F-021

基数制約を用いた Max-SAT ソルバーの試作
An Implementation of Max-SAT Solver with Cardinality Constraints

張 彤† 越村 三幸‡ 藤田 博‡ 長谷川 隆三‡
Tong Zhang Miyuki Koshimura Hiroshi Fujita Ryuzo Hasegawa

1．まえがき

命題論理の充足可能性判定問題（SAT）は，与えられた命題論理式の充足可能性を判定する問題である．SAT は人工知能および計算機工学における最も基本的な問題として，論理合成，検証，プランニング問題，スケジューリング問題，制約充足問題，制約最適化問題など，様々な分野に応用されている．近年，大規模な SAT 問題を解く SAT ソルバーが次々に登場し，これらの分野への実用的応用が急速に拡大している．

SATの問題例が充足不能の場合，どの程度充足不能なのかにこたえるのがMax-SATである[3,5]．近似解法と厳密解法があるが，本論文では，厳密解法のソルバーを報告する．厳密解法のソルバーは大きく，分枝限定法を用いるものと任意のSATソルバーを用いるものに分けられる．後者の特徴は，系統的SATソルバーを繰り返し適用してMax-SATの最適解を求めることであり，本論文のソルバーもこれに属する．

以下，第2節ではMax-SAT，第3節では基数制約に基づくMax-SATソルバーの概要を述べる．第4節では実験結果を報告し，第5節ではまとめと今後の課題を示す．

2．Max-SAT

SAT の問題は，通常，連言標準形（Conjunctive Nomal Form:CNF）で表される．CNF では，節の連言の形式で論理式を表す．節はリテラルの選言で，リテラルは命題変数かその否定である．任意の論理式は，充足可能性が一致する CNF に変換できる．SAT では，よく CNF を節の集合ととらえるが，本論文でもそれに倣う．

SAT の目的は，与えられた CNF を真とするような命題変数への値の割当を探すことである．つまり，与えられた節集合中の節を全て真とするような，変数値割当（モデル）を探すことである．そのようなモデルがある場合，その節集合は充足可能と言われ，ない場合，充足不能と言われる．

充足不能の場合，どの程度充足不能なのかに答えるのが Max-SAT である．Max-SAT の目的は，与えられた節集合中の節をできるだけ多く真とするようなモデルを探すことである．本論文では，Partial Max-SAT の問題を扱うが，Partial Max-SAT では，節集合の節を，ハード節とソフト節に分類し，ハード節を全て真とし，ソフト節をできるだけ多く真とするようなモデルを探すことが目的となる．

† 九州大学大学院システム情報科学府，
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
‡ 九州大学大学院システム情報科学研究院，
Faculty of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

3．基数制約を用いた Max-SAT ソルバー

Partial Max-SAT の節集合を $C=\{H_1,\ldots,H_m,S_1,\ldots,S_n\}$（$H_i(i=1,\ldots,m)$はハード節，$S_i(i=1,\ldots,n)$はソフト節）として，各ソフト節 S_i に新しい命題変数 b_i を用意し，$C'=\{H_1,\ldots,H_m,S_1\vee b_1,\ldots,S_n\vee b_n\}$ なる節集合を作る．この命題変数 b_i は阻止変数（blocking variable）と呼ばれる．全ての阻止変数を真とすれば，全てのソフト節は真となる．よって，もとの節集合 C に対する Partial Max-SAT は，「C'を真にしつつ真となる阻止変数の数を最小にせよ」という最適化問題と等価である．形式的には，

$$\min\left\{\ k \ \middle|\ C',\sum_{i=1}^{n} b_i \le k, k\in\{0,1,\ldots,n\}\ \right\}$$

を解くことになる．この二つ目の制約 $\sum_{i=1}^{n} b_i \le k$ は基数制約（cardinality constraint）と呼ばれ，これを CNF として符号化する方法がいくつか提案されている[1,4]．よって，$CNF(\bullet)$ を CNF を返す任意の符号化とし，

$$\min\left\{\ k \ \middle|\ C'\cup CNF\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \le k\right), k\in\{0,1,\ldots,n\}\ \right\}$$

を解けばよい．この一つ目の制約 $C'\cup CNF\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \le k\right)$は，$k$の値を固定すれば通常の SAT となる．

今回の試作では，Bailleux らによる符号化[1]を利用した．今，n個の命題変数 $b_i(i=1,\ldots,n)$ の内，真となっている変数の数を数えたいとものとする．この時この符号化では，n 個の新たな命題変数 $o_i(i=1,\ldots,n)$ を導入し，$b_i(i=1,\ldots,n)$ を入力とし，$o_i(i=1,\ldots,n)$ を出力とする次のような性質を持つ回路に相当する CNF を作成する．

- k 個の b_i が真となると（k 個の）$o_1,\ldots,o_k$ が真となる．
- k 個の b_i が偽となると（k 個の）$o_{n-k+1},\ldots,o_n$ が偽となる．

これらの性質から，$\sum_{i=1}^{n} b_i \le k$ なる制約は，$n-k$ 個の命題変数 $o_{k+1},\ldots,o_n$ の値を偽に確定することにより得られる．この符号化では，$O(n\log n)$個の（中間）命題変数と $O(n^2)$ 個の節が必要となる．

試作した Partial Max-SAT ソルバーの処理の流れのあらましは，次の（1）～（5）の通り．

（1）C'を SAT ソルバーで解く．C'が充足不能なら，C も充足不能なので，「充足不能」と出力して終了．

（2）C'が充足可能なら，そのモデルを走査し，真となっている b_i の個数を数え，その数を k とする．

（3）n個の命題変数 $o_i(i=1,\ldots,n)$ を仮想的に用意し，上記符号化を行う．この時に，用意した命題変数の内，$n-k+1$個の命題変数 $o_k,\ldots,o_n$ の値を偽と見なして符号化を行う．（これによって必要な節の数は $O(kn)$ に削減される．）これによって，$\sum_{i=1}^{n} b_i < k$ なる制約が課されたこと

になる．この符号化によって得られた CNF を $CNF\left(\sum_{i=1}^{n} b_i < k\right)$ とする．

（4）暫定解 z を k とする．

（5）$C' \cup CNF\left(\sum_{i=1}^{n} b_i < k\right)$ を SAT ソルバーで解く．充足不能なら暫定解 z を出力して終了．

（6）充足可能なら，そのモデルを走査し，真となっている b_i の個数を数える．その数を k' とする．（基数制約を課しているので，$k' < z$ が成り立つ．）$z-k'$ 個の命題変数 $o_{k'},\ldots,o_{z-1}$ の値を偽に確定する．暫定解 z を k' として，（5）へ．

4．実験と評価

前節で述べた手続きを SAT ソルバーMiniSat[2]を用いて実装した．MiniSat は，SAT ソルバー競技会で何度も入賞したことのある優秀なソルバーである[6]．バージョンは 2.0 を利用した．性能評価には，2009 年の MaxSAT 競技会 Fourth Max-SAT Evaluation[7]の Partial MaxSAT 部門に出題された 1500 題を用いた．

1500 題は，industrial，random，crafted の三つのカテゴリに分類さる．Industrial は多様な応用問題を集めたもの，random はランダムに作ったもの，crafted は，ソルバーが解くのに手間取ったその他の問題全てを扱う．

実験環境には，デスクトップ PC（Core i5-750 (Quadcore 2.66GHz)，4GB メモリ，Linux 2.6.31-20-generic-pae）を用い，制限時間は 30 分とした．

表 1 に各部門毎に解けた問題数を示す．「QMiniMax」が今回試作したソルバーである．「Max2009 最良」は，2009 年の競技会に参加したソルバーの内，それぞれの部門で最良の結果を示したソルバーの成績で，具体的には，industrial では pm2，random では IUT_BCMB_WMaxsa，crafted では WMaxSatz-2.5 である．「Max2009 仮想最良」は仮想的なソルバーである．2009 年の競技会に参加したソルバーの成績表から，問題毎に最良の結果を示したソルバーの成績を収集し，それを仮想的なソルバーの成績とした．

表 1　解けた問題数

部門	出題数	QMini Max	Max2009 最良	Max2009 仮想最良
Industrial	965	847	793	857
Random	150	31	150	150
Crafted	385	294	262	283

表 2　解けた問題数（補正）

部門	出題数	QMini Max	Max2009 最良	Max2009 仮想最良
Industrial	965	817	793	857
Random	150	31	150	150
Crafted	385	282	262	283

競技会で利用された計算機環境は，今回の実験のものより，かなり劣っているので，その補正を行い，表 2 に示した．表 1 と比べると QMiniMax で解けた問題数が減っている．

表から，industrial と crafted で QMiniMax はかなり優秀な成績を示していることが分かる．いずれも Max2009 最良よりもよい成績を示した．特に crafted では，仮想最良と比肩しうる成績を示している．一方で，random に対しては，良い成績をおさめていない．これは，MiniSat 自体が random に弱い，ことに起因すると思われるが，今後，詳しく解析したい．

5．おわりに

基数制約を用いて，厳密解法を行う Partial Max-SAT ソルバーを試作した．この実装には，既存の SAT ソルバーを変更する必要がない，という利点がある．これによって，年々進歩している SAT ソルバーの恩恵を直接享受することがきる．1500 題の例題での実験では，良好な性能を示した．

今後は，節に重みをつける重み付き（weighted）Max-SAT にも対応できるように機能の拡張を目指す．また，基数制約の他の符合化での実験も行っていきたい．

謝辞

本研究は科研費（20240003）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] O. Bailleux and Y. Boufkhad. Efficient CNF Encoding of Boolean Cardinality Constraints. In *Proc. of 9th Intl. Conf. CP2003*, pp.108-122, Springer LNCS 2833, 2003.

[2] N. Een and N. Sörensson. Minisat: A SAT Solver with Conflict-Clause Minimization. In *Proc of 8th Intl. Conf. SAT 2005*, pp.502-518, Springer LNCS 2919, 2005.

[3] C. M. Li and F. Manyà. MaxSAT, Hard and Soft Constraints. Chapter 19 in Handbook of Satisfiability, IOS Press, 2009.

[4] C. Sinz. Towards an Optimal CNF Encoding of Boolean Cardinality Constraints, In *Proc. of 11th Intl. Conf. CP 2005*, pp.827-831, Springer LNCS 3709, 2005.

[5] 平山勝敏，横尾真：*-SAT:SAT の拡張，人工知能学会誌，25 巻 1 号，pp.105-113，2010 年．

[6] The international SAT Competitions web page http://www.satcompetition.org/

[7] MaxSAT Evaluations. http:// www.maxsat.udl.cat/