A-24

ファジィ制約充足問題への連続領域の導入

Introducing continuous domains to fuzzy constraint satisfaction problems

須藤 康裕† 三田村 保† 大堀 隆文† 栗原 正仁‡
Yasuhiro Sudou Tamotsu Mitamura Takahumi Oohori Masahito Kurihara

1. はじめに

制約充足問題（Constraint Satisfaction Problem, 以下CSP）は、与えられた制約をすべて満たす変数の割り当てを求める問題である。しかしながら現実的な問題として、制約を満たしている、いないの 2 値だけで表そうとするよりも、その制約の充足度を考慮し、出来るだけ制約を満たそうとする方がより現実的である。そこで CSP にファジィ関係を用い、制約に曖昧さを持たせたファジィ CSP[1]がある。

一般に、現実の問題を CSP として定式化する上でいくつかの制限がある。CSP は通常、有限で離散的な領域から値を選ぶ複数の変数に対して、全ての制約を満たすような値の割り当てを探し出す問題であり、制約に曖昧さを設けたファジィ CSP[1]でもそれは受け継がれている。しかしながら、一部の問題を定式化しようとしたとき、変数の領域が莫大に広域であったり、また、そもそも領域に含まれるかどうかが曖昧であったりするような場合、解を探索する上で不都合が生じる。CSP としてよく例に出されるスケジューリング問題[2]では変数領域が時刻で表されるが、最適解を求めるには時刻を細かく区切らねばならない。

そこで、その制限を少しでも緩和すべく、変数の領域を閉区間化することが挙げられる。本稿では上述のファジィ CSP の変数領域を閉区間化した混合領域 CSP とその解法を提案する。

2. ファジィ CSP の拡張

CSP は通常、有限で離散的な領域$\{D_i\}_{i=1}^{n}$から値を選ぶ複数の変数$\{X_i\}_{i=1}^{n}$に対して、全ての制約$\{C_k\}_{k=1}^{r}$を満たすような値の割り当てを探し出す問題として定義される。クリスプな制約 C_k に含まれる変数の組は、C_k を満たすような D_i の直積集合から値を取る。

このモデルでは変数の値の組は、制約を完全に満たすか、あるいは完全に満たさないかのどちらかでなければならないが、ファジィ CSP[1]では充足度が存在する。C_k は完全に順序づけられた D_i の直積集合から値を取り、その中の最大の要素は完全な充足を表し、最小の要素は完全な違反を表す。中間の要素は制約の充足度に相当する。解は全ての制約について少なくとも部分的に満たしている、完全な割り当てである。

問題全体の充足度を計算するのに、論文[1]では、全ての制約の中で、最も制約を満たしていない充足度を CSP の充足度としている。これはファジィ論理積が minimum によって表されることに由来する。以降に述べる混合領域 CSP でも、この事は非常に重要な意味を持っている。

2.1 混合領域 CSP の定義

変数領域に連続領域を導入した混合領域 CSP（Mixed Domains CSP, 以下 MDCSP）を、次のように定義する。

MDCSP は変数のセット$\{X_i\}_{i=1}^{n}$によって定義され、それぞれの変数は領域$\{D_i\}_{i=1}^{n}$を持ち、D_i の上で値を取り、制約$\{C_k\}_{k=1}^{r}$の下のファジィ関係$\{R_k\}_{k=1}^{r}$として表される。D_i は有限個の実数上の閉区間の集合として以下のように定義する。

$$D_i = \bigcup_{j=1}^{m} [l_j, u_j] \qquad \cdots(1)$$

変数 Xi をはさんだ別の制約 C_j について、2つのファジィ関係 R_k と R_j について、その 2 つのファジィ論理積を次のように定義する。

$$\mu_{R_j \cap R_k}(v) = \min(\mu_{R_j}(v), \mu_{R_k}(v)) \qquad \cdots(2)$$

ここで v は Xi に対する割り当てであり、V は全ての変数に対する割り当てである。制約全体の割り当ての充足度は、全ての制約に対応する関係のファジィ論理積によって与えられる。

MDCSP の解は全ての制約のうち、最も少なく制約を満たしている制約を最大に満たすような完全な割り当てである。制約の違反度を $1\text{-}\mu_{R_k}$ で表し、解を全ての制約のうち、最も違反している制約の違反度を最小にするような完全な割り当てとして、以下の(3)式を利用して解を求める。

$$\min_{v}(\max_{k}(1-\mu_{R_k}(v))) \qquad \cdots(3)$$

3. MDCSP の解法

制約充足問題の解法として大きく 2 つ、BackTrack や ForwardCheck 等の木探索と、Breakout 等の局所改善法がある。前者はある程度全探索になるし、後者は最適解を得られる保証がない。前章で定義した MDCSP は、変数領域に

† 北海道工業大学
‡ 北海道大学

連続領域が含まれているので、どちらの手法もそのままでは利用することが出来ない。そこでまず始めに考えられるのが領域の離散化である。これによって既存のアルゴリズムをほとんどそのまま利用することが出来る。しかし冒頭で述べたように、領域が広大であった場合に離散化して領域を増やすことは探索空間を広げてしまうだけでなく、サンプリング周波数によってはより良い解を見逃してしまうかも知れず、結果的に MDCSP を提案する意味がなくなる。

この章では局所改善型のアルゴリズムによって、領域を離散化することなく最適解を探索する方法を述べる。

3.1 アルゴリズム

MDCSP を解くために、新しいアルゴリズムを提案する。最初に初期値を無造作に決定し、そこから局所変更していく。まず全ての制約の中で最も違反が大きい制約が存在する変数の値を最も違反が小さくなるような値に変更するが、変更後の充足度と現在の充足度の差を変数の改善値とし、3.2 節でその算出方法を述べる。

最も違反が大きい制約が存在する変数の値をどのように変更しても違反度が改善されない場合、その変数と別の制約が存在する変数の値から徐々に変更していく。それでも改善されない場合は、さらにその近傍の変数へと変更箇所を移動していく。

このように局所改善していくと、いずれどの変数の値を変更してもどの制約も違反度が下がらない状態に陥る。この状態から抜け出すことについてはまた別の研究がされているので、ここでは言及しないことにする。

3.2 変数の改善値の算出

では、まず単純な 2 項制約を例にとって考えてみる。ある変数 X との制約が存在する変数が $X_1, \cdots, X_n$ まであったとする。また、v は X への割り当てであるとする。ここで、各々の制約が関数 $C_k = f(X,X_k)$によって表すことが出来るとすると、変数 X の割り当てを変更する場合、X_kは固定されるので定数とすることが出来、$C_k = f_k(X)$と表すことにする。

ここで、全ての C_k について、ファジィ論理積を求めることが可能であれば、変数 X の割り当てを変更した場合の改善値が求まる。したがって、全ての変数について改善値を求め、その最大となるような変数 X を局所変更していくことによって最適解に近づくことが出来る。

ファジィ論理積は 2 章で述べたように minimum であり、メンバーシップ関数を $C_{\min}$ とし、次のように定義する。

$$C_{\min}(v) = \prod_{k=1}^{n} C_k(v) \qquad \cdots(4)$$

1 つの閉区間に対して 1 つの最大値($\max(C_{\min})$)を求め、全ての閉区間に対する $\max(C_{\min})$の中から改善値が最大のものを選べば、変数 X の新しい割り当てが求まる。

ところが、$C_{\min}$ が任意のメンバーシップ関数についてはこのままでは最大値を見つけるのは困難である。しかし、$C_{\min}$ のうち必要なのは最大値($\max(C_{\min})$)だけで、関数全体の値は必要ない。このことと、以下の条件を満たすことを用いて $\max(C_{\min})$を求めることが可能である。

- メンバーシップ関数が各区間$[l,u]$で連続である
- メンバーシップ関数が両端を除いて微分可能である

1 つの閉区間について、その始点と終点を l と u で表す。1 つの C_kについて l から u の間で、最大値と最小値は絶対に l か u もしくは極に存在することは、明らかである。ここで、全ての C_k のファジィ論理積は、C_k がどのような場合でも、最大値は l か u、またはある 1 つの C_kの極、あるいはある 2 つの C_kの交点に存在する（図 3.1）。

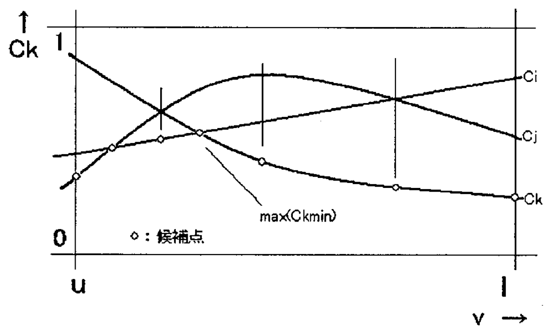

図 3.1 $\max(C_{k\min})$の候補点

したがって、ここで問題となるのは C_k 同士の交点を求める操作と極を求める操作であるが、1 次や 2 次の単純な方程式ならば交点を求めることは可能であるが、高次で複雑な制約は解くことができない。したがって、極や交点を解析的あるいは数値的に求めるためには、単純な方程式のみで制約が構築されることが MDCSP の解を求める条件になる。

4. おわりに

本稿ではファジィ CSP の変数領域を閉区間化した混合領域 CSP とその解法を提案した。今後の課題として、現実的な問題を定式化することが挙げられる。

参考文献

[1] P.Meseguer, J.Larrosa, Solving Fuzzy Constraint Satisfaction Problems, Proc. IEEE-97, pp. 1233-1238(1997)

[2] G.Verfaillie, T.Schiex, Solution Reuse in Dynamic Constraint Satisfaction Problems, Proc. AAAI-94, pp. 307-312(1994)