

ベクトル計算機における SOR 的方法の効率について†

杉原正顕^{††} 小柳義夫^{†††}
森正武[‡] 藤野清次^{‡‡}

偏微分方程式の差分化によって得られる方程式を解く場合、ベクトル計算機上で SOR 法を単純に実行させようすると SOR 法に似てはいるが本来の SOR 法とは異なる方法になることがある。本論文では、この SOR 的方法の効率を論ずる。とくに、理論面から、この SOR 的方法が SOR 法に比べて劣る可能性があることを指摘する。(SOR 的方法をベクトル計算機上で動かしたとしても)。また、最適加速パラメータの値が両方法で大きく異なることも示す。

1. はじめに (問題提起)

Poisson 方程式などを差分法によって離散化することによって得られる連立一次方程式を SOR 法を用いてベクトル計算機で解く場合、hyperplane 法¹⁾と呼ばれているようなベクトル計算機向きのアルゴリズムがよく知られている。しかし、ベクトル計算機で単純に(この意味は、後に正確に記す)SOR 法を実行させることも考えられる。現実には、このような方法が使用されていることもあるようである。しかし、hyperplane 法の場合とは違い、この方法は本来の SOR 法とは異なる方法になる。ここでは、この SOR 的方法の効率を本来の SOR 法と比較して論ずる。

初めに、先に SOR 的方法といった方法を明確にしておく。ただし、最も簡単な場合についてのみに記す。

今、単位正方領域 \mathcal{D} で次の Dirichlet 問題を差分法で解くことを考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{D},$$

$$u(x, y) = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \partial \mathcal{D}. \quad (1)$$

まず、初めに、単位正方領域 \mathcal{D} を N^2 等分し、格子点における u の値に名をつける (図 1 参照)。そして、方程式(1)を(5点、9点)差分近似し、 $u_{i,j}$ を未知数とする連立一次方程式をたてる。今、この一次方程式を SOR 法を用いて解くとする。このとき、

† On the Efficiency of an SOR-like Method Suited to Vector Processor by MASAOKI SUGIHARA (Department of Economics, Hitotsubashi University), YOSHIO OYANAGI (Institute of Information Sciences and Electronics, The University of Tsukuba), MASATAKE MORI (Faculty of Engineering, University of Tokyo) and SEIJI FUJINO (Institute of Computational Fluid Dynamics).

†† 一橋大学経済学部

††† 筑波大学電子・情報工学系

‡ 東京大学工学部物理工学科

‡‡ 計算流体力学研究所

SOR 法のプログラムの主要部は次のようになる(…は、9点差分の場合)。

```
DO 10 I=1, N-1
DO 20 J=1, N-1
  U(I, J)=U(I, J)
  + ω( 1/4 (U(I, J-1)+U(I, J+1)+U(I-1, J)
  +U(I+1, J))-U(I, J) )
```

20 CONTINUE

10 CONTINUE

$$\left[\begin{array}{l} + \omega \left(\frac{1}{5} (U(I, J-1) + U(I, J+1) \right. \\ \quad \left. + U(I-1, J) + U(I+1, J)) + \right. \\ \quad \left. \frac{1}{20} (U(I+1, J-1) + U(I+1, J+1) \right. \\ \quad \left. + U(I-1, J-1) + U(I-1, J+1)) \right) \\ \quad \left. - U(I, J) \right) \end{array} \right]$$

このプログラムはこのままではベクトル化できない。そこで、この部分をベクトル化可能な次のようなプログラムに変えてしまうことが考えられる。

```
DO 10 I=1, N-1
DO 20 J=1, N-1
  V(J)=U(I, J)
  + ω( 1/4 (U(I, J-1)+U(I, J+1)+U(I-1, J)
  +U(I+1, J))-U(I, J) )
```

20 CONTINUE

DO 30 J=1, N-1

U(I, J)=V(J)

30 CONTINUE

10 CONTINUE

(9点差分の場合も同様)

このプログラムに記述された連立一次方程式の解法

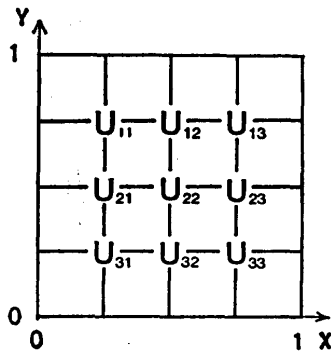


図 1 領域 \mathcal{D} の離散化
Fig. 1 Discretization of the domain \mathcal{D} .

が、先に SOR 的方法といった方法である。この方法は明らかに本来の SOR 法とは異なるものである。したがって、本来の SOR 法に関する議論はそのままでは通用しない。そこで、以下、この SOR 的方法を擬 SOR 法と呼ぶことにし、その性質(最適加速パラメータの値やその値を用いたときの収束の速さ等)を調べることにする。まず、本論の 2 章において 5 点差分近似を用いた場合の SOR 法、擬 SOR 法の解析を行い、本論の 3 章において 9 点差分近似の場合を解析する。

2. 5 点差分近似を用いた場合の SOR 法と擬 SOR 法

2.1 SOR 法、擬 SOR 法の反復の行列表現

まず解くべき方程式の行列表現は、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & (u(1, 1), u(1, 2), \dots, u(1, N-1), \\ & u(2, 1), u(2, 2), \dots, u(2, N-1), \dots, \\ & u(N-1, 1), u(N-1, 2), \dots, u(N-1, N-1))' \end{aligned}$$

と未知数を並べるとき、次のようになる。

$$A_5 \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} B_5 & C_5 & & & \mathbf{0} \\ C_5 & B_5 & C_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & C_5 & B_5 & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

N-1 ブロック

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & -\frac{1}{4} & & & \\ -\frac{1}{4} & & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

N-1 個

$$C_5 = \begin{bmatrix} & & & & \mathbf{0} \\ & & & & \\ & & \frac{1}{4} & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

N-1 個

これから、SOR 法、擬 SOR 法の反復は、次のように行列に表現できることがわかる。

《SOR 法》

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = (I - \omega L^{\text{SOR}_5})^{-1} ((1 - \omega)I + \omega U^{\text{SOR}_5}) \mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{b}'$$

($= \mathcal{L}^{\text{SOR}_5} \mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{b}'$ と略記する),

$$L^{\text{SOR}_5} = \begin{bmatrix} -B_5^L & & & & \mathbf{0} \\ C_5 & -B_5^L & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & C_5 & -B_5^L & \end{bmatrix}$$

$$U^{\text{SOR}_5} = \begin{bmatrix} -B_5^U & -C_5 & & & \mathbf{0} \\ & -B_5^U & -C_5 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & -C_5 & -B_5^U \end{bmatrix}$$

$$B_5^L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \\ \frac{1}{4} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & -\frac{1}{4} \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$B_5^U = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{4} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & -\frac{1}{4} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{4} & \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

《擬 SOR 法》

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = (I - \omega L^{\text{P-SOR}_5})^{-1} ((1 - \omega)I + \omega U^{\text{P-SOR}_5}) \mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{b}''$$

($= \mathcal{L}^{\text{P-SOR}_5} \mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{b}''$ と略記する),

$$L^{\text{P-SOR}_5} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \\ -C_5 & \mathbf{0} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & -C_5 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

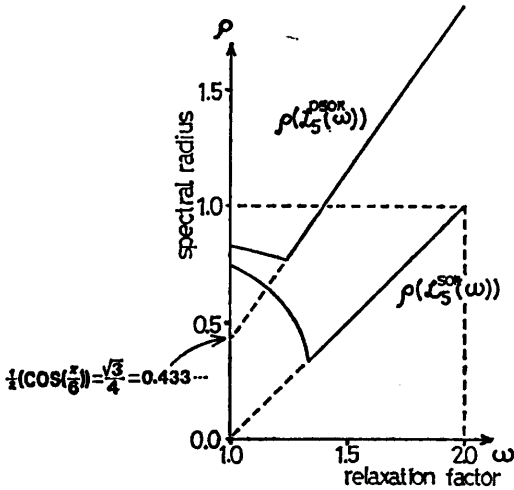


図 2 $L^{SOR_5}(\omega)$ のスペクトル半径と $L^{P-SOR_5}(\omega)$ のスペクトル半径
Fig. 2 Spectral radius of $L^{SOR_5}(\omega)$ and that of $L^{P-SOR_5}(\omega)$.

$$U^{P-SOR_5} = \begin{bmatrix} -(B^L_5 - B^U_5) & -C_5 & & & 0 \\ & (-B^L_5 - B^U_5) & -C_5 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -C_5 & \\ & & & & (-B^L_5 - B^U_5) \end{bmatrix}$$

2.2 ω の変化に対する $\rho(L^{SOR_5}(\omega))$, $\rho(L^{P-SOR_5}(\omega))$ の変化 ($\rho(A)$ は行列 A のスペクトル半径を表す)

$N=6$ の場合に、 $L^{SOR_5}(\omega)$, $L^{P-SOR_5}(\omega)$ の固有値を数値的に調べることによって、各 ω の値に対する $\rho(L^{SOR_5}(\omega))$, $\rho(L^{P-SOR_5}(\omega))$ の値を調べた。結果を図 2 に示す。

この図から次のようなことがわかる。

- (1) 擬 SOR 法の最適加速パラメータは SOR 法の最適加速パラメータよりかなり小さい。
- (2) 擬 SOR 法の最適加速パラメータを用いたときの収束率は SOR 法の最適加速パラメータを用いたときの収束率よりかなり悪い。
- (3) 擬 SOR 法においては、加速パラメータの選択を誤ると $0 < \omega < 2$ であっても反復が収束しない(発散する)ことが起こる。

ここに述べた(1)(2)(3)は、 $N=6$ 以外の場合にも一般的にいえる。

2.3 最適加速パラメータの決定 (理論的)

最適加速パラメータ (反復行列のスペクトル半径が最小になるような ω の値 ω_{OPT}) が、ここで考えているような簡単な場合には、理論的に決定できる。以

下、その結果、および、その証明を記す。

(1) SOR 法の場合

Varga の本²⁾ に完全なる記述がある。擬 SOR 法の場合との比較のために、結果を引用する。

$$\omega_{OPT} (\text{最適加速パラメータ}) = 2 / \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \right)$$

$$\lambda_{OPT} = \rho(L^{SOR_5}(\omega_{OPT})) = \omega_{OPT} - 1$$

漸近評価 ($N \rightarrow \infty$)

$$\omega_{OPT} = 2 - \frac{2\pi}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad \lambda_{OPT} = 1 - \frac{2\pi}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

(2) 擬 SOR 法の場合

ω_{OPT} : 連立方程式

$$\begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega - \lambda = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\omega \sqrt{1-\lambda} \\ \lambda = \left(1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega - 1 \end{cases}$$

の根として定まる。

$$\lambda_{OPT} = \left(1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega_{OPT} - 1$$

漸近評価 ($N \rightarrow \infty$)

$$\omega_{OPT} = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right),$$

$$\lambda_{OPT} = 1 - \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

参考: Jacobi 法の反復行列のスペクトル半径

$$= \cos\frac{\pi}{N} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \quad (N \rightarrow \infty)$$

(ω_{OPT} が上記のようにして与えられることの証明)

L^{P-SOR_5} の固有値をすべて求めることを考える。まず、 $L^{P-SOR_5}(\omega)$ の固有値を求めること ($\det(L^{P-SOR_5}(\omega) - \lambda I) = 0$ を解くこと) は、 $\det((1-\omega-\lambda)I + \lambda\omega L^{P-SOR_5} + \omega U^{P-SOR_5}) = 0$ を解くことに帰着されることに注意する。このことは

$$\begin{aligned} \det(L^{P-SOR_5}(\omega) - \lambda I) &= \det((I - \omega L^{P-SOR_5})^{-1}((1-\omega)I + \omega U^{P-SOR_5}) - \lambda I) \\ &= (\det(I - \omega L^{P-SOR_5}))^{-1} \det((1-\omega-\lambda)I + \lambda\omega L^{P-SOR_5} + \omega U^{P-SOR_5}) \end{aligned}$$

であることより、明らかである。以下、方程式

$$\det((1-\omega-\lambda)I + \lambda\omega L^{P-SOR_5} + \omega U^{P-SOR_5}) = 0$$

を考える。ここで、行列 $(1-\omega-\lambda)I + \lambda\omega L^{P-SOR_5} + \omega U^{P-SOR_5}$ は、次のようなブロック 3 重対角行列である。

$$\begin{bmatrix} E & F & & & 0 \\ \lambda F & E & F & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & F & \\ 0 & & & & \lambda F & E \end{bmatrix}$$

N-1 ブロック

$$E = \begin{bmatrix} 1-\omega-\lambda & & & & 0 \\ & \frac{\omega}{4} & & & \\ & & 1-\omega-\lambda & & \\ & & & \frac{\omega}{4} & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \frac{\omega}{4} & \\ & & & & & & 1-\omega-\lambda \end{bmatrix}$$

N-1 個

$$F = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & \frac{\omega}{4} & & & \\ & & \frac{\omega}{4} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\omega}{4} \\ 0 & & & & & \frac{\omega}{4} \end{bmatrix}$$

N-1 個

このことに注意して、次の補題を用いる。

《補題》

B, C を任意の n 次正方形列とすると、次の等式が成立する。

$$\det \begin{bmatrix} B & C & & & 0 \\ \lambda C & B & C & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & C & \\ 0 & & & & \lambda C & B \end{bmatrix}$$

m ブロック

$$= \det \begin{bmatrix} B & \sqrt{\lambda} C & & & 0 \\ \sqrt{\lambda} C & B & \sqrt{\lambda} C & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda} C & \\ 0 & & & & \sqrt{\lambda} C & B \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^m \det(B + \delta_j \sqrt{\lambda} C), \quad \delta_j = 2 \cos\left(\frac{\pi j}{m+1}\right)$$

証明は付録を参照のこと。

この補題により、 $\det((1-\omega-\lambda)I + \lambda\omega L^{P-SOR_5} + \omega U^{P-SOR_5}) = 0$ は、方程式族 $\det(E + \delta_j \sqrt{\lambda} F) = 0$, $\delta_j = 2 \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) (j=1, \dots, N-1)$ と同値であることがわ

かる。ここで、さらに、 $E + \delta_j \sqrt{\lambda} F$ が 3 重対角行列であることを注意して、再度、 $\det(E + \delta_j \sqrt{\lambda} F) = 0$ に補題を適用する。かくして、 $L^{P-SOR_5}(\omega)$ の固有値 λ を求めるのと同値な次の一連の方程式族を得る。

$$1 - \left(1 + \frac{\delta_k}{4}\right)\omega - \lambda = \frac{\delta_j \sqrt{\lambda}}{4} \omega \quad (2)$$

$$(j=1, \dots, N-1, k=1, \dots, N-1)$$

次に、これらの方程式族の解 ($L^{P-SOR_5}(\omega)$ の固有値) に対して次の命題が成立することを示す。

《命題》

(2) の方程式族の根 |

$$\leq \text{Max} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega - \lambda \right.$$

$$= -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \sqrt{\lambda} \omega \text{ の根の絶対値の最大値,}$$

$$\left. \left| \left(1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega - 1 \right| \right\}.$$

この命題が証明されれば、 ω_{OPT} が先に述べた連立方程式の根として定まるとは明らかである (以下の命題の証明の初めの部分も参照せよ)。

(命題の証明)

(2) の方程式族は、次のような形をした方程式の集まり (α, β が異なる) である。

$$\frac{1-\alpha\omega-\lambda}{\omega} = \pm \beta \sqrt{\lambda} \quad (3)$$

$$(\Leftrightarrow \lambda^2 - (\beta^2 \omega^2 + 2(1-\alpha\omega))\lambda + (1-\alpha\omega)^2 = 0)$$

$$(\alpha > 0, \beta \geq 0, \alpha > \beta)$$

以下、 $\beta > 0$ の場合と $\beta = 0$ の場合に分けて命題を示す。

($\beta > 0$ の場合)

方程式 (3) の根に関して次のようなことが成立する。

まず、 $\omega \in (0, \omega_1]$ なる ω に対して方程式 (3) は 2 実根を持ち、 $\omega \in (\omega_1, \infty)$ なる ω に対しては絶対値が $\alpha\omega - 1$ で与えられる共役複素根を持つ (図 3 参照)。

ここで、容易にわかるように、 ω_1 は $2/(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ で与えられる。今、さらに、 $\omega \in (0, \omega_1]$ においては、根の絶対値の最大値は、 ω の増加に従って単調に減少し、 $\omega \in (\omega_1, \infty)$ においては、 ω の増加に従って単調に増加する ($1/\alpha \leq \omega_1 = 2/(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ に注意せよ)。

以上のことから明らかのように、(2) の方程式族の共役複素根の絶対値は、 $\left(1 + \frac{2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega - 1$ 以下である ($2 \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$ は、 δ_k の最大値)。

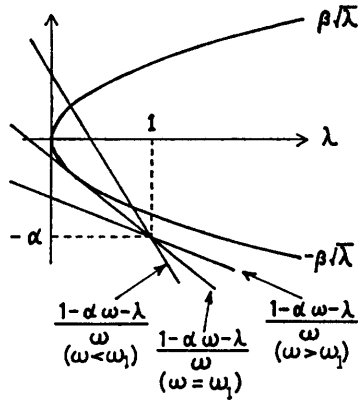


図3 $(1-\alpha\omega-\lambda)/\omega(\omega < \omega_1, \omega = \omega_1, \omega > \omega_1)$ と $\pm\beta\sqrt{\lambda}$
 Fig. 3 $(1-\alpha\omega-\lambda)/\omega(\omega < \omega_1, \omega = \omega_1, \omega > \omega_1)$ and $\pm\beta\sqrt{\lambda}$.

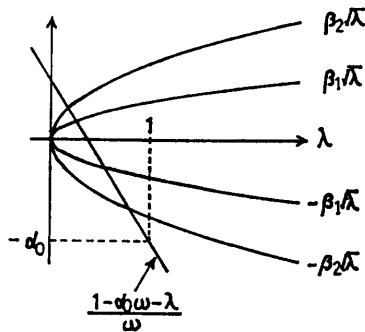


図4 $(1-\alpha_0\omega-\lambda)/\omega$ と $\pm\beta\sqrt{\lambda}(\beta = \beta_1, \beta = \beta_2)$
 Fig. 4 $(1-\alpha_0\omega-\lambda)/\omega$ and $\pm\beta\sqrt{\lambda}(\beta = \beta_1, \beta = \beta_2)$

次に、2実根について詳細に解析する。

今、 α が一定で β の異なる2つの方程式 ($\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_1$ なる方程式と、 $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_2 > \beta_1$ なる方程式) の実根について考える。このとき、図4から明らかのように、 $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_1$ なる方程式が実根を持つ限り、 $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_2$ なる方程式は実根を持ち、かつ、 $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_2$ なる方程式の絶対値最大の根は $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_1$ なる方程式の絶対値最大の根より常に大きい。

次に、 β が一定で α の異なる2つの方程式 ($\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_0$ なる方程式と、 $\alpha = \alpha_2 > \alpha_1, \beta = \beta_0$ なる方程式) の実根について考える。このとき、図5から明らかのように、 $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_0$ なる方程式が実根を持つ限り $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_0$ なる方程式は実根を持ち、かつ、 $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_0$ なる方程式の絶対値最大の根は $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_0$ なる方程式の絶対値最大の根より常に大きい。

以上の実根に関する考察により、一般に(3)の方程式族の実根の絶対値は α が最小で β が最大の(3)の方程式の絶対値最大の根より常に小さいことがわかる。したがって、(2)の実根は、

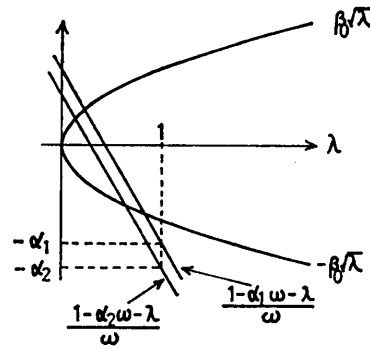


図5 $(1-\alpha\omega-\lambda)/\omega(\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2)$ と $\pm\beta_0\sqrt{\lambda}$
 Fig. 5 $(1-\alpha\omega-\lambda)/\omega(\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2)$ and $\pm\beta_0\sqrt{\lambda}$.

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega - \lambda = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\omega\sqrt{\lambda}$$

の根の絶対値の最大値より小さい。

以上から命題における不等式の成立は明らかである。

($\beta = 0$ の場合)

(3)は一次方程式になるが、上記の議論の中の2実根、共役複素根を正根、負根と読み代えれば、上記と同様の議論が成り立ち、命題における不等式の成立が容易にわかる。

表1に実際に $\omega_{OPT}, \lambda_{OPT}$ を計算した結果を示す。

3. 9点差分近似を用いた場合のSOR法と擬SOR法

3.1 SOR法, 擬SOR法の反復の行列表現

まず解くべき方程式の行列表現は、次のようになる。

$$A_9 u = b, A_9 = \begin{bmatrix} B_9 & C_9 & & & 0 \\ C_9 & B_9 & C_9 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & C_9 & B_9 \end{bmatrix}$$

表1 ω_{OPT} と λ_{OPT} (5点公式)
 Table 1 ω_{OPT} and λ_{OPT} (5-point formula).

	SOR法		擬SOR法	
	ω_{OPT}	λ_{OPT}	ω_{OPT}	λ_{OPT}
$N=6$	1.33333	0.33333	1.23431	0.76878
$N=10$	1.52786	0.52786	1.29285	0.90764
$N=20$	1.72945	0.72945	1.32259	0.97574
$N=50$	1.88183	0.88183	1.33158	0.99606
$N=100$	1.93909	0.93909	1.33289	0.99901
$N=1000$	1.99373	0.99373	1.33332	0.99999

$$B_9 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & & & & & & & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{5} & 1 & & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ & & & & & & & & -\frac{1}{5} \\ \mathbf{0} & & & & & & & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_9 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{20} & & & & & & & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{5} & & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ & & & & & & & & -\frac{1}{20} \\ \mathbf{0} & & & & & & & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

また、SOR 法、擬 SOR 法の反復は、次のように行列表現できることがわかる。

《SOR 法》

$$u^{(m+1)} = (I - \omega L^{\text{SOR}_9})^{-1} ((1 - \omega)I + \omega U^{\text{SOR}_9}) u^{(m)} + b'$$

$$(\cong L^{\text{SOR}_9} u^{(m)} + b'),$$

$$L^{\text{SOR}_9} = \begin{bmatrix} -B^L_9 & & & & \mathbf{0} \\ -C_9 & -B^L_9 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ \mathbf{0} & & & -C_9 & -B^L_9 \end{bmatrix},$$

$$U^{\text{SOR}_9} = \begin{bmatrix} -B^U_9 & -C_9 & & & \mathbf{0} \\ & -B^U_9 & -C_9 & & \\ & & \dots & \dots & \\ \mathbf{0} & & & & -C_9 \\ & & & & -B^U_9 \end{bmatrix},$$

$$B^L_9 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{5} & 0 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ \mathbf{0} & & & & -\frac{1}{5} \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^U_9 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & & & \mathbf{0} \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ & & & & -\frac{1}{5} \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

《擬 SOR 法》

$$u^{(m+1)} = (I - \omega L^{\text{P-SOR}_9})^{-1} ((1 - \omega)I + \omega U^{\text{P-SOR}_9})$$

$$u^{(m)} + b'' (\cong L^{\text{P-SOR}_9} u^{(m)} + b''),$$

$$L^{\text{P-SOR}_9} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \mathbf{0} \\ -C_9 & 0 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ \mathbf{0} & & & -C_9 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U^{\text{P-SOR}_9} = \begin{bmatrix} (-B^L_9 - B^U_9) & -C_9 & & & \mathbf{0} \\ & (-B^L_9 - B^U_9) & -C_9 & & \\ & & \dots & \dots & \\ \mathbf{0} & & & & -C_9 \\ & & & & (-B^L_9 - B^U_9) \end{bmatrix}$$

3.2 ω の変化に対する $\rho(L^{\text{SOR}_9}(\omega))$, $\rho(L^{\text{P-SOR}_9}(\omega))$ の変化

$N=6$ の場合に、 $L^{\text{SOR}_9}(\omega)$, $L^{\text{P-SOR}_9}(\omega)$ の固有値を、数値的に調べることによって、各 ω の値に対する $\rho(L^{\text{SOR}_9}(\omega))$, $\rho(L^{\text{P-SOR}_9}(\omega))$ の値を調べた。結果を図 6 に示す。 $\rho(L^{\text{SOR}_9}(\omega))$ の直線状に見える部分は実は直線ではないことに注意せよ。

この図から、9点差分近似を用いた差分化によって得られた連立一次方程式に SOR 法、擬 SOR 法を適用する場合においても、2.2 節で述べた (1)(2)(3) と同様のことが言えることがわかる。

また、 $N=6$ 以外の場合についても一般に同様のことが言える。

3.3 最適加速パラメータの決定 (理論的)

(1) SOR 法の場合

種々の数値実験から、次のことがかなりの確実性を

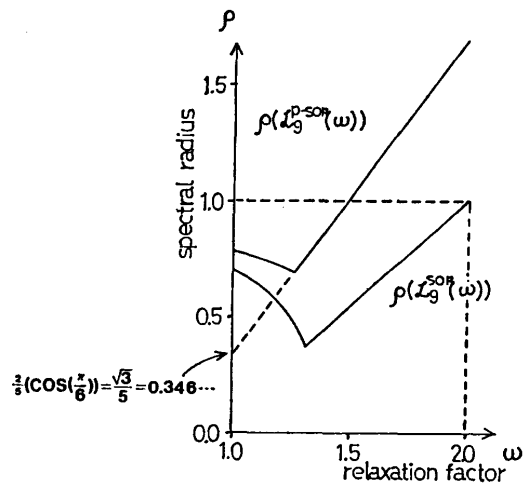


図 6 $L^{\text{SOR}_9}(\omega)$ のスペクトル半径と $L^{\text{P-SOR}_9}(\omega)$ のスペクトル半径

Fig. 6 Spectral radius of $L^{\text{SOR}_9}(\omega)$ and that of $L^{\text{P-SOR}_9}(\omega)$

もって言えるようである (証明は未完).

『 $\delta = \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$ 』とする. このとき, λ に関する四次方程式: $(1-\omega-\lambda)^4 - 2\delta^2(8+\delta^2)(\omega/5)^2\lambda(1-\omega-\lambda)^2 + \delta^6(\omega/5)^4\lambda^2 + 16\delta^4(\omega/5)^3\lambda(\lambda+1)(1-\omega-\lambda) - 4\delta^6(\omega/5)^4\lambda(\lambda+1)^2 = 0$ の実根の最大値と虚根の絶対値が一致する ω が ω_{OPT} である. λ_{OPT} は, $\omega = \omega_{OPT}$ のときの λ の四次方程式の実根の最大値で与えられる』

漸近評価 (実験式)

上記の『...』が成立するとして, $N \leq 1000$ について, ω_{OPT} , λ_{OPT} を求めて, 次の実験式を得た.

$$\omega_{OPT} \doteq 2 - \frac{6.63}{N}, \quad \lambda_{OPT} \doteq 1 - \frac{5.61}{N}.$$

上記の λ の四次方程式の由来を簡単に記しておく.

2.3 節の (2) で述べたと同様に, $\mathcal{L}^{SOR_9}(\omega)$ の固有値を求めること ($\det(\mathcal{L}^{SOR_9}(\omega) - \lambda I) = 0$ を解くこと) は, $\det((1-\omega-\lambda)I + \lambda\omega L^{SOR_9} + \omega U^{SOR_9}) = 0$ を解くことに帰着される. ここで, 行列 $(1-\omega-\lambda)I + \lambda\omega L^{SOR_9} + \omega U^{SOR_9}$ の形に注意して, 補題を 2 段階に用いて, $\det((1-\omega-\lambda)I + \lambda\omega L^{SOR_9} + \omega U^{SOR_9})$ を分解する. かくして, $\det(\mathcal{L}^{SOR_9}(\omega) - \lambda I) = 0$ と同値な方程式族

$$\begin{aligned} & 1 - \omega - \lambda - \delta_j(\omega/5)\sqrt{\lambda} - \delta_k(\omega/5) \\ & \quad \times \sqrt{(\lambda - (\delta_j/4)\sqrt{\lambda})(1 - (\delta_j/4)\sqrt{\lambda})} = 0, \\ & \delta_j = 2 \cos\left(\frac{\pi_j}{N}\right), \quad (j=1, \dots, N-1, \quad k=1, \dots, N-1) \end{aligned}$$

を得る. これらの方程式族のうちの

$$\begin{aligned} & 1 - \omega - \lambda \pm \delta_1(\omega/5)\sqrt{\lambda} + \delta_1(\omega/5) \\ & \quad \times \sqrt{(\lambda \pm (\delta_1/4)\sqrt{\lambda})(1 \pm (\delta_1/4)\sqrt{\lambda})} = 0 \end{aligned}$$

(複号同順)

$$\begin{aligned} & 1 - \omega - \lambda \pm \delta_1(\omega/5)\sqrt{\lambda} - \delta_1(\omega/5) \\ & \quad \times \sqrt{(\lambda \pm (\delta_1/4)\sqrt{\lambda})(1 \pm (\delta_1/4)\sqrt{\lambda})} = 0 \end{aligned}$$

(複号同順)

に対応する λ の四次方程式が, 『...』の中にあらわれた λ の四次方程式である.

(2) 擬 SOR 法の場合

ω_{OPT} : 連立方程式

$$\begin{aligned} & 1 - \left(1 - \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega - \lambda \\ & = -\frac{\omega}{5} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right) \sqrt{\lambda} \\ & \lambda = \left(1 + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega - 1 \end{aligned}$$

の根として定まる.

$$\lambda_{OPT} = \left(1 + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\omega_{OPT} - 1$$

表 2 ω_{OPT} と λ_{OPT} (9 点公式)
Table 2 ω_{OPT} and λ_{OPT} (9-point formula).

	SOR 法		擬 SOR 法	
	ω_{OPT}	λ_{OPT}	ω_{OPT}	λ_{OPT}
$N=6$	1.31393	0.37071	1.26184	0.69896
$N=10$	1.50902	0.56335	1.35459	0.86991
$N=20$	1.71627	0.75377	1.40799	0.96425
$N=50$	1.87542	0.89351	1.42517	0.99411
$N=100$	1.93567	0.94529	1.42772	0.99852
$N=1000$	1.99337	0.99439	1.42856	0.99999

(証明は, 5 点差分近似の場合とほとんど同じであるので省略する.)

漸近評価 ($N \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \omega_{OPT} &= \frac{10}{7} - \frac{85}{98} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right), \\ \lambda_{OPT} &= 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \end{aligned}$$

参考: Jacobi 法の反復行列のスペクトル半径 =

$$\frac{4}{5} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) + \frac{1}{5} \left(\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)^2 = 1 - \frac{3}{5} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

表 2 に実際に ω_{OPT} , λ_{OPT} を計算した結果を示す.

4. まとめ (おわりに)

以上から, 5 点差分近似の場合, 9 点差分近似の場合ともに, 次のようなことが言える.

(1) SOR 法の漸近収束率は $1 - C/N$ であるのに対して, 擬 SOR 法の漸近収束率は $1 - C'/N^2$ であり, Jacobi 法の数倍である. したがって, ベクトル計算機を使用して, 擬 SOR 法を動かしたとしても本来の SOR 法に比べて効率がよいとは言えない.

(2) 擬 SOR 法の ω_{OPT} は, SOR 法のそれとは全く異なる. また, SOR 法向きの最適パラメータ ($\approx 1.9 \dots$) を用いると, 擬 SOR 法は発散してしまう.

以上のことから, 結局, 『本来の SOR 法を hyperplane 法などを用いてベクトル計算機上で動かすことがよい』という結論を得る. ただし, リストベクトル (間接アドレス) を使う計算が遅いベクトル計算機では, このことが成り立たない可能性もある.

参考文献

- 1) Lamport, L.: The Parallel Execution of DO Loops, *Comm. ACM*, Vol. 17, pp. 83-93 (1974).
- 2) Varga, R.S.: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, New York (1962).

付 録

(補題の証明)

第 1 の等式は自明であるから、第 2 の等式を示す。
 それには、次の一般の命題を示しておけばよい。

《命題》

対角要素がすべてゼロであるような m 次正方行列 $A=(a_{ij})$ が、ある正則行列 P を用いて、次のように対角化可能であるとす。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} P^{-1}. \quad (1)$$

このとき、 B, C を任意の n 次正方行列とすると、次の等式が成立する。

$$\det \begin{bmatrix} B & a_{12}C & \dots & a_{1m}C \\ a_{21}C & B & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{m1}C & \dots & a_{mm-1}C & B \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^m \det(B + \lambda_j C).$$

(命題の証明)

(1)の両辺に不定元 z をかけ、さらに、不定元 y をたすと、次の y と z に関する恒等式を得る。

$$\begin{bmatrix} y & a_{12}z & \dots & a_{1m}z \\ a_{21}z & y & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{m1}z & \dots & a_{mm-1}z & y \end{bmatrix}$$

$$= P \begin{bmatrix} y + \lambda_1 z & & & 0 \\ & y + \lambda_2 z & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & y + \lambda_m z \end{bmatrix} P^{-1}.$$

この等式で右辺が左辺になる計算を考えてみれば容易にわかるように、この等式は不定元 y, z を n 次正方行列 B, C に、定数 (例えば u とすると) を

uI (I は n 次単位行列) に変えても成立する。つまり、次のような行列についての等式が成立する。

$$\begin{bmatrix} B & a_{12}C & \dots & a_{1m}C \\ a_{21}C & B & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{m1}C & \dots & a_{mm-1}C & B \end{bmatrix}$$

m ブロック

$$= \tilde{P} \begin{bmatrix} B + \lambda_1 C & & & 0 \\ & B + \lambda_2 C & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B + \lambda_m C \end{bmatrix} \tilde{P}^{-1}.$$

ここで \tilde{P} は、 P の (i, j) 成分 p_{ij} を $p_{ij}I$ に変えてできる $n \times m$ 次行列。

この等式の両辺で行列式の値を考えれば、求める等式を得る。 ■

(平成元年 11 月 10 日受付)

(平成 2 年 3 月 6 日採録)



杉原 正顕 (正会員)

昭和 29 年生。昭和 52 年東京大学工学部計数工学科卒業。昭和 57 年同大学院博士課程修了。工学博士。同年東京大学助手、筑波大学助手、昭和 62 年講師、昭和 62 年一橋大学講師、昭和 63 年同助教授、現在に至る。専門は数値解析、応用数学。日本応用数理学会、日本数学会各会員。

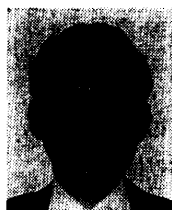


小柳 義夫 (正会員)

昭和 18 年生。昭和 41 年、東京大学理学部物理学科卒業。昭和 46 年、東京大学大学院理学系研究科物理学専門課程博士課程修了。理学博士。同年、東京大学理学部物理学教室助手。昭和 48 年、高エネルギー物理学研究所物理研究系助手。昭和 53 年、筑波大学電子・情報工学系講師・助教授を経て教授。数値解析とその物理学への応用を研究。とくにベクトル計算機、並列処理、スーパーコンピューティングなど。格子ゲージ理論のための超並列計算機 QCDPAX を製作。日本物理学会、日本統計学会、応用統計学会、計算機統計学会各会員。

**森 正武 (正会員)**

昭和 12 年生。昭和 36 年東京大学工学部応用物理学科卒業。昭和 40 年同大学院博士課程中退。同年同大学助手。昭和 45 年京都大学助教授。昭和 54 年筑波大学教授を経て、平成元年から東京大学工学部物理工学科教授。工学博士。専門は数値解析。著書「数値解析」、「曲線と曲面」、「有限要素法とその応用」、「FORTRAN 77 数値計算プログラミング」ほか。日本応用数学会、日本数学会、日本物理学会各会員。

**藤野 清次 (正会員)**

1950 年生。1974 年京都大学理学部(専攻数学)卒業。同年三洋電機(株)に入社。以後、電磁場計算、医療機器画像処理計算、熱流体計算の研究・開発に従事。1988 年計算流体力学研究所(株)入社。研究部主任研究員。偏微分方程式の離散化から生じる大型疎連立一次方程式のベクトル計算機向き高速解法に興味を持つ。応用数学会会員。