命題自己認識論理における拡張世界構成アルゴリズム†

馬場口 登†† 森馬 純一†† 手塚 慶一††

非単調推論は，演繹推論の枠組を越える推論（高次推論）の範疇に入るもので，不完全な知識や例外を含む知識からの推論，もしくはデフォルトなどにより仮の結論を許容する推論と密接な関係がある．自己認識論理(Autoepistemic Logic)は，非単調推論を定式化する論理の1つであり，信じていることと信じていないことを自ら把握しているエージェントが，信念を基に結論に到達する推論機構をモデル化したものである．自己認識論理で重要な概念である拡張世界(extension)は，与えられた前提から自己認識推論により得られる結論に相当するものであるが，前提から拡張世界を直接的に構成することが難しいという問題点がある．そこで本論文では，この問題点に対処するために，可能世界意味論の立場から，命題自己認識論理の拡張世界構成アルゴリズムを提案する．提案アルゴリズムの特徴として，拡張世界が可能世界を通して直接的に構成できること，および拡張世界で成立する式が，直観的に把握できることがあげられる．提案アルゴリズムの妥当性を証明し，その計算複雑度が $O(n2^n)$ であることを明らかにする．さらに，計算機上でのアルゴリズム実行例を示す．

1. はじめに

現在の知識処理システムで採用されている推論方式は主に，一階述語論理をベースにした演繹推論(deduction)である．演繹推論は，「P」と「P ならば Q」から「Q」を推論するという形式のもので，人間の持つ推論形態の中で最も基本的なものであると考えられる．演繹推論で導き出せる結論は，現在持つ知識の集合から論理的に帰結される事実，すなわち100% 正しいと思われるものである．この性質から演繹推論システムでは，対象領域についての正しいすべての知識を記述すること，言い換えれば知識の完全性が要請され，原理的にそのシステムの有する知識の範囲内の能力しか持ちえないという欠点を持つ．

近年，演繹推論の枠組を越える推論に関する研究が盛んになり，この種の推論を高次推論と呼ぶことがある[1]．非単調推論 (nonmonotonic reasoning) は高次推論の1つと位置づけられ，推論により得られる知識集合が非単調に増加するという性質にその名が由来する．逆に，得られる知識集合が単調に増加する推論は，単調推論 (monotonic reasoning) と呼ばれ，実は演繹推論がそれに相当する．非単調推論は，不完全な知識や例外を含む知識からの推論，もしくはデフォルトなどにより仮の結論を許容する推論と密接な関係がある．非単調推論システムでは，知識の完全性が要求されないので，上述の演繹推論システムの持つ問題点を克服しうるものとして期待される．

非単調論理は非単調推論を定式化するための論理であり，80年代に入り，種々の定式化の試みがなされてきた．ここで対象とする自己認識論理[2] (Autoepistemic Logic, AL と略記する）は，McDermott らの Nonmonotonic Logic[6] が有する問題点を解決するため，Moore により提案されたものである．AL は形式論と意味論との間で明確な対応付けが規定されていることから，興味深い非単調論理の1つとして，近年活発な研究が行われている[3)~5)]．

さて，論理による推論体系を論じる際に，前提となる知識から，結論を導き出す過程が重要な要素になる．例えば，単調論理においては，結論集合である定理を得るのに，導出がしばしば用いられる．AL において，単調論理の定理に対応する概念が拡張世界(extension)* である．よって拡張世界を構成することは，高次推論である自己認識推論を実現することに相当し，AL の論理的性質を吟味する上でも不可欠な事項である．ところが，従来から指摘されているように[3)]，AL では拡張世界を前提から直接的に構成することは難しいという問題点がある．

この問題点に対処するために，Moore は可能世界意味論から AL を考察して有用な基本定理を導いた[3)]．そこで本論文では，基本定理をさらに発展させ，命題 AL における拡張世界構成について検討し，アルゴリズムとして具体化する[7)]．加えて，提案アルゴリズムの妥当性，計算複雑度について議論すると共に，計算機上での実行例を示す．

† An Algorithm for Constructing Extensions of Propositional Autoepistemic Logic by NOBORU BABAGUCHI, JUN-ICHI MORI-UMA and YOSHIKAZU TEZUKA (Department of Communication Engineering, Faculty of Engineering, Osaka University).
†† 大阪大学工学部通信工学科

* Moore が文献 2) で定義した安定な拡張世界 (Stable Expansion) と同一のものを指す．

2. 自己認識論理の概要[2),5)]

AL は信念 (belief) の概念に基づく論理であり，信じていることと信じていないことの両方を知っている理想エージェント（人間，計算機等と考えてもよい）が，自身の信念に基づき，結論に到達するという推論をモデル化したものである．この推論は，エージェント自らの信念の状態を把握しながら推論を進めるという観点から自己認識推論と名付けられている．人間は，確たる根拠を持たない場合においても，信念に従って行動を起こしたりすることがあり，またその信念は翻ることもある．この種の推論を，単調な演繹推論の枠組，すなわち命題・述語論理などの通常論理 (ordinary logic) で捉えることは不可能であることが知られている[1)]．

AL は知識表現の基礎となる通常論理体系に信念オペレータ Lを導入して拡張されたものである．すなわち，式 Lp を言語上での論理式として許容する．以下では，Lp なる形の式を L 式と称する．AL では，信念オペレータ L を「信じている」と解釈する．よって，式 Lp は「p が信じられている」あるいは「エージェントは pが真であることを信じている」と解釈される．AL の非単調性は，現在持つ知識・信念集合に対して，L 式の真理値が変わりうることから生じる．

ここで，以降の議論で必要な AL の諸定義を示す．

［定義 1］ 自己認識理論 $\mathcal{T}$ とは，論理式の集合である． ■

自己認識理論（以後，単に理論 (theory) と呼ぶ）は，エージェントが持つべき信念の集合を表すものである．

［定義 2］ 理論 $\mathcal{T}$ の自己認識解釈 I とは，$\mathcal{T}$ の論理式に対して，以下の条件を満たす真理値の割当である．

1. I は通常論理における真理値の割当に従う．
2. $p\in\mathcal{T}$ であるとき，またそのときに限り I で式 Lp が真である． ■

次に，理論を特徴付ける 2 つの形式的性質である安定性 (stability) と依存性 (groundedness) について説明する．

［定義 3］ 理論 $\mathcal{T}$ が，

1. $p_1,\cdots,p_n\in\mathcal{T}$，かつ $p_1,\cdots,p_n\vdash q$ ならば，$q\in\mathcal{T}$ である．ここで，$\vdash$ は通常論理における論理的帰結を表す．
2. $p\in\mathcal{T}$ ならば $Lp\in\mathcal{T}$.
3. $p\notin\mathcal{T}$ ならば $\sim Lp\in\mathcal{T}$.

を満たすとき，またそのときに限り，$\mathcal{T}$ は安定である (stable) という． ■

1. は，エージェントの信念集合が論理的帰結の下で閉じていること，2.，3. はエージェントが，信じていることと信じていないことの両方をわかっていることを表している．理論の安定性とは，エージェントの持つ信念集合が推論により，もはや変化しない状態を指示するものである．また，安定な理論 $\mathcal{T}$ は，意味論的に，$\mathcal{T}$ の各式を真とするあらゆる自己認識解釈のもとで真となる式の集合から構成されていることを意味する．

いま，エージェントが推論を始めるときに持っている知識・信念の集合を前提 Δ（論理式の有限集合）とし，理論と前提間の依存性を定義する．

［定義 4］ 理論 $\mathcal{T}$ が，

$$\mathcal{T}\subseteq\{\phi\mid\Delta\cup PB(\mathcal{T})\cup NB(\mathcal{T})\vdash\phi\}$$

ただし，$PB(\mathcal{T})\triangleq\{Lp\mid p\in\mathcal{T}\}$,

$NB(\mathcal{T})\triangleq\{\sim Lp\mid p\notin\mathcal{T}\}$,

を満たすとき，またそのときに限り，$\mathcal{T}$ は Δ に依存する (grounded) という． ■

ここに，$\Delta\cup PB(\mathcal{T})\cup NB(\mathcal{T})$ を基底集合，Lp, $\sim Lp$ を各々正，負の信念と呼ぶ．$PB(\mathcal{T})$, $NB(\mathcal{T})$ については 3.1 節で詳しく議論する．依存性を意味論的に見ると，Δ の各式を真とする $\mathcal{T}$ の自己認識解釈の各々が，$\mathcal{T}$ の各式を真とすることに当たる．

最後に，拡張世界を定義する．

［定義 5］ 理論 $\mathcal{T}$ が，

$$\mathcal{T}=\{\phi\mid\Delta\cup PB(\mathcal{T})\cup NB(\mathcal{T})\vdash\phi\} \qquad (1)$$

を満たすとき，またそのときに限り，$\mathcal{T}$ は Δ の拡張世界 EX[Δ] であるという． ■

安定性の定義より，安定な理論 $\mathcal{T}$ が，$\Delta\subseteq\mathcal{T}$ を満たすとき，$\{\phi\mid\Delta\cup PB(\mathcal{T})\cup NB(\mathcal{T})\vdash\phi\}\subseteq\mathcal{T}$，であることは容易にわかる．したがって，$\mathcal{T}$ が Δ の拡張世界であるための必要十分条件は，$\mathcal{T}$ が安定で，Δ を含み，かつ Δ に依存することである．拡張世界は単調論理における定理と同等の概念であるが，前提に対して，複数個になったり，存在しなかったりすることに注意する必要がある．

3. 拡張世界構成アルゴリズム

3.1 AL の非構成性

拡張世界は，(1)式から明らかなように，理論 $\mathcal{T}$ に関する不動点方程式として定義される．これは，考えうるすべての理論（すなわち論理式の集合）を枚挙し，

この方程式に代入し，それを満たすかどうかを調べなければならないことを意味する．

ここで，基底集合 $\Delta\cup\mathrm{PB}(\mathcal{T})\cup\mathrm{NB}(\mathcal{T})$ について考察しよう．まず，式の集合 $\mathcal{T}$ を考え，p が $\mathcal{T}$ の論理的帰結である，すなわち $\mathcal{T}$ を真とするすべての通常解釈（通常論理における解釈のことを指すものとする）のもとで p が真であるとき，Lp は正の信念集合 $\mathrm{PB}(\mathcal{T})$ の要素となる．そして p が $\mathcal{T}$ の論理的帰結でない，すなわち $\mathcal{T}$ を真とし，かつ p を偽とする通常解釈が少なくとも1つ存在するとき，$\sim Lp$ は負の信念集合 $\mathrm{NB}(\mathcal{T})$ の要素となる．このことは，Lp の真理値が，意味論的には理論 $\mathcal{T}$ から p が論理的に帰結されるか否か，証明論的には p の証明の有無に依存し，p の真理値と Lp のそれとの間の直接的な対応関係が存在しないことを示唆している．

ちなみに，論理的帰結であること，および論理的帰結でないことは各々，論理式の充足不可能性，および充足可能性に等価である．一階述語計算の場合には，充足不可能性を調べる手続きは存在するが，充足可能性を調べる手続きは存在しないので，一階述語計算での AL は，半決定的ですらないことに注意されたい[9]．

拡張世界を構成するには，ある適当な理論 $\mathcal{T}$ を決め，そして $\mathcal{T}$ から基底集合を定め，基底集合の論理的帰結となる式の集合が $\mathcal{T}$ と一致することを確かめる必要がある．したがって，前提 Δ から拡張世界である理論を，直接的に求めることが困難であるという問題点が存在し，これは AL の非構成的 (nonconstructive) 性質と呼ばれている．

先に述べたように，Moore は文献3) でこの非構成的性質を解決する方策として可能世界意味論の立場から，重要な基本定理を導いたものの，拡張世界の具体的な構成手続きには言及していない．われわれは，基本定理を基に，拡張世界と可能世界意味論との関係を新しく定理として明確化することにより，AL の拡張世界構成アルゴリズムを具体化していく[7]．

3.2 可能世界意味論での AL

可能世界意味論で AL を議論するのに先立ち，可能世界に関する基礎概念について触れる．可能世界の考えを初めて導入したのは Kripke であり，様相論理 (modal logic) で Lp, Mp という形の式の意味を定めるのに用いた．簡単にいうと，考えうる状況に対応する複数個の可能世界を使って，モデルを考えるというものである．ここでは，後の議論に必要最小限の範囲にとどめるので，詳しくは文献8)を参照されたい．

可能世界意味論における解釈は，可能世界の集合，到達可能性，および真理値割当により規定される．ある世界 $w1$ から世界 $w2$ に到達可能であるということは，$w2$ の真理値を $w1$ で参照できるということであり，これを二項関係として $R(w1, w2)$ と表すことにする．ここで到達可能性に関して，次の性質が考えられる．

反射性：$R(w1, w1)$ が成り立つ．

推移性：$R(w1, w2)$ かつ $R(w2, w3)$ ならば，$R(w1, w3)$ が成り立つ．

対称性：$R(w1, w2)$ ならば $R(w2, w1)$ が成り立つ．

これらの性質のうち，いずれを持つかによって可能世界集合（構造と呼ぶ）の表す体系が異なってくる．例えば，反射性と推移性を持つ場合には S4 体系を，上述の全性質を持つ場合には S5 体系を表すことになる．これらの構造をそれぞれ S4 構造，S5 構造と呼ぶ．

以下，簡単のため，命題計算での AL (Propositional AL, 以下 PAL と略記) を対象に議論を進めていく．まず，PAL を可能世界意味論上で考えるとき，安定な理論は完全 S5 構造によって表されることが，次の定理により保証されている[3]．ここで完全 S5 構造とは，S5 構造の中でも特に，構造に含まれる任意の世界から，すべての世界に到達可能なものを指す．

［定理1］ $\mathcal{T}$ が安定な理論であるとき，またそのときに限り，$\mathcal{T}$ がある完全 S5 の構造のすべての世界において真となる式の集合である． ■

この定理から，安定な理論 $\mathcal{T}$ の自己認識解釈は，完全 S5 構造の可能世界で議論することが可能となる．よって，次の可能世界解釈が定義される[3]．このとき，完全 S5 構造の性質より，解釈には構造と真理値割当のみを考慮すれば十分である．

［定義6］ 安定な理論 $\mathcal{T}$ を完全 S5 構造 K で表すとき，$\mathcal{T}$ の可能世界解釈を次の条件を満たす K と V の組 (K, V) として定義する．ただし，V は命題定数への真理値の割当であり，論理式に対する真理値割当は，命題論理に従う．

1. 命題定数が (K, V) において真であるとき，またそのときに限り，命題定数は V で真となる．
2. 式 Lp が (K, V) において真であるとき，またそのときに限り，p は K のすべての世界で真となる．
3. 式 Lp が (K, V) において偽であるとき，また

そのときに限り，p は K の少なくとも1つの世界で偽となる. ■

上の定義は，K は L 式への真理値割当を規定し，V は命題定数への真理値割当を規定することを示している．例として，$K=\{\{P,Q\},\{P,\sim Q\}\}$，$V=\{P,\sim Q\}$ の下での式 $LP \rightarrow Q$ の可能世界解釈を考える．K のすべての世界で P が真になるので，LP は真となり，一方 V で Q が偽であるので，$LP \rightarrow Q$ は (K,V) で偽と解釈される．ここで命題定数の正，負のリテラルは，各々真，偽の割当を表すものとする．

安定な理論に対して，自己認識解釈（定義2参照）と可能世界解釈が同じ意味を持つことに注意されたい．上述の可能世界解釈は，式 p と式 Lp 間の真理値の関係を可能世界を通して明確化したことになり，拡張世界を構成するのに大きく寄与する．また，可能世界解釈における充足性に関して次の定理がある[3]．

［定理2］ $\mathcal{T}$ の可能世界解釈 (K,V) が $\mathcal{T}$ のすべての式を真とするとき，またそのときに限り，真理値の割当 V が K に含まれるある可能世界によって与えられる真理値の割当に一致する． ■

われわれは，以上の Moore の定理に基づき，拡張世界と可能世界解釈に関する定理3を新たに導く．なお，定理3の証明は付録に記す．

［定理3］ K を安定な理論 $\mathcal{T}$ を表す完全 S5 構造とするとき，次の2つの条件は同値である．

（1） $\mathcal{T}$ が前提の集合 Δ の拡張世界である．

（2） Δ の各式が真となるどの $\mathcal{T}$ の可能世界解釈 (K,V) についても，V の真理値の割当に一致する可能世界 w が K に含まれ（包含条件と呼ぶ），かつ K のどの可能世界 w でも Δ の各式が真となる（充足条件と呼ぶ）． ■

3.3 アルゴリズムの詳細

前節での議論から拡張世界 EX[Δ] を求めることは定理3の充足・包含条件を満たす完全 S5 構造 K を求めることに帰着される．提案アルゴリズムの詳細を以下に記述する．

［拡張世界構成アルゴリズム］

（1） 前提の有限集合 Δ に現れるすべての L 式の集合 Δ_L とする．ただし，Δ_L に含まれる LP という形の式の P 各々について，P がさらに LQ という形の式を部分式に持つならば，その LQ もまた Δ_L の要素でなければならない．また，前提に現れるすべての命題定数の集合を Δ_C とする．

（2） Δ_L に含まれる各式に対する真理値の割当 $U_i (i=1,\cdots,i\max)$ を行う．そして同様に Δ_C に含まれる各命題定数への真理値の割当 $V_j (j=1,\cdots,j\max)$ を行う．ここで Δ_L, Δ_C の要素数を各々 N, M とすると $i\max=2^N$, $j\max=2^M$ となる．

（3） 以下の手順に従い，**表1**の空欄を埋めていく．

（3a） 真理値の割当 U_i, $(i=1,\cdots,i\max)$, V_j, $(j=1,\cdots,j\max)$ に対して，Δ のすべての式が真となるとき，表の U_i と V_j の交わる欄に“1”，そうでないとき“0”を記入する．この操作をすべての U_i と V_j の組合せに対して行う．

（3b） U_i について，U_i と V_j の交わる欄を“1”としている V_j の集合を作り，K の欄に記入する．

（3c） U_i について，K が次の条件を満たすか否かを調べる．

Δ_L に含まれる各々の式 LP_k について，

- U_i によって LP_k に真が割り当てられているとき，K に含まれるすべての V で P_k が真となる．
- U_i によって LP_k に偽が割り当てられているとき，K に含まれる少なくとも1つの V で P_k が偽となる．

ただし，P_k がさらに LQ なる形の式を含むとき，LQ の真理値は U_i に従うものとする．

これらの条件を満たすとき，ラベルの欄に“C”(consistent)，そうでないとき，“I”(inconsistent)を記入する．この操作をすべての K_i について行う． ■

本アルゴリズムのうち，ステップ(3a)(3b)は前提 Δ を充足する可能世界の集合を選択することを意味し，またステップ(3c)の条件は，K が完全 S5 構造であるための検証条件である．

3.4 アルゴリズムの妥当性

提案アルゴリズムは PAL を対象としているので，命題計算の有限性より，アルゴリズムの停止性は明らかに保証される．アルゴリズムの妥当性に関する定理

表1 拡張世界構成用テーブル
Table 1 A table for constructing extensions.

$U_i \backslash V_j$	V_1	V_2	——	$V_{j\max}$	K	Label
U_1						
U_2						
|						
$U_{i\max}$						

を与える．

［定理4］ 前提 Δ から本アルゴリズムにより“C”とラベル付けされた完全S5構造を K_i とする．このとき，次の2条件は同値である．

（1） $\mathcal{T}$は K_i によって表される理論である．

（2） $\mathcal{T}$は Δ の拡張世界である． ■

定理4は，本アルゴリズムで得られる“C”とラベル付けされる完全S5構造 K_i が，定理3の充足条件・包含条件を満たし，またこの2条件を満たす K_i が本アルゴリズムで必ず“C”とラベル付けされることを示すことによって証明される．定理4は本アルゴリズムが，健全かつ完全であることを示唆するものである．その証明は付録2に詳述する．

無矛盾な拡張世界が複数個存在するときには，$K\neq\phi$ かつ“C”とラベル付けされる構造が複数個あり，また拡張世界が存在しないときには，すべての構造に対して“I”とラベル付けされる．また，特殊な場合として，矛盾した前提Δに対しては，定義5より矛盾した拡張世界がただ1つ存在し，PAL で定義される言語の全体集合となる．このような場合，本アルゴリズムでは，$K=\phi$ かつ“C”とラベル付けされる構造がただ1つ得られる．

3.5 アルゴリズムの計算複雑度

本節では，提案アルゴリズムの評価規範の1つとして計算複雑度 (complexity) を取り上げ，考察する．

まず，問題に対する入力サイズ n について考えよう．アルゴリズムへの入力は，前提を表す論理式の有限集合Δであるが，具体的には3.3節のアルゴリズムのステップ(1)で示したように，L 式の集合 Δ_L，および命題定数の集合 Δ_C である．ここで

$$\Delta_L \triangleq \{\delta_{Li} \mid i=1, \cdots, N\}$$

$$\Delta_C \triangleq \{\delta_{Cj} \mid j=1, \cdots, M\}$$

であるので，入力サイズ n は Δ_L, Δ_C の各要素数の総和 $N+M$ となる．

次にアルゴリズムのステップ(2)，(3a)の操作は，前提の各式の連言をとった論理式 $\Delta'(\delta_{C1}, \cdots, \delta_{CM}, \delta_{L1}, \cdots, \delta_{LN})$ の評価，すなわち解釈を行うことに置き換えられる．命題定数，L 式への真理値の割当て方は各々 2^M, 2^N 通りであるので，Δ' は，$2^{M+N}=2^n$ 通りの組合せにより評価される．また，Δ' に出現する各 δ_{Li}, δ_{Cj} は高々有限個であり，n (δ_{Li}, δ_{Cj} の個数の和) の定数倍の計算量（すなわち $O(n)$ の計算量*）で1つの真理値割当てに対する Δ' の評価が行える．よって，ステップ(2)，(3a)の計算量は $O(n2^n)$ になる．ステップ(3b)，(3c)の操作の各計算量は，高々 2^{M+N}，および $N2^n$ であり，$N\leqq n$, $M+N=n$ ゆえ，これらのステップの計算量は，$O(n2^n)$ を越えることはない．結果的に，提案アルゴリズムの計算複雑度は $O(n2^n)$ であり，計算理論の観点から，本論文で対象としているものは，難しい (intractable) 問題であるといえる[10]．

実用的な側面から，計算量を減らす方策として次の3点が想定できる．

1. 通常論理式の解釈から V を絞る．

Δ に p や $\sim p$ のような単一リテラルからなる式が含まれている場合，例えば Δ に p という式があれば，pが偽であるような Vを考慮する必要がなくなり，提案アルゴリズムで考慮すべきVの半数だけを対象とすればよいことになる．したがって，単一リテラルからなる式が k 個存在すれば，対象とする V の数を 2^{-k} 倍に絞ることができる．通常の知識ベースにはこのような式が多く存在すると考えられるので，大幅な効率化が可能である．またその他の通常式，例えば $p\rightarrow q$ についても，p が真，q が偽である Vを対象から外すことができ，通常論理式の解釈を優先することにより効率化が図れる．

2. p と Lp の関係から U を絞る．

拡張世界の定義から，p を含む拡張世界では Lp が必ず真でなければならない．ゆえに p が Δ に存在し，もし $Lp\in\Delta_L$ ならば，Lp が偽となるような U について考慮する必要はない．つまりこのような場合，1つにつき，対象とする U を半数に絞ることができる．

3. Lp と $L\sim p$ の関係から U を絞る．

$Lp\in\Delta_L$ かつ $L\sim p\in\Delta_L$ である場合，拡張世界ではその両方が真となることはないため，そのようなUを対象から外すことができる．

3.6 関連手法との比較

本論文で提案したアルゴリズムは，正確にいうと，拡張世界のモデルを求めるアルゴリズムである．拡張世界のモデルは，拡張世界で成立する式の集合と考えることができるので，本アルゴリズムは，ある種の決定手続きとみなしても差し支えない．

さて，PAL の決定手続きには，セマンティックタブロー法を利用した手法が提案されている[5]．この手法では，ある式が拡張世界に含まれているか否かについて，式の証明を直接行うことが基本的な操作になっ

* 厳密には，Δ' の連言標準形における節の数を l とするとき，計算量は $O(nl)$ となる．ここでは，l を n に対して定数倍であると仮定して議論する．

ている．セマンティックタブロー法と本アルゴリズムとの主な違いは，理論的根拠が，前者は定義2の自己認識解釈にあり，後者は定義6の可能世界解釈にある点である．また，セマンティックタブロー法は，原則的に，ある1つの与えられた論理式と拡張世界とのメンバシップ関係を調べるもので，副次的に他の式と拡張世界との関係は得られるものの，本アルゴリズムのように，拡張世界の様子や数を明瞭な形で求めることはできない．

また，最近になって Moore は，われわれと同様に，定理1，2に立脚したアルゴリズム（以下，Moore のアルゴリズムと呼ぶ）を提案した[11]．原理的には，本アルゴリズムと同等であるが，処理内容，効率面で大きく異なる．以下に Moore のアルゴリズムの概略を示し，本アルゴリズムとの比較を行う．

[Moore のアルゴリズム]

（1） 前提Δに出現する命題定数に対する可能なすべての真理値割当 V から，完全 S5 構造を生成する．

（2） （1）で生成された構造から，Δ の各式が各可能世界で真である構造を選択する．

（3） 選択された構造 K と Δ の命題定数への真理値割当 V ごとに可能世界解釈 (K, V) を生成する．

（4） 生成された各 (K, V) から，Δ の各式を真とする (K, V) を選択し，その K がすべての V を含むかどうかを調べる．条件を満足するKが拡張世界を表す構造となる．

上のアルゴリズムの入力サイズ n は前提 Δ に出現する命題定数の数である．このときステップごと計算量を考えてみよう．まずステップ（1）では，n 個の命題定数に対する可能なすべての真理値割当は 2^n 通りである．これらを基に生成される完全 S5 構造 K は，真理値割当の集合のべき集合 (power set) に相当するので，2^{2^n} 通り存在する．よって計算量は $O(2^{2^n})$ である．ステップ（2）では，生成された構造ごとに前提の各式の解釈を行うので，計算量は $O(n2^{2^n})$ となる．ステップ（3），（4）の計算量のオーダは，$O(n2^{2^n})$ を越えることはなく，Moore のアルゴリズムの計算複雑度は $O(n2^{2^n})$ と考えられる．

Moore とわれわれのアルゴリズムにおける入力サイズ，計算複雑度，および生成される構造と可能世界解釈の数に関する比較を**表2**にまとめる．また，例として前提が $\Delta=\{LP\rightarrow Q, LQ\rightarrow R\}$ であるときの各項目の具体的な数字を同表の括弧内に示す．ただし，表中の記号は，3.5節で用いたものと同一であり，M, N は前提に出現する命題定数，L 式の数，また $0\leqq\alpha\leqq1$ である．上例では，命題定数は $P, Q, R (M=3)$，L 式は $LP, LQ (N=2)$ である．

同表より，本アルゴリズムで生成される構造，解釈の数がかなり少ないことがわかる．Moore のアルゴリズムは，構造を網羅的に枚挙しているのに対して，われわれのものでは，前提Δを解釈するのに必要なL式，すなわちΔに出現するL式の真理値を考慮するという方策により，対象とする構造を大幅に少なくしている．ただし，L 式の数 N が 2^M を越えるときには，効率は逆に本アルゴリズムのほうが悪くなる．

3.7 アルゴリズムの実行例

下記の例1〜3に対する拡張世界構成アルゴリズムの計算機上での実行例を**図1**(a)〜(c)に示す．同図中，計算機への入力は，下線を引いてある．明らかなように，前提を表す論理式はリスト形式で入力される．また，解釈 U, V における正・負のリテラルは，L式，命題定数の真・偽を示し，否定は "$-$" で表す．

なお，提案アルゴリズムは Common Lisp でワークステーション上にインプリメントされており，プログラムの大きさは，入出力部を含めて 9K バイトである．

[例1] 入力：$\Delta=\{\sim LP\rightarrow Q, \sim LQ\rightarrow P\}$

出力：EX 1$=\{\{P, Q\}, \{P, \sim Q\}\}$

EX 2$=\{\{P, Q\}, \{\sim P, Q\}\}$

拡張世界の数$=2$

前提は，「Pを信じていないならば Q が成り立ち」，「P を信じていないならば Q が成り立つ」という信念を表しており，結果として2つの拡張世界 EX 1, EX 2 を得る．EX 1 では，すべての世界で P が真になっているので，P, LP, $\sim L\sim P$ などが成り立ち，Q については2つの世界の真理値が異なっているため，$\sim LQ, \sim L\sim Q$ などが成り立つ．このことは，これらの式からの論理的帰結式もまた EX 1 に含まれること

表2 Moore のアルゴリズムと本アルゴリズムとの比較
Table 2 Comparison between Moore's algorithm and this algorithm.

	Moore アルゴリズム	本アルゴリズム
入力サイズ	M (3)	$M+N$ (5)
構造の数	2^{2^M} (256)	2^N (4)
可能世界解釈の数	$\alpha 2^{2^M+M}$ (1856)	2^{M+N} (32)
計算複雑度	$O(M2^{2^M})$	$O((M+N)2^{M+N})$

```
前提を入力して下さい
? (-> (~ (L p)) q)
? (-> (~ (L q)) p)
? end
Δ = { ~LP->Q, ~LQ->P }
よろしいですか? (y/n)y
ΔL = {LP, LQ}
ΔC = {P, Q}
U1 = {LP, LQ}          V1 = {P, Q}
U2 = {LP, ~LQ}         V2 = {P, ~Q}
U3 = {~LP, LQ}         V3 = {~P, Q}
U4 = {~LP, ~LQ}        V4 = {~P, ~Q}
      V1 V2 V3 V4 Label       K
U1     1  1  1  1   I   {V1, V2, V3, V4}
U2     1  1  0  0   C   {V1, V2}
U3     1  0  1  0   C   {V1, V3}
U4     1  0  0  0   I   {V1}
EX1 = { {P, Q}, {P, ~Q} }
EX2 = { {P, Q}, {~P, Q} }
No. of EX is ... 2
```

(a)

```
前提を入力して下さい
? (-> (~ (L p)) p)
? end
Δ = {~LP->P }
よろしいですか? (y/n)y
ΔL = {LP}
ΔC = {P}
U1 = {LP}              V1 = {P}
U2 = {~LP}             V2 = {~P}
      V1 V2 Label      K
U1     1  1   I    {V1, V2}
U2     1  0   I    {V1}
No. of EX is ... 0
```

(b)

```
前提を入力して下さい
? (-> p q)
? (-> q r)
? (-> (& (L p) (~ (L r))) (~ r))
? p
? end
Δ = { P->Q, Q->R, LP & ~LR->~R, P }
よろしいですか? (y/n)y
ΔL = {LP, LR}
ΔC = {P, Q, R}
U1={LP, LR}       V1={P, Q, R}       V5={~P, Q, R}
U2={LP, ~LR}      V2={P, Q, ~R}      V6={~P, Q, ~R}
U3={~LP, LR}      V3={P, ~Q, R}      V7={~P, ~Q, R}
U4={~LP, ~LR}     V4={P, ~Q, ~R}     V8={~P, ~Q, ~R}
     V1 V2 V3 V4 V5 V6 V7 V8 Label   K
U1    1  0  0  0  0  0  0  0   C    {V1}
U2    0  0  0  0  0  0  0  0   I    {}
U3    1  0  0  0  0  0  0  0   I    {V1}
U4    1  0  0  0  0  0  0  0   I    {V1}
EX1 = { {P, Q, R} }
No. of EX is ... 1
```

(c)

図 1 拡張世界構成アルゴリズムの実行例
Fig. 1 Behavior of algorithm for constructing extensions.

を意味する．同時に EX 2 では，EX 1 の P と Q を入れ換えたものが成り立つ．この例は，多重拡張世界の場合で，非単調論理に特有なものである． ■

［例 2］ 入力：$\Delta=\{\sim LP\rightarrow P\}$

出力：拡張世界の数＝0

前提は「P を信じていないならば P が成り立つ」という，矛盾したエージェントの信念を表しており，実行の結果，拡張世界は存在せず，無矛盾な推論結果は得られないことが示されている． ■

［例 3］ 入力：$\{P\rightarrow Q, Q\rightarrow R,$
$LP\wedge\sim LR\rightarrow\sim R, P\}$

出力：EX 1＝$\{\{P, Q, R\}\}$
拡張世界の数＝1

前提の 3 番目の式は「P ならば通常 $\sim R$ である」というデフォルトを表しており[4]，この例では，通常論理式から R，デフォルトから $\sim R$ という矛盾した結果が導かれうる信念を表している．この場合，単一世界からなる唯一の拡張世界が得られ，P, Q, R, LP, LQ, LR などが成り立つことを表している． ■

拡張世界は，論理式の集合である理論で定義されるが，提案アルゴリズムの出力形式，すなわち完全 S5 構造による表現を用いると，拡張世界で成り立つ式が，容易に把握できることが利点としてあげられる．このことは，無限集合となりうる理論を有限の形式で表現していることに起因する．

4. おわりに

本論文では，AL の非構成性について検討し，自己認識推論により得られる結論である拡張世界が順次構成できない理由を述べた．これを解消するために可能世界意味論により AL を考察し，拡張世界と可能世界解釈との関係を規定する定理を新たに導いた．この定理に基づき PAL の拡張世界構成アルゴリズムを考案し，本アルゴリズムが健全かつ完全な手続きであること，およびその計算複雑度が $O(n2^n)$ であることを明らかにした．

本アルゴリズムは，可能世界を通して式 p と式 Lp との真理値の対応関係が与えられるという理論的根拠に依るもので，拡張世界が直接的に構成でき，しかも拡張世界で成立する式が，直観的に把握できることが利点としてあげられる．なお，本アルゴリズムを一般の一階述語計算での AL に適用すると，無限のモデルを持ちうるので停止性は保証されない．

今後の課題として，アルゴリズムの効率改善，可能

世界上での形式的証明手法の開発，自己認識推論の論理的枠組を知識ベース管理，知識獲得に応用すること，などが残されている．現在，本論文で提案したアルゴリズムを応用した非単調知識処理システム[12),13)]を検討中であり，別の機会に報告したいと考える．

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費による．

参考文献

1) 特集：高次人工知能へ向けてのパラダイム，人工知能学会誌，Vol. 2, No. 1 (1987).
2) Moore, R. C.: Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic, *Artif. Intell.*, Vol. 25, No. 1, pp. 75-94 (1985).
3) Moore, R. C.: Possible-World Semantics for Autoepistemic Logic, *AAAI Non-Monotonic Reasoning Workshop*, pp. 344-354 (1984).
4) Konolige, K.: On the Relation between Default Theories and Autoepistemic Logic, *Artif. Intell.*, Vol. 35, No. 3, pp. 343-382 (1988).
5) 馬場口，村上，相原：命題自己認識論理における決定手続き，人工知能学会誌，Vol. 2, No. 3, pp. 359-366 (1987).
6) McDermott, D. and Doyle, J.: Non-Monotonic Logic I, *Artif. Intell.*, Vol. 13, No. 1/2, pp. 41-72 (1980).
7) 森馬，馬場口，手塚：自己認識論理における拡張世界の一構成法，第37回情報処理学会全国大会論文集，7 J-5 (1988).
8) Hughes, G. E. and Cresswell, M. J.: *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London (1968), 三浦，大浜，春藤訳：様相論理入門，恒星社厚生閣 (1981).
9) 馬場口，手塚：一階述語計算における自己認識推論について，第36回情報処理学会全国大会論文集，4 N-6 (1988).
10) 大附：アルゴリズムの複雑度の理論，電子通信学会誌，Vol. 62, No. 7, pp. 789-798 (1979).
11) Moore, R. C.: Autoepistemic Logic, in *Non-Standard Logics for Automated Reasoning*, Smets, P. et al. eds., Academic Press (1988).
12) 森馬，馬場口，手塚：信念に基づく非単調知識処理システム BMS, 第39回情報処理学会全国大会論文集，5 C-4 (1989).
13) 森馬，馬場口，手塚：非単調知識処理システム BMS とその応用，情報処理学会知識工学と人工知能研究会，68-1 (1990).

付録1 定理3の証明

定義5から，$\mathcal{T}$ が Δ の拡張世界であることと，$\mathcal{T}$ が $\Delta\subseteq\mathcal{T}$ を満たし，かつ Δ に依存する安定な理論であることとは同値である．まず，定理1より，$\mathcal{T}$ が安定な自己認識理論であれば，$\Delta\subseteq\mathcal{T}$ と充足条件が同値であることは明らかである．また，$\mathcal{T}$ が Δ に依存するとき，またそのときに限り，Δ を充足する $\mathcal{T}$ の任意の自己認識解釈が $\mathcal{T}$ を充足する．自己認識解釈と可能世界解釈の同義性，および定理2から上の条件は包含条件と同値である． ■

付録2 定理4の証明

最初に，(1)→(2)を示す．K_i がこの手続きによって“C”とラベル付けされたとする．K_i によって表される安定な理論 $\mathcal{T}$ が Δ の拡張世界であるためには，K_i が，定理3の包含・充足条件を満たせばよい．いま，“C”とラベル付けされた場合，K_i はアルゴリズムのステップ(3c)の条件を満たしているので，U_i は，P が K_i のそれぞれの世界で真となるとき，LP が真，そうでないとき偽となるような真理値の割当である．したがって，任意の命題定数への真理値の割当 V について，U_i と V の組合せによる真理値の割当（以下，$\langle U_i, V\rangle$ と記す）は $\mathcal{T}$ の可能世界解釈と見なすことができる．ゆえに，ステップ(3a)で“1”となるすべての $\langle U_i, V\rangle$ は Δ の各式を真とする $\mathcal{T}$ の可能世界解釈であり，またそれら以外には存在しない．ところで，ステップ(3b)では，$\langle U_i, V\rangle$ を“1”とするすべての V の集合として K_i を定義したので，Δ の各式が真となる $\mathcal{T}$ のどの可能世界解釈 (K_i, V) についても，V に一致する可能世界が含まれることは明らかである．したがって定理3の包含条件が成り立つ．

また，w における Δ_L に含まれる L 式の真理値は U_i と一致している．w における命題定数への真理値の割当を V とすると K の定義より $\langle U_i, V\rangle$ で Δ の各式は真となる．したがって，K_i のすべての世界で Δ の各式は真となり，定理3の充足条件が満たされる．

次に，(2)→(1)を証明する．$\mathcal{T}$ が Δ の任意の拡張世界とし，$\mathcal{T}$ を表す完全 S5 構造を K とする．K は，定理3の包含・充足条件を満足する．このとき K が，この手続きによって作られ，“C”とラベル付けされる K_i のいずれかに等しいことを証明すればよい．

K によって定められる，Δ_L に含まれる各式への真理値の割当は，$U_1, \cdots, U_{imax}$ のいずれか1つ（U_i と表す）に一致しなければならない．よって，任意の V について $\langle U_i, V\rangle$ は $\mathcal{T}$ の可能世界解釈である．そこで，U_i から作られる K_i が K に等しいことを証明する．

いま $K_i\neq K$ と仮定し，矛盾することを示す．もし

$K_i \neq K$ ならば，$w \in K_i$, $w \notin K$ あるいは $w \notin K_i$, $w \in K$ なる可能世界 w が存在しなければならない．

（ⅰ） $w \in K_i$, $w \notin K$ なる可能世界 w が存在すると仮定する．このとき，w が K_i に含まれることから，アルゴリズムのステップ(3a)(3b)によりwに一致する命題定数への真理値の割当Vについて $\langle U_i, V \rangle$ が Δ を充足する．ところが $\langle U_i, V \rangle$ は $\mathcal{I}$ の可能世界解釈となり，定理3の包含条件が成り立ち，$w \in K$. これは仮定に矛盾する．

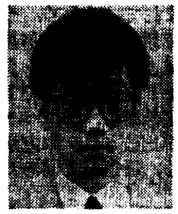
（ⅱ） $w \notin K_i$, $w \in K$ なる可能世界 w が存在すると仮定する．このとき，w が K に含まれることから，定理3の充足条件により w で Δ の各式が真となる．ゆえに，w での命題定数への真理値の割当 V について $\langle U_i, V \rangle$ は Δ を充足しなければならない．ところでアルゴリズムのステップ(3a)(3b)により $\langle U_i, V \rangle$ がΔの各式を真とするときVに一致する可能世界（すなわち w）が K_i に含まれねばならず，仮定 $w \notin K_i$ に矛盾する．

次に，K_i が“C”とラベル付けされることを示す．Δ_L に含まれる各式に対して，K によって定められる真理値の割当は，U_i に一致し，$K=K_i$ から K_i はアルゴリズムのステップ(3c)に示される条件を満たす．よって，K_i は“C”とラベル付けされる． ■

(平成元年10月12日受付)
(平成2年3月6日採録)

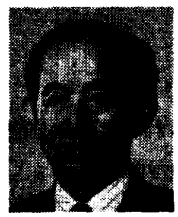
馬場口 登（正会員）

昭和32年生．昭和54年大阪大学工学部通信工学科卒業．昭和56年同大学院前期課程修了．愛媛大学工学部助手を経て，現在大阪大学工学部助手．工学博士．人工知能，パターン認識，画像処理の研究に従事．IEEE，電子情報通信学会，人工知能学会各会員．



森馬 純一（正会員）

昭和40年生．昭和63年大阪大学工学部通信工学科卒業．平成2年同大学院前期課程修了．現在宇宙開発事業団勤務．在学中，非単調推論に関する研究に従事．



手塚 慶一（正会員）

昭和3年生．昭和26年大阪大学工学部通信工学科卒業．同大学院特別研究生，愛媛大学，山口大学，大阪大学助教授を経て，現在大阪大学工学部教授．データ通信，通信ネットワーク，オートマトン，パターン処理，データベース，知識処理などの研究に従事．工学博士．著書「電子計算機基礎論」，「電子計算機システム論」，「ディジタル画像処理工学」など．IEEE，電子情報通信学会，電気学会，人工知能学会各会員．