LA-7 ランダムタイブレークによる安定マッチングの導出
Obtaining Stable Matchings by Random Tie-Breaking

柳澤 弘揮* 宮崎 修一* 岩間 一雄*
Hiroki Yanagisawa Shuichi Miyazaki Kazuo Iwama

マグナス ハルダースソン†
Magnús Halldórsson

1 はじめに

安定結婚問題 (Stable Marriage problem)(SM)[3] の例題は、N 人ずつの男女と異性全員を全順序で並べた各人の希望リストからなる。あるマッチングで、ペアになっていない男性と女性が、ともに現在の相手よりもお互いを上位に書いているとき、その男女を *blocking pair* と呼ぶ。blocking pair を含まないマッチングを安定マッチングという。安定結婚問題は、与えられた例題から安定マッチングを見つける問題であり、Gale と Shapley により初めて紹介された [1]。彼らは、全ての例題が安定マッチングを持つことを示し、それを見つける $O(N^2)$ 時間のアルゴリズム (Gale-Shapley アルゴリズム) を与えた。この問題は、アメリカやスコットランドの病院における研修医の配属 [3, 6] などに利用されている。

安定結婚問題の自然な条件の緩和の一つとして、タイを許す [3, 5] というものがある。これは、希望リストの中にタイを書くことを認め、タイの中に書かれた異性を同順位と見なすものである。この問題を、*SMT*(Stable Marriage with Ties) と表すことにする。タイを認めたときの安定性の定義を以下のように拡張する。ある男性と女性が、ともに現在の相手よりもお互いを真に上位に書いているとき、その男女を blocking pair と呼ぶ。このような blocking pair を含まないマッチングのことを弱安定 (または単に安定) という。タイを認めた場合でも、Gale-Shapley アルゴリズムを用いることにより、安定マッチングを見つけることができる [3]。もう一つの条件緩和として、受け入れたくない異性を希望リストに書かなくてもよいというものがある。すなわち、各人の希望リストは不完全でも構わない。この問題を、*SMI*(Stable Marriage with Incomplete lists) と書くことにする。この場合は、男女のそれぞれが、現在のペアよりも相手を上位に書いているか、ペアを持たないとき、blocking pair と定義する。この場合も、Gale-Shapley アルゴリズムを用いて最大マッチングを求めることができる [2]。

これら二つの条件の緩和を同時に認めた問題 *SMTI*(Stable Marriage with Ties and Incomplete lists) は、近年、岩間ら [7, 4] や Manlove ら [8] によって研究された。彼らは SMTI 例題の最大マッチングを求める問題 (*MAX SMTI* と表す) の NP 困難性や近似困難性を示した。安定マッチングは極大マッチングであることから、近似度が 2 であるアルゴリズムは容易に示すことができるが、近似度が 2 を下回るアルゴリズムは未だ知られていない。本研究の目的は、MAX SMTI に対して近似度が 2 を下回るアルゴリズムを構築することである。

SMTI 例題 $\hat{I}$ に含まれるタイに適当な順序付けをする (これを「タイを壊す」と言う) ことにより得られた SMI 例題を I とすると、定義より、I の安定マッチングは $\hat{I}$ の安定マッチングとなる。従って、$\hat{I}$ のタイを適当に壊し、得られた I の安定マッチングを求めるというアルゴリズムは多項式時間で実行可能解を返す。ここで、I の安定マッチングは全て同サイズであることが知られている [2] ので、タイを壊した時点ではサイズは決まっており、いかにしてタイを壊すかが求まる解のコストを左右することになる。

二つの異なる SMI 例題 I_1 と I_2 で、希望リストが高々1人しか違わないとき、I_1 の安定マッチングと I_2 の安定マッチングは、サイズが高々1 しか違わない [8]。従って、二つのタイの壊し方が近ければ、得られる安定マッチングのサイズも近いことが分かる。これより、あらゆるタイの壊し方を考えると、そのかなりの部分が最大サイズと最小サイズの中間のあたりに落ち着くであろうと我々は予想した。この予想の下、タイをランダムに壊すという近似アルゴリズムを考え、その性能を評価することを目標とした。

一般の例題では解析が困難であるため、本稿では、NP 困難性を保ったままで、例題に以下のような制限を課す [8]。(i) タイは男性のみ。(ii) 各男性は多くとも一つのタイしか書けない。(iii) タイの長さは 2。これらの制限を加えることにより、問題の実用性が大幅に損なわれることはない。我々は、このような条件のもとで上記の予想が正しいことを証明し、ランダムにタイを壊すアルゴリズムの求める解のコストの期待値が、最適解のサイズの 7/10 倍以内になることを示した。また、この考えに基づいて、コストが最適サイズの 11/20 倍以内となる解を求める決定性近似アルゴリズムも得た。

本稿においては、例題は、男女ともに N 人ずつであるとする。また、近似アルゴリズム T の近似度については、以下のように定義する。$opt(x)$ と $T(x)$ をそれぞれ、最適解のコストと近似アルゴリズムの解のコストとするとき、サイズ N の全ての例題 x について、$\max\{T(x)/opt(x), opt(x)/T(x)\}$ の最大値を T の近似度とする。特に、近似アルゴリズム T が確率アルゴリズムのとき、$T(x)$ を近似解のコストの期待値で定義し、平均近似度と呼ぶことにする。

2 近似アルゴリズム

本研究で得た近似アルゴリズムは、以下の二つである。ともに、SMTI 例題 $\hat{I}$ を入力とし、$\hat{I}$ の安定マッチングを出力するアルゴリズムである。

確率アルゴリズム RandBrk

Step 1: 例題 $\hat{I}$ でタイを書いている各男性 m について、タイをランダムに壊す。つまり、m の希望リストで w_1 と w_2 がタイの中に書かれているとき、確率 1/2 で w_1, w_2

*京都大学
†アイスランド大学

の順に壊し、確率 1/2 で w_2, w_1 の順に壊す。

Step 2: Step 1 で得た SMI 例題 I^R に対して、Gale-Shapley アルゴリズム等で安定マッチング M^R を求める。

Step 3: M^R を出力する。

決定性アルゴリズム ReverseBrk

Step 1: 例題 $\hat{I}$ でタイを書いている各男性 m について、タイを適当な順序で壊して、SMI 例題 I^L をつくる。

Step 2: 例題 $\hat{I}$ でタイを書いている各男性 m について、I^L と逆の順序でタイを壊して、SMI 例題 I^R をつくる。

Step 3: Step 1 と Step 2 で得た SMI 例題 I^L, I^R に対して、Gale-Shapley アルゴリズム等で、各々の安定マッチング M^L, M^R を求める。

Step 4: M^L と M^R でマッチングのサイズが大きい方のマッチングを出力する。

3 解析の概要

解析にあたって、以下の性質を利用する。

補題 1[8] SMTI 例題 $\hat{I}$ の適当な安定マッチングを M とおく。$\hat{I}$ のタイを壊してつくった SMI 例題で、M が安定となるような SMI 例題 I が存在する。

補題 2[2] SMI 例題 I の任意の二つの安定マッチング M_1, M_2 について、$|M_1| = |M_2|$ である ($|M|$ は安定マッチング M のサイズ)。

補題 3[8] 二つの SMI 例題 I_1, I_2 で、ただ一人を除いて希望リストがまったく同一であるとき、I_1, I_2 の安定マッチングをそれぞれ M_1, M_2 とおくと、$||M_1| - |M_2|| \leq 1$ である。

解析の結果、以下の定理が得られた。

定理 4 確率アルゴリズム RandBrk の平均近似度の上限は、$10/7(\approx 1.43)$ である 。

証明 (概略) SMTI 例題 $\hat{I}$ が全体で p 個のタイを含んでいるとき、アルゴリズム RandBrk は 2^p 個の SMI 例題を等確率で生成する。補題 1 より $\hat{I}$ の最適解 (M_{opt} とする) が安定となるように $\hat{I}$ のタイを壊して作った SMI 例題 I_{opt} が存在する。I_{opt} は、この 2^p 個の SMI 例題の中に含まれる。ここで、高さ p の二分木 T をつくり、T の各節点に $\hat{I}$ のタイを壊してつくった SMI 例題を対応させる。T の根節点 v_{root} には I_{opt} を対応させ、任意の節点 v について、v の左の子節点には v と同じ SMI 例題を対応させ、v の右の子節点には v に対応する SMI 例題とタイの壊し方が一つだけ異なる SMI 例題を対応させる。このとき SMI 例題をうまく対応させて、T の 2^p 個の葉節点に対応する SMI 例題の集合を、アルゴリズム RandBrk の生成する 2^p 個の SMI 例題の集合と一致させる。T の各節点 v に対応する SMI 例題は、その安定マッチングのサイズが補題 2 より一意に定まる ($cost(v)$ と表す)。したがって、T の葉節点に対応する SMI 例題の安定マッチングのサイズの平均がアルゴリズム RandBrk の出力する解のコストの平均値となるので、これを $|M_{opt}|$ と比較することにする。

T の任意の節点 v について、左の子節点 v_l には v と同じ SMI 例題を対応させているので、$cost(v) = cost(v_l)$ が成り立つ。また補題 3 より、T の任意の節点 v とその右の子節点 v_r について、$cost(v)$ と $cost(v_r)$ の差は最大で 1 しかない。よって、$cost(v) - cost(v_r) \leq 1$ が成り立つ。ここで、詳細な解析行うことにより、T の多くの節点 v について $cost(v) - cost(v_r) \leq 0$ が示せる。このことにより、T の葉節点に対応する SMI 例題の安定マッチングのサイズの平均は、根節点 v_{root} のコスト $|M_{opt}|$ に比べて大きく減少しないことがわかる。よって、アルゴリズム RandBrk の平均近似度の上限は $10/7(\approx 1.43)$ である。(証明終)

定理 5 決定性アルゴリズム ReverseBrk の近似度の上限は、$20/11(\approx 1.82)$ である。

4 まとめ

以下の (i)〜(iii) の制限を加えた MAX SMTI について考えた。(i) タイは男性のみ。(ii) 各男性は多くとも一つのタイしか書けない。(iii) タイの長さは 2。これらの制限を加えた問題に対して、平均近似度が $10/7(\approx 1.43)$ となる確率近似アルゴリズムと、近似度が $20/11(\approx 1.82)$ の決定性の近似アルゴリズムを得た。どちらのアルゴリズムについても、(ii) の制限を取り除いた場合でも同一の近似度であることを示すことができる。(i) と (iii) の制限をそれぞれ取り除いたとき、近似度が真に 2 を下回る近似アルゴリズムが存在するかどうかについては、未解決である。

参考文献

[1] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol.69, pp.9-15, 1962.

[2] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.11, pp.223-232, 1985.

[3] D. Gusfield and R. W. Irving, "The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms," MIT Press, Boston, MA, 1989.

[4] M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki and Y. Morita, "Inapproximability Results on Stable Marriage Problems," *Proc. LATIN2002*, LNCS 2286, pp.554-568, 2002.

[5] R. W. Irving, "Stable marriage and indifference," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.48, pp.261-272, 1994.

[6] R. W. Irving, "Matching medical students to pairs of hospitals: a new variation on an old theme," In *Proc. ESA 98*, LNCS 1461, pp.381–392.

[7] K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita, "Stable marriage with incomplete lists and ties," In *Proc. ICALP'99*, LNCS 1644, pp. 443-452, 1999.

[8] D. Manlove, R. W. Irving, K. Iwama, S. Miyazaki, Y. Morita, "Hard variants of stable marriage," *Theoretical Computer Science*, Vol. 276, Issue 1-2, pp. 261-279, 2002.