$(-1,1)$上で考えることにする．$\{\xi_i\}$ が，

$$\xi_k=-\xi_{m+1-k} \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

を満たすとき，この $\{\xi_i\}$ を対称補間分点，あるいは，単に対称分点と呼ぶ．分点の数を強調する場合には，m 次対称分点と言うことにする．

対称補間分点上では，(3.3)の関数 $R_{m+1}(z)$ は変数変換(3.13)により次のように書き直すことができる．

$$R_{m+1}(z)=Q((2z)^{-1})/Q(-(2z)^{-1}), \tag{3.14}$$

$$Q(z)=\sum_{j=0}^{m}q^{(j)}(1)z^j, \tag{3.15}$$

$$q(x)=\prod_{k=1}^{m}(x-\xi_k). \tag{3.16}$$

このとき，虚軸上の z に対して(3.14)の右辺の分子と分母は互いに複素共役の関係をもち，

$$|R_{m+1}(z)|=1 \tag{3.17}$$

が成り立つ．したがって，複素関数論における定理(Phragmén-Lindelöf の定理)により，公式(2.2)がA安定であるための必要十分条件(3.12)は，$R_{m+1}(z)$ の左半平面 C^- 上での正則性と等価となる．また Spec(Q) により多項式 $Q(z)$ のゼロ点の全体の集合を表すとき，この条件は

$$\mathrm{Spec}(Q)\subset C^- \tag{3.18}$$

が成り立つことに等価である．

したがって，対称分点上で構成されるブロック法(2.2)の A 安定性の解析は(3.15)で定義される多項式のゼロ点の位置を調べることに帰着される．

4. 対称分点と A 安定性条件

本章では，m 次対称分点の構成法を述べ，その分点上でのブロック法(2.2)が A 安定となるための十分条件を定理として与える．さらに，ひとつのA安定なクラスの存在を系として与える．

ブロック法(2.2)の A 安定性に関する条件を記述する為に幾つかの準備をする．

最初に，与えられた $m-s$ $(0\leqq s\leqq m)$ 次対称分点

$$-1<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{m-s}<1$$

から m 次対称分点

$$-1<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_m<1$$

を構成する方法について述べる．なお，$s=m$ の場合，与えられる対称分点はゼロ次，すなわち空集合となるが，これは便宜上導入した．

s は固定しておく．分点 $\{\eta_i\}$ を用いて構成される $m+s$ 次多項式 $q_{m,s}(x)$ を

$$q_{m,s}(x)=\frac{m!}{(m+s)!}(x^2-1)^s\prod_{j=1}^{m-s}(x-\eta_j) \tag{4.1}$$

のように定義する．分点 $\{\xi_i\}$ を，この多項式を s 回微分して得られる次の m 次多項式 $T_{m,s}(x)$ の m 個のゼロ点として与える．

$$T_{m,s}(x)=\frac{d^s}{dx^s}q_{m,s}(x). \tag{4.2}$$

このとき，分点 $\{\eta_i\}$ の対称性と Rolle の定理から $\{\xi_i\}$ が区間 $(-1,1)$ に属する対称分点となることは容易に示される．各 s $(0\leqq s\leqq m-1)$ に対して $m-s$ 次対称分点 $\{\eta_i\}$ から構成される m 次対称分点を $S_{m,s}$ $(\{\eta_i\})$，あるいは，単に $S_{m,s}$ で表すことにする．なお，$s=m$ の場合，$S_{m,m}$ は m 次 Legendre 多項式のゼロ点を要素する集合となることを注意しておく．

つぎに，指数関数 e^z に対する (m,s) 次 Padé 近似において分子に現れる多項式を $N_{m,s}(z)$ で表すことにする．すなわち，$N_{m,s}(z)$ は

$$N_{m,s}(z)=\sum_{j=0}^{m}\frac{m!(m+s-j)!}{j!(m-j)!}z^j \tag{4.3}$$

で与えられる[1]．

以上の準備のもとで，m 次対称分点 $S_{m,s}$ から構成される補間型ブロック法(2.2)の A 安定性に関するひとつの条件を述べることができる．

定理 1　m $(\geqq 1)$，s $(0\leqq s\leqq m)$ は整数とする．そのとき，任意の $m-s$ 次対称分点に対して，m 次対称分点 $S_{m,s}$ から構成される補間型ブロック法(2.2)がA安定となるための十分条件は

$$\mathrm{Spec}(N_{m,s})\subset C^-$$

により与えられる．□

上の定理の証明は，次のGrace-Szegöの定理を用いて行われる．なお，証明のアイデアは文献 8)に基づく．

Grace-Szegö の定理（文献 7)，60 ページ）

D を複素平面上の円領域（すなわち，円を境界とする領域），もしくは半平面の何れかとする．さらに，

$$A(z)=\sum_{j=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_j a_j z^j\left(a_j\in C,\ {}_m\mathrm{C}_j=\frac{m!}{j!(m-j)!}\right)$$

のすべての根は領域 D に含まれるものとし，

$$B(z)=\sum_{j=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_j b_j z^j\ (b_j\in C)$$

の根を β_k $(k=1,2,\cdots,m)$ とする．そのとき，多項式 $(A\circ B)(z)$ の任意の根 γ は，適当な，β_k および $\zeta\in D$ を用いて

$$\gamma=-\beta_k\zeta$$

と表すことができる．ただし，$(A\circ B)(z)$ は二つの多項式 $A(z)$，$B(z)$ から，次式によって定義される多項式である．

$$(A\circ B)(z)=\sum_{j=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_j a_j b_j z^j.\quad \square \tag{4.4}$$

定理 1 の証明　m 次対称分点 $S_{m,s}$ から構成される補間型ブロック法(2.2)が A 安定であることを示すためには，第 3 章の(3.18)で与えた条件が満たされることを示せば十分である．

$$A(z)=(m!)^{-1}z^m N_{m,s}(z^{-1}), \tag{4.5}$$

$$B(z)=m!\,z^{-s}q_{m,s}(1+z) \tag{4.6}$$

と置く．(3.16)式の $q(x)$ が(4.2)式の $T_{m,s}(x)$ で与えられることから，(3.15)式の $Q(z)$ は

$$Q(z)=(A\circ B)(z) \tag{4.7}$$

と表される．実際，(4.4)と(4.5)を整理すると，それぞれ，

$$A(z)=\sum_{j=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_j a_j z^j\left(a_j=\frac{(j+s)!}{m!}\right), \tag{4.8}$$

$$B(z)=\sum_{j=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_j b_j z^j$$

$$\left(b_j=\frac{(m-j)!\,j!}{(j+s)!}q^{(j)}(1)\right) \tag{4.9}$$

となる．ここで，(4.9)の導出には

$$z^{-s}q_{m,s}(1+z)=\sum_{j=0}^{m}\frac{q^{(j)}(1)}{(j+s)!}z_j \tag{4.10}$$

を用いた．このとき，(4.4)の定義に基づき $(A\circ B)(z)$ を計算すると，(4.7)を得る．

定理の証明に戻ると，まず $\mathrm{Spec}(N_{m,s})\subset C^-$ の仮定により，$\mathrm{Spec}(A)\subset C^-$ が成り立つ．一方，明らかに，$\mathrm{Spec}(B)\subset[-2,0)$ である．したがって，Grace-Szegö の定理により，$\mathrm{Spec}(Q)\subset C^-$ を得る．□

定理 1 により，ブロック法(2.2)の A 安定性の判定は，指数関数に対する Padé 近似の分子にあらわれる多項式 $N_{m,s}(z)$ のゼロの位置を調べることによって行うことができる．そこで，以下に簡単な例を幾つか挙げる．

例 1: $m=1,2,3,4$ に対して $\mathrm{Spec}(N_{m,0})\subset C^-$ となることが Routh-Hurwitz の判定法（文献4），162ページ）により確かめられる．しかし，$m=5$ のときは，$\mathrm{Spec}(N_{5,0})\not\subset C^-$ となり，たとえ対称分点であってもA安定ではないブロック法の存在が予想される．実際，$m=5$ のときはA安定ではない公式が存在する．このことは，分点として

$$\xi_1=-b,\ \xi_2=-a,\ \xi_3=0,\ \xi_4=a,\ \xi_5=b\ (0<a<b<1)$$

を考えると，簡単な考察により，公式(2.2)がA安定であるための必要十分条件が

$$3\alpha-5\beta>1\ (\alpha=a^2+b^2,\ \beta=a^2b^2)$$

により与えられることから分かる．

例 2: Routh-Hurwitz の判定法により

$$\mathrm{Spec}(N_{5,1}),\ \mathrm{Spec}(N_{6,1}),\ \mathrm{Spec}(N_{7,2}),\ \mathrm{Spec}(N_{8,3}),\ \mathrm{Spec}(N_{9,3})\subset C^-$$

となることが確かめられる．したがって，

$$S_{5,1},\ S_{6,1},\ S_{7,2},\ S_{8,3},\ S_{9,3}$$

から構成されるブロック法(2.2)はA安定である．

以上の簡単な例の考察からも $N_{m,s}(z)$ の零点の位置を数学的な意味で一般的に見極めることは難しいと思われる．

しかし，適当な制限を付加することによって特定のA安定なクラスの存在を示すことはできる．実際，Saff-Varga によって証明されている定理[10]（$0\leqq m\leqq s+4$ ならば，$\mathrm{Spec}(N_{m,s})\subset C^-$.）と定理1とから，ひとつのA安定なクラスの存在を示す次の定理を得る．

定理 2 任意の m に対して $S_{m,m-4}$ から構成されるブロック法(2.2)はA安定である．（証明は既に明らか．）□

次の章では，Gegenbauer 多項式のゼロ点を分点とする特別な対称分点上で構成されるブロック法のA安定性について詳しく述べる．

5. Gauss-Gegenbauer 型の公式

本章では，対称補間分点の特別な場合として，Gegenbauer 多項式のゼロ点を分点として得られるブロック法のA安定性について述べる．

m 次 Gegenbauer 多項式を $C_m{}^\alpha(x)$ で表す．$C_m{}^\alpha(x)$ はゼロ点の対称性が保証される Jacobi の直交多項式系の一種である．実際，$C_m{}^\alpha(x)$ は重み $(1-x^2)^{\alpha-(1/2)}$ に関する区間 $(-1,1)$ 上の直交多項式系として定義され，特に，$\alpha=0,\ 1/2,\ 1$ のとき，それぞれ第1種 Chebyshev 多項式，Legendre 多項式，第2種 Chebyshev 多項式を与える．また，漸化式

$$\frac{\mathrm{d}C_m{}^\alpha(x)}{\mathrm{d}x}=2\alpha C_{m-1}{}^{\alpha+1}(x) \tag{5.1}$$

により，$\alpha=n/2$，$(n=3,4,\cdots)$ に対する $C_m{}^\alpha(x)$ は Legendre 多項式，または Chebyshev 多項式で表すことができることを注意しておく．なお，$C_m{}^\alpha(x)$ の m 個のゼロ点からなる分点を $\bar{S}_{m,\alpha}$ で表す．

以下，モニックな Gegenbauer 多項式を再び $C_m{}^\alpha(x)$ で表すことにする．このとき，$C_m{}^\alpha(x)$ は対称分点 $\bar{S}_{m,\alpha}$ に対して(3.16)式で定義される多項式 $q(x)$ と一致する：すなわち，$q(x)=C_m{}^\alpha(x)$．したがって，多項式 $F_\alpha(x,z)$ を

$$F_\alpha(x,z)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}C_m{}^\alpha(x)z^j \tag{5.2}$$

のように定めると，(3.15)式の $Q(z)$ は

$$Q(z)=F_\alpha(1,z) \tag{5.3}$$

と表すことができる．このとき，次の興味ある補題を述べることができる．

補題 $-1/2<\alpha\leqq 3/2$ に対して，次が成立する．

$$\mathrm{Spec}(F_\alpha(1,\cdot))=\mathrm{Spec}(Q)\subset C^-.\ \square$$

証明 z を $F_\alpha(1,z)$ のゼロ点とし，

$$v(t,x)=e^{t/z}F_\alpha(x,z),$$

とおくと，$v(t,x)$ は偏微分方程式の境界値問題

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}=e^{t/z}C_m{}^\alpha(x),$$
$$v(t,1)=0 \tag{5.4}$$

の解となる．

この $v(t,x)$ に対して，次のような関数 $E(t)$ を定義する．

$$E(t)=\sum_{j=1}^{m}W_j\frac{1+\xi_j}{1-\xi_j}|v(t,\xi_j)|^2. \tag{5.5}$$

ただし，$\xi_j\in\bar{S}_{m,\alpha}$ として，各 W_j は Gauss 型積分公式の重み，すなわち

$$W_j=\int_{-1}^{1}\prod_{i=1,\neq j}^{m}\frac{t-\xi_1}{\xi_j-\xi_i}\mathrm{d}t, \tag{5.6}$$

とする．数値積分の理論から $W_j>0$ $(j=1,2,\cdots,m)$ となることに注意する．

このとき，$E(t)$ が t に関して単調減少であることを示せば証明が完了する．もし，$Q(z)$ のゼロ点 z が C^- に属さない（すなわち $\mathrm{Re}\,z\geqq 0$）ならば，

$$|v(t,\xi_j)|=\exp(t/\mathrm{Re}\,z)|F_\alpha(\xi_j,z)|$$

および，W_j の正値性により，$E(t)$ は単調減少には成り得ないからである．

以下，$E(t)$ の単調減少性を示す．

$$\left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\right|_{x=\xi_j}=\left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right|_{x=\xi_j}$$

$(j=1,2,\cdots,m)$ の関係より，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)=\sum_{j=1}^{m}W_j\frac{1+\xi_j}{1-\xi_j}w(t,\xi_j),$$

$$w(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}|v(t,x)|^2 \tag{5.7}$$

を得る．ここで，$(1+x)w(t,x)/(1-x)$ は x に関して $2m-1$ 次多項式である．したがって，数値積分の理論から(5.7)式の右辺は，積分

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x}{1-x}w(t,x)(1-x^2)^{\alpha-(1/2)}\mathrm{d}x \tag{5.8}$$

と正確に一致する．さらに，$v(t,1)=0$ に着目すると，(5.8)は部分積分法により，

$$-\int_{-1}^{1}\frac{2(1-x^2)^{\beta}}{(1-x)^2}(1-\beta x)|v(t,x)|^2\mathrm{d}x$$
$$(\beta=\alpha-1/2) \tag{5.9}$$

と変形することができる．$-1/2<\alpha\leqq 3/2$ より，$-1<x<1$ に対して $1-\beta x>0$ となることに注意すると，$\mathrm{d}E(t)/\mathrm{d}t<0$，すなわち $E(t)$ の単調減少性を得る．□

この補題を用いると，Gauss-Legendre 型公式や，Chebyshev 多項式のゼロ点を分点として用いる公式を包含する，A安定なブロック法のクラスに関する次の定理が得られる．なお，Chebyshev 多項式のゼロ点を分点として用いる公式に関しては，20段までのA安定性が Wright によって数値的に確かめられている[12]．

定理 3 $-1/2<\alpha\leqq 3/2$ とする．任意の m に対して，$\bar{S}_{m,\alpha}$ から構成されるブロック法(2.2)はA安定である．□

$\alpha>3/2$ に対しては，定理3のような結果は一般には得られない．例えば，$\alpha=2$，すなわち $C_m^2(x)$ について考える．m 次の第1種 Chebyshev 多項式を $T_m(x)$ で表すことにすると，(5.1)の関係により $C_m^2(x)$ は，定数倍を除いて，$\mathrm{d}^2T_{m+2}(x)/\mathrm{d}x^2$ と一致する．したがって，(3.15)式の $Q(z)$ は次式で与えられる多項式の定数倍となる．

$$\sum_{j=0}^{m}T_{m+2}^{(j+2)}(1)z^j. \tag{5.10}$$

この多項式は $m\leqq 8$ のときはすべての根を左半平面内にもつが，$m=9$ のときは $\mathrm{Re}\,z\geqq 0$ なる根をもつ．(証明は Routh-Hurwitz の判定法による．) したがって，$m=9$ のときブロック法(2.2)はA安定とはならない．同様に，$\alpha=5/2, 3, 7/2, 4$ に対しても，それぞれ $m=8, 7, 7, 6$ においてA安定でない公式が現れることが確かめられる．

6. おわりに

本論文では，常微分方程式の初期値問題に対するA安定な数値解析のクラスの存在を示すことを目的として，対称に分布する標本点（対称分点）上の Lagrange 補間多項式から構成される（対称補間型と称する）ブロック法の安定性について考察した．すなわち，(2.2)式で与えた対称補間型ブロック法がA安定であるための必要十分条件(3.19)を述べ，この条件をもとに，A安定なブロック法の存在を示した．

具体的には，ブロック法がA安定となる対称分点の構成手続きを示すことにより，まず，A安定な対称補間型ブロック法の存在を一般的に示した（定理2）．さらに，対称分点の特別な場合として，Gegenbauer 多項式の対称に分布するゼロ点を分点とするブロック法において，A安定なクラスが存在することを示した（定理3）．なお，Gegenbauer 多項式は Jacobi 多項式の特別な場合であるが，Legendre 多項式や第1種，第2種 Chebyshev 多項式を含む多項式のクラスである．定理3は，Gauss-Legendre 型公式のA安定性や Wright が数値的に示した Chebyshev 多項式のゼロ点を分点に用いる公式のA安定性を，特殊な場合として含んでいる．

任意の段数のA安定な対称補間型ブロック法の存在を本論文において示したが，そのような方法を実際に用いるためにはまだ解決しなければならない幾つかの問題がある．最も本質的な問題は，本論文のブロック法の公式(2.2)が陰的であることから，常微分方程式が非線形の場合，非線形方程式を解かねばならないことである．解決策の一つとして予測子-修正子法的な用法も考えられるが，高段の方法では一般に収束性が悪くなる．このような問題をいかに解決するかは今後の重要な課題である．

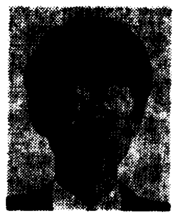
謝辞 日頃からご指導いただく当研究所鈴木千里氏，有益な議論をしてくださった名古屋大学工学部情報工学科鳥居達生教授，三井斌友助教授，杉浦洋助手，桜井鉄也助手に感謝する．

参考文献

1) Butcher, J. C.: *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods*, p. 512, John Wiley & Sons, Chichester (1987).

2) Ehle, B. L.: A-stable Methods and Padé Approximations to the Exponential, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 4, No. 4, pp. 671-680 (1973).
3) Franklin, M. A.: Parallel Solution of Ordinary Differential Equations, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-27, No. 5, pp. 413-420 (1978).
4) 三井斌友：数値解析入門, p. 220, 朝倉書店, 東京 (1985).
5) Mitsui, T. and Sugiura, H.: A Series of Collocation Runge-Kutta Methods, 数理解析研究所講究録, No. 643, pp. 203-225 (1988).
6) Nørsett, S. P. and Wanner, G.: The Real-pole Sandwich for Rational Approximations and Ocillation Equations, *BIT*, Vol. 19, pp. 79-94 (1979).
7) Pólya, G. and Szegö, G.: *Problems and Theorems in Analysis*, Volume II, p. 391, Springer-Verlag, Berlin, Hidelberg, New York (1976).
8) Reimer, M.: All Symmetric Interpolatory Block-implicit Methods of Order Less than Six Are A-stable, *BIT*, Vol. 25, pp. 297-298 (1985).
9) Rosser, J. B.: A Runge-Kutta for All Seasons, *SIAM Rev.*, Vol. 9, No. 3, pp. 417-452 (1967).
10) Saff, E. G. and Varga, R. S.: On the Zeros and Poles of Padé Approximants to e^z, *Numer. Math.*, Vol. 25, pp. 1-14 (1975).
11) Wanner, G., Hairer, E. and Nørsett, S. P.: Order Stars and Stability Theorems, *BIT*, Vol. 18, pp. 475-489 (1978).
12) Wright, K.: Some Relationships between Implicit Runge-Kutta, Collocation and Lanczos τ Methods and Their Stability Properties, *BIT*, Vol. 10, pp. 217-227 (1970).
13) Watts, H. A. and Shampine, L. F.: A-stable Block Implicit One-step Methods, *BIT*, Vol. 12, pp. 252-266 (1972).

(昭和63年 5 月 30日受付)
(昭和63年10月 7 日採録)



小藤 俊幸（正会員）
1961年7月31日島根県松江市生. AB型. 1984年東京大学理学部数学科卒業. 1986年同修士課程修了. 同年富士通(株)に入社, 国際情報社会科学研究所に配属. 以来, 数値解析に関する研究に従事. 主に, 大規模数値シミュレーションにおける非線型現象等に関心をもっている.