情報工学系学科の教育における手回し計算器の活用[†]

中森眞理雄[††]　萩原洋一[††]　高田正之[††]

筆者らの学科（情報工学系学科）では2年次学生に対して，プログラミング演習（高水準言語，機械語とも）と並行して，手回し計算器による計算演習を実施している．一見時代遅れで非能率な演習であるが10年間継続しており，計算の手間の概念や誤差の概念を体得させる上で効果をあげてきた．すなわち，①四則演算のしくみ等を理解させること，②数値計算の誤差に対する勘と経験を養うこと，③計算の手間に対する感覚を養うこと，④計算機ハードウェアに関する感覚を養うこと，などの目的をもった演習である．学生に課したテーマは，（1）手回し計算器の動作原理を探らせたり四則演算のアルゴリズムを調べさせたりする，（2）平方根$\sqrt{a}$を開平法，ニュートン法，連分数法により求めさせる，（3）nが増加するときの$(1+1/n)^n$の値の変化を調べさせる，などである．教育効果を論ずるにあたっては，機械語プログラミング演習の単位取得者数などから推測したり，他の教職員からの支持の状況から判断するという方法をとった．全体として，手回し計算器を用いることが上記①～④の目的を達成する上で大きな効果があることが結論づけられた．本論文では，他大学などで手回し計算器が使用できない場合の代替テーマ例も提案する．

1. はじめに

大学で情報工学・情報科学を専攻する学生にとって，初期の段階で計算の原理と計算機の基本的機能を体得しておくことは不可欠である．重要なことは，

（A） 計算の原理と計算機の仕組みを基礎的なレベルで（すなわちオペレーティングシステムや高水準言語の存在を前提としないで）理解すること，

（B） できるだけ広範囲のプログラムをできるだけ多く作成すること

であろう．このふたつの要請はある意味で相反するものである．教育環境として，(A)のためにはできるだけ原始的な裸の計算機に手を触れることができる環境が必要であるのに対し，(B)のためには生産性の高い最新のプログラミング環境が望ましいからである．特に，(A)の目的のために過去の実在した計算機を教材に取り上げる場合は，(A)と(B)の矛盾は深刻である．文献2）では，(A)の目的のために過去の劣悪なプログラミング環境まで真似するのは正しくないとし，能率よく機械語プログラミングの演習を行うための環境を開発した経験が報告されている．

筆者らの学科（情報工学系学科）では，(B)のためにTSSの下で高水準言語によるプログラミング演習を課している．また，(A)のためには

（A1） EDSAC（世界初のプログラム内蔵計算機）の機械語によるプログラミング演習[1)~3)]，

（A2） 手回し計算器による数値計算演習[4),5)]，

を実施している．古典的な演習であるが，（A1）は計算機の仕組みの，（A2）は計算の原理の理解にきわめて有益である．将来において計算機システムの開発に携わる学生が手を動かすことにより先人の苦労を追体験することの意義は大きい[4),6)]．

（A1）については，担当者による報告[1)~3)]があるので，本稿ではこれ以上触れない．なお，論文7）や8）は，（A1）と同じ方向を目指す研究と考えられる（ただし，取り扱われている計算機は現在の大型計算機である）．

筆者らは，2年次学生に対する手回し計算器の演習を10年間担当し，計算の手間の概念や誤差の概念を体得させる上で効果をあげてきた．一見時代遅れで非能率的な教育であるが，“手ごたえ”のある手回し計算器は計算の手間の概念や誤差の概念を体得させる上で他のものには替えがたい．本論文では，この演習の目的と内容を述べ，その成果を報告する．

本論文に述べること（特に手回し計算器を用いる演習課題）は電子計算機が普及する以前には誰でも知っていたことであり，今日，あえて論文として報告する意図は次のとおりである．

（α） 手回し計算器の時代には自覚されなかった概念を電子計算機時代の観点から顕在化させること；

（β） 手回し計算器の時代から自覚されていた概念の普遍性に対する注意を喚起すること．

以下では，2章で手回し計算器による演習を課することの目的を述べ，3章で手回し計算器による演習の

† Hand Driven Calculator in Laboratory Exercises for BA Degree in Computer Science by MARIO NAKAMORI, YOICHI HAGIWARA and MASAYUKI TAKATA (Department of Computer Science, Faculty of Technology, Tokyo University of Agriculture and Technology).

†† 東京農工大学工学部電子情報工学科

例を示し，4章で手回し計算器による演習の効果を述べる．本論文の述べ方は，本文で手回し計算器を用いることの目的や演習の方針などの“方法論”と問題点を中心に述べ，学生のレポートの例は付録に集めるという方法をとった．付録に掲載したレポートは平均的なものではなく“特に面白い”ものである．そのようなレポートを集めた理由は，最高の達成度（“このように教育すればここまで理解させることができる”）を示すことに本報告の目的があるからである．ただし，付録に掲載したレポートは毎年1，2通程度見られるものであり，教育の効果を誇示するために特異なものを恣意的に選んだわけではない．

2. 手回し計算器を用いた演習の目的

科学技術の進歩により，今日の学生は多くのことを学ばなければならない．にもかかわらず，手回し計算器による時代錯誤的で非能率な演習を課する目的は，次のとおりである．

①四則演算のしくみ等を理解させること．当学科の“二進タイガー”[9]も同様の目的から作られたものである．

機械的な手回し計算器は，仕掛が電子計算機とまったく異なるが，学生は二進の電子計算機における四則演算のしくみ等を十進の手回し計算器から類推して理解するものである．また，負数の補数表示の意味も手回し計算器ではじめて直感的に理解するものである．手回し計算器を用いて二進の電子計算機のしくみを考えさせることはかつては想像もできなかったはずであり，この意味で，本目標は前記(α)の目的に沿うものである．

②数値計算の誤差に対する勘と経験を養うこと．数学の公式どおりにプログラムを作ったところ，発散するはずの数列が収束したり，統計計算における分散が負になったりして，当惑する学生は多い．手回し計算器ならアキュムレータを見ながら計算の過程を追跡し数値の意味を吟味することができるので，誤差の生ずる事情を直感的に理解することができる．

誤差は電子計算機のプログラミングにも手回し計算器にも共通する概念であるが，ゆっくりと中間結果を観察しながら計算を進めることに，手回し計算器の意義がある．すなわち，本目標は前記(β)の目的に沿うものである．

③計算の手間に対する感覚を養うこと．数学の公式は，収束の速さや計算の手間の面で実用的アルゴリズムを与えてくれるとは限らない．能率の悪いアルゴリズムを手回し計算器を用いて実行させ，“ひどい目に遭った”と実感させておくことは，将来学生がプログラムの計算量を見積ったり能率のよいプログラムを書いたりするときの目安を与えることになる．

計算の手間は手回し計算器と電子計算機とでは様相がまったく異なるが，“アルゴリズムによって計算の手間が異なる”ということを実感させるという意味において手回し計算器の効果は大きい．手間の概念は手回し計算器の時代にもあったものであり，この意味で，本目標は前記(β)の目的に沿うものである．

④計算機ハードウェアに関する感覚を養うこと．初心者がソフトウェアの世界に閉じこもって高水準言語しか学ばないならば，ハードウェアに関する感覚は体得できない（アセンブリ言語を学んでも，この問題は解決しない）．

手回し計算器のカバーをはずして内部を見ながら計算すれば，歯車の回転やカムの動きを目で追うことができるので，どれだけの高速回転に機械が正確に追従できるかを知ることができ，また，ハードウェアもエラーを犯すということを知ることができる．手回し計算器と電子計算機では仕掛がまったく異なるが，上記のような“ハードウェアのセンス”を養う上で手回し計算器は意義がある．すなわち，本目標は前記(α)の目的に沿うものである．

論文 8）では，アセンブリ言語や高水準言語で書かれたプログラムが実行されると計算機の中で何が起こるかが目に見える演示システムを開発したことが報告されている．本稿とは異なる接近方法で①～④の目標を達成しようとするものと解釈することもできる．ただし，計算の進行を学生が手で制御するわけではないので，限界があろう．

3. 手回し計算器を用いた課題

以下に，実際に学生実験に課した課題のあらましと問題点を述べる．なお，手回し計算器に割り当てられた時間は1日あたり4.5時間を2日間で，2年次学生(40～46名，留年者を含めると過去の最多人数は58名）を対象に実施した．

3.1 手回し計算器の原理の解明

手回し計算器の動作原理を探らせる課題で，各部分の機能を調べさせて説明させる．必要ならカバーをあけて内部を観察することを許している．前記のとおり，歯車の回転やカムの動きを目で追うことにより，

どれだけの高速回転に機械が正確に追従できるか，ハードウェアのエラーはどのような原因で発生するかを探らせる．また，くりあがりに際して各桁の間に時間差が生ずるようになっていることがどのような効果をもたらしているかを考えさせる．

その上で，手回し計算器による四則演算のアルゴリズムを調べさせる（これには，学生に手回し計算器に習熟させ，以下のテーマの能率を上げるねらいもある）．さらに，覚えたばかりの EDSAC の機能や命令と比較させる．

3.2 平方根の計算

与えられた数値 a の平方根 $\sqrt{a}$ を開平法，ニュートン法，連分数法により求めさせるものである．それぞれの方法による計算に要した時間や操作回数（ハンドルの回転数など）も測定させる．

計算は次の方法による（もちろん，いずれもよく知られた方法である）．

開平法：平方根を上位の桁から，2乗した数が a を越えないように，順を定める．すなわち，a を右ダイヤルに置きクラッチを減算側にセットした上で，a を2桁ごとに区切り，a の最上位2桁から始めて各2桁ごとに，“1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 をこの順に，符号反転が生じない限り，1回ずつ引く”という操作を繰り返す（左ダイヤルに $\sqrt{a}$ が現れる）．

連分数法：次の式にしたがって計算する：

$x_n=1+(a-1)/(x_{n-1}+1)$,

$x_0=1$

ニュートン法：次の式にしたがって計算する：

$x_n=(x_{n-1}+a/x_{n-1})/2$,

$x_0=1$

（ニュートン法では x_0 をより適切に定めることにより収束を高速化することができるが，ここでは収束の状況を観察させるために $x_0=1$ とした．）

また，“今日の大型計算機では平方根をどのように計算しているか調べよ．その計算方法を採用する理由は何か”という問題も課してみた．

3.3 e の値の計算

n が増加するときの $(1+1/n)^n$ の値の変化を調べさせる課題である．数学的には e に収束する．

実際に手回し計算器で計算すると**図1**のような結果となる（図1は筆者が計算したものをまとめたものであり，学生のレポートから引用したものではない）．**図1**において直線上の点は $n\to\infty$ のとき打ち切り誤差が小さくなることを示しているが，n が大きくなるに

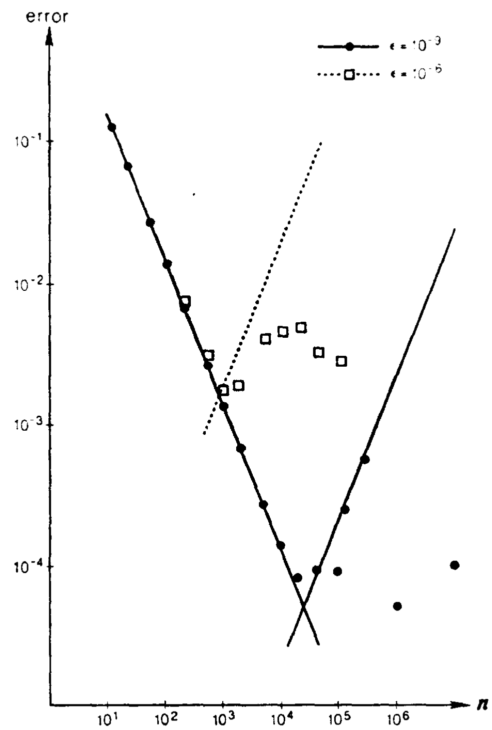


図1 $(1+1/n)^n$ と e との誤差
Fig. 1 Error of $(1+1/n)^n$ as compared with e.

伴い丸め誤差が打ち切り誤差より大きくなり直線から離れていくことも示している．丸め誤差が打ち切り誤差より大きくなるときの n の値が有効桁数（図1には有効桁数が小数点以下9桁と6桁の場合，すなわち扱う最小の数 ε が 10^{-9} と 10^{-6} の場合を示した）に依存することは言うまでもない．なお，図1には打ち切り誤差と丸め誤差の理論値（4.4 節および付録4）も示してある．

4. 手回し計算器による演習の問題点と効果

前記の課題を学生に課した結果，特徴的であったことと問題点を次に述べる．

4.1 機能の説明

各部分の機能を説明させる課題は，一般にものごとを説明する訓練を兼ねて課したものであるが，学生は必ずしも本質を書いているとはいえなかった．たとえば，右ダイヤルの機能を“乗算の場合は積が現れ，除算の場合は被除数を置くところ”などと説明したレポートが多かったが，それは本質をついた記述とはいえない．右ダイヤルは“ハンドルの回転により置数部の数値が加算または減算されるところ”であり，積や被除数の置き場として使うのはアルゴリズムの問題，

そのような使い方を想定して手回し計算器を設計するのはアーキテクチャの問題である．これはプログラム内蔵方式の計算機におけるコードの説明にも通ずることである（参照のされ方によって命令にも数値にも文字にもなるのがコードの本質である[12]）．よく書けたレポートの例を付録1に示す．

また，四則演算の原理を考えさせるテーマでは，負数の補数表示の概念を実感として捉えさせることができた．すなわち，ほとんどの学生が（手回し計算器に触れるまでは）補数表示は二進法固有のものと思い込んでいたが，本テーマのほとんどのレポートに“十の補数”という語句が見られることから察すると，手回し計算器がそのような偏見を除去する上で大きな効果を発揮したといえよう．

EDSAC の機能や命令と比較させるテーマでは，それをきっかけに，EDSAC の命令を真剣に調べた形跡がうかがわれるレポートが多かった．特に面白いレポートの例を付録2に示す．

4.2 計算の手間の概念

平方根の計算では，計算式によって，所要時間が異なることをほとんどの学生に認識させることができた．また，$(1+1/n)^n$ の値を計算させる課題では，べき乗の計算には 2乗，4乗，8乗，16乗，…と計算することが速いことを認識させることができた（例外的に，1,000 乗の計算には乗算を 999 回行わなければならないと思い込んでいる学生もいたが，これは 1979 年4月に入学した学生だけであった）．アルゴリズムの手間の概念を教えるには“手ごたえ”のある手回し計算器に勝るものはないというのが筆者らの感想である（このことについては 4.8節でも触れる）．

以上から，アルゴリズムと手間の概念は漠然と捉えられたと考えられるが，もちろん，プログラムの概念に到達するものではなく，それが手回し計算器による教育の限界である．

4.3 平方根の計算時間

平方根の計算に要した時間を**表1**に示す（計算時間を報告した学生はあまり多くないので平均値や標準偏差などの統計量を求めても無意味であり，表1には例だけを示した）．この数値については，かつて手回し計算器を研究に活用した人々から“時間がかかりすぎる”と疑問が呈せられている（実際，筆者らなら，この 1/5〜1/10 程度の時間でできる）が，はじめて手回し計算器に手を触れた今日の学生にはこの程度の時間が普通である．

表1 手回し計算器による平方根の計算時間
Table 1 Computational time for square root by hand driven calculator.

	学生 1	学生 2	学生 3
開平法	3	5	10
Newton 法	24	20	30
連分数法	48	50	90

（単位：分）

ニュートン法の精度は，2倍ずつ増えるので，要領の良い学生は，x_1 は2桁，x_2 は4桁，x_3 は8桁，…というように計算することがある．

これに対して，“今日の電子計算機と比較するのが目的である以上，臨機応変の処置は排除し，電子計算機の命令と同じようにひとつの加減乗除ですべての桁を計算すべきである”という批判もあるが，筆者らは，そのような石頭的，表面的なシミュレーションが教育的であるとは考えない．むしろ，そのときの環境に応じて最適なアルゴリズムを考え出す能力の方が重要であると考える．

4.4 $(1+1/n)^n$ の計算課題

n をいろいろ変化させて $(1+1/n)^n$ の値を計算する課題では，縦軸に $(1+1/n)^n$ の値そのものをとったグラフを描く学生が多く，初めから図1のように誤差そのものを描く学生は毎年1名程度であった．また，対数方眼紙の使い方を知らない学生も多く，本テーマの本来の目的以外のことを教えるのに費やされる時間が多かった．

試みに，$(1+1/n)^n$ の値と e との誤差を理論的に評価してみた結果を付録3に示す（なお，付録3のようなことがらをはじめからレポートに書く学生は皆無であり，筆者らが教えることによってはじめて理解するのが実状である）．

打ち切り誤差（相対誤差）は $e/2n$，丸め誤差は $2n\varepsilon$ であり，打ち切り誤差と丸め誤差が等しくなるのは $n=(1/2)\sqrt{e/\varepsilon}$ のときであり，n がこの値より小さいときは主要な誤差は打ち切り誤差，n がこの値より大きいときは主要な誤差は丸め誤差である．この解析は図1とよく一致している．

4.5 学生の感想

学生がレポートに書いた感想の例を付録4に示す．ほとんど例外なく“くたびれた”という記述が含まれている．しかし，“なぜ，このような時代遅れのことをやらせるのか”という不満の声はない（本来，感想を求めたわけではなく，任意に述べた感想だけを集め

た付録4から統計解析を行って意味のある結論が出せるはずはないが，そのような不満の声が皆無であるという事実は重要である）．むしろ，“面白かった”，“電子計算機が出現する前から今日の電子計算機と同じ計算の原理が使われていたとは驚きである”という感想が圧倒的であった．特に，“今日の電子計算機と同じ原理”という感想は手回し計算器を利用した教育が積極的な効果をもたらしたものと解釈できる．

この点，EDSAC の演習とは異なる反応であった．EDSAC の場合は，汎用言語と早合点する学生がいたので，“もっと使いやすい言語を使わせろ”という見当違いの声が出たのであろう[1),3)]．手回し計算器の場合は，それを今日の計算機技術と思う学生がいるはずもなく，“温故知新”の趣旨が一応理解されたためと思われる．

4.6 手回し計算器による演習の効果

本来ならば，新しい教育方法の試みは，それを実施しない場合と比較することによって評価すべきであるが，手回し計算器は筆者らの学科の設立以来の演習課題であり，また学科の基本方針でもあるので，手回し計算器の演習を行わない学生と比較することはできない．そこで，客観的な比較としては無理があるが，他の学科の学生と比較してみる．

筆者らの大学では，筆者らの学科（A学科と呼ぶ）のほかに同じ学部の2学科（B学科，C学科と呼ぶ）で EDSAC の機械語によるプログラミング（1章で（A1）として述べた）を2年生に教えている．このうち，手回し計算器による演習も実施しているのはA学科だけである．EDSAC の講義は週1回1時限（95分）あり，A, B, C 学科の学生が受講している．また，この講義に対応する演習が A, B, C 学科で個別に実施されている．1985年度までは EDSAC の講義を A, B, C 学科の学生が合同で受講しており，また1985年度以降は B, C 学科の EDSAC 演習環境が改善されたので，条件がもっとも似ていて比較しやすい1985年度について3学科の単位取得者の人数を比較した結果を**表2**に示す（学生数は3学科ともほとんど同じである）．手回し計算器を経験した学生の機械語プログラミングの能力が高いことがわかる．ただし，B, C 学科はいわゆる情報学科ではなく，EDSAC 演習の環境も異なるなど，他の要因も多いので，機械語の理解と手回し計算器との因果関係についての上記の考察は参考の域を出ない（肯定も否定もできない）．

一方，A学科の教職員は手回し計算器に対してきわめて好意的であり，毎年実験・演習テーマの見直しをする際に“継続すべきテーマ”の筆頭にあげられるのが手回し計算器である．このことは，手回し計算器が学生の計算機に対する基礎的な理解に本質的な影響を及ぼしていると多くの教職員からみなされているものと解釈できる．

表2 EDSAC の講義・演習の単位取得者数と手回し計算器の使用状況
Table 2 The number of students who passed examinations on EDSAC.

	EDSAC 講義 単位取得者(人)	EDSAC 演習 単位取得者(人)	手回し計算器
A学科	26	40	使 用
B学科	17	36	不使用
C学科	3	9	不使用

4.7 テーマ実施上の問題点

本テーマ実施上の問題としては，手回し計算器の修理や部品の調達，保守要員の確保（現在は筆者が担当）など大きな問題があるが，未解決である．保守の問題を解決するには本物の手回し計算器の代わりにソフトウェアによるシミュレータを使えばよいという考え方もあろうが，4.2節で述べたように“手ごたえ”のある手回し計算器は手間の概念を教える最良の道具であり欠かせない（このことについては，4.8節で再度触れる）．

4.8 手回し計算器が使えない場合の代替テーマ案

筆者らの学科では手回し計算器を積極的に集めてきたが，今日の多くの大学では手回し計算器など存在しないのが普通であろう．そこで，手回し計算器が使えない場合に上記の演習と同様の効果をあげるための代替テーマの案を次に述べる．

$(1+1/n)^n$ の収束と誤差を調べるテーマでは，電卓，大型計算機やパソコンの BASIC などを用いて計算させ各計算機の内部の精度を調べさせるのがよい．その場合，

(1+1/n)^n

のような計算式を使わないように指導する必要がある（計算機によっては exp や log の近似式を用いて

exp{n log(1+1/n)}

を計算するものがあり，本テーマに適さない）．また，いろいろな計算機を比較することが大切であるので，できるだけ多くの機種を用意する必要がある．

平方根の計算にも電卓，大型計算機やパソコンの BASIC などを用いて計算させるのがよいが，計算の手間を体験させるために中間結果を紙に書き写させる

のがよいだろう.

計算の手間を体験させる別の方法は，伝票処理などの非数値計算を手作業で行わせることである．それなら特別な機器は不要である．また，その方が手回し計算器以上にアルゴリズムや“前処理”などの概念を教えるのに好都合なこともあろう.

いずれにせよ，誤差，計算の手間を体験させるテーマが別個のものになるのはやむを得ない.

手回し計算器のシミュレータをパソコン，ワークステーション，大型計算機の TSS などの上に作製して演習に使わせることには筆者らは賛成しない．現実感が希薄であり，学生は“n乗する機能がほしい”とか“語長を可変したい”などの見当違いの要求を出すであろう (EDSAC のプログラミング演習に見られた見当違いの感想と本質は同じである).

5. おわりに

手回し計算器による演習は既に 10 年間実施している．本論文では，この演習のフィロソフィー，目的，ねらいを述べ，課題の例を示し，教育上の効果を論じた．一般に，実施中の演習の教育効果を統計的に厳密に解析することは，新しい教育方法の評価の場合と異なり，実施しない学生との比較ができないこと，我々が制御できない要因が多いことなどの理由により，むずかしい．本論文では，単位取得人数など入手可能なデータや学生の感想をもとに検討し，手回し計算器による演習は情報学科の学生が計算機に対して機械語レベルで理解したりハードウェアのセンスを養ったりする上で効果があるという結論が導かれたと思う．より客観的，数量的な教育効果の計測方法を工夫することが今後の課題である．それにより，手回し計算器を用いた新しい演習の実施方法が導かれると期待される.

本論文の冒頭にも述べたことであるが，非能率な手回し計算器による演習は，機械語プログラミングの教育や TSS 環境下での高水準言語による能率的な大量の演習と並行して実施させることにより効果をあげているのであり，手回し計算器だけでは今日の計算機教育に不十分であることは言うまでもない.

謝辞 本研究に関して討論を賜った東京農工大学工学部数理情報工学科の全教職員に感謝申し上げます．特に，手回し計算器を確保するために尽力された西村恕彦教授に感謝申し上げます.

参考文献

1) 清水敬子，高橋延匡：EDSAC によるプログラミング教育の実際，第 21 回情報処理学会全国大会論文集，5 L-2, pp. 1223-1224 (1980).
2) 清水敬子，伊勢正浩，中森眞理雄：情報工学科の計算機初期教育のための環境について，電子情報通信学会論文誌 (A)，Vol. J 71-A, No. 9, pp. 1734-1741 (1988).
3) 清水敬子，阿刀田央一，高橋延匡：情報工学系学科の計算機初期教育における EDSAC の活用の試みと効果，情報処理学会論文誌，Vol. 24, No. 3, pp. 281-292 (1983).
4) 西村恕彦：虎よ虎よ：数理情報工学科の教育，数学セミナー，Vol. 18, No. 6, pp. 50-55 (1979).
5) 中森眞理雄，高田正之：数理情報工学科の教育における手回し計算器の活用，第 21 回情報処理学会全国大会論文集，6 L-2, pp. 1247-1248 (1980).
6) 小谷善行，阿刀田央一，中森眞理雄，高橋延匡：情報工学系学科における実験・演習の一設計例，情報処理学会論文誌，Vol. 22, No. 5, pp. 402-410 (1981).
7) 島崎真昭，林 恒俊，北澤茂良，古谷俊二，渡辺正子，渡辺勝正：情報工学科におけるプログラミング実習の一例，情報処理学会論文誌，Vol. 21, No. 2, pp. 83-90 (1980).
8) 宇津宮孝一，樽美和幸，荒牧重登，牛島和夫：TSS 環境におけるプログラム実行演示システムの作成とその検討，情報処理学会論文誌，Vol. 23, No. 1, pp. 25-34 (1982).
9) 野瀬 隆，鵜澤繁行：計算機教育への 1 シミュレータの利用，第 21 回情報処理学会全国大会論文集，6L-4, pp. 1251-1252 (1980).
10) 石川 賢：マイクロ操作に基づいたコンピュータ教育システムとその評価，電子情報通信学会論文誌 (A)，Vol. J 71-A, No. 11, pp. 2063-2071 (1988).
11) 谷本勉之助：計算器の能率的使い方（改定第 3 版），金原出版，東京 (1959).
12) Wilkes, M. V., Wheeler, D. J. and Gill, S.: *The Preparation of Programs for an Electronic Digital Computer*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1957).
13) Brauer, A.: On Addition Channs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 45, pp. 736-739 (1939).
14) Knuth, D. E.: *The Art of Computer Programming*, Vol. 2, Seminumerical Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

付 録 1

学生のレポートの例 1 (1988 年)
次に示すのは，手回し計算器の各部の機能を説明さ

せる課題に対するレポートの例である．各部の本質をよく捉えている．計算器の付属説明書を丸写しにするのでなく（説明の巧拙はともかく）自分のことばで述べている．このようなレポートは毎年1，2通程度ある．

“数を置き表示するのはチェックダイヤル，右ダイヤル，左ダイヤルの三つである．それ以外に次のものがある．

置数レバー：各桁に一つずつあり，このレバーを操作することにより0から9までの数をチェックダイヤルの各桁に置く．

レバークリア：チェックダイヤルを0にする．

右帰零ハンドル：右ダイヤルを0にする．

クランクハンドル：このハンドルを正方向に1回転するとチェックダイヤルに置かれた数が右ダイヤルに加算され，負方向に回転すると減算される．

左帰零ハンドル：左ダイヤルを0にする．同時にクラッチを中立の位置にセットする．

クラッチ：これが×にセットされていると，クランクハンドルが正方向（負方向）に1回転するとき左ダイヤルのインジケータの桁に1が加算（減算）される．÷にセットされていると，この逆になる．

桁送り：右ダイヤルとチェックダイヤルとの相対位置を移動する．同時に，左ダイヤルとインジケータとの相対位置も移動する．

連乗用つまみ：このつまみを押さえて右帰零ハンドルを操作すると右ダイヤルの値がチェックダイヤルに移る．ただし，その前にチェックダイヤルが帰零されていないといけない．”

付 録 2

学生のレポートの例2（1989年）

次に示すのは，手回し計算器と EDSAC を比較させる課題に対するレポートの例である．EDSAC の命令をよく理解していないとこのようなレポートは書けない．このようなレポートは毎年5通程度ある．

“まず，共通点を述べる．

加算：

EDSAC……Acc の内容に n 番地の内容を加える（命令 An）．

手回し計算器……右ダイヤルに置いた数値にチェックダイヤルに置いた数値をクランクハンドルを正方向に回転させて加える．右ダイヤルが Acc，チェックダイヤルが n 番地とみなすことができる．

減算：

EDSAC……Acc の内容から n 番地の内容を引く（命令 Sn）．

手回し計算器……右ダイヤルに置いた数値からチェックダイヤルに置いた数値をクランクハンドルを負方向に回転させて引く．右ダイヤルが Acc，チェックダイヤルが n 番地とみなすことができる．

桁送り：

EDSAC……Acc の内容を左右に1桁シフトする（命令 RD, LD）．

手回し計算器……キャレージを左右に動かして桁送りする．

転送：

EDSAC……Acc の内容を n 番地に転送し，Acc の内容をクリアする（命令 Tn）．

手回し計算器……右ダイヤルの内容をチェックダイヤルに移し，右ダイヤルを0にする．

次に，相違点を述べる．

EDSAC は二進法であるが，手回し計算器は十進法である．

EDSAC には乗算命令がある（命令 Vn）が，手回し計算器にはない．”

付 録 3

試みに，$(1+1/n)^n$ の値と e との誤差を理論的に評価してみる（レポートにここまで書くのが理想であるが，2年生になったばかりの学生には無理である）．

一般に，

$$\log_e(1+1/n)^n$$
$$=1-1/2n+1/3n^2-1/4n^3+\cdots$$

であるから，

$$(1+1/n)^n$$
$$=e\cdot\exp(-1/2n)\cdot\exp(1/3n^2)\cdot\exp(-1/4n^3)\cdots$$
$$=e\cdot\{1-1/2n+1/8n^2+O(1/n^3)\}$$
$$\cdot\{1+1/3n^2+O(1/n^4)\}\cdot\{1+O(1/n^3)\}\cdots$$
$$=e\cdot\{1-1/2n+11/24n^2+O(1/n^3)\}$$

したがって，打ち切り誤差（絶対誤差）は $e/2n$ であり，当然，n が大きくなるに伴い小さくなる．

一方，$(1+1/n)^n$ の丸め誤差を求めるために，乗算回数が大きい $n=2^m-1$（m は自然数）のときについて考察する．計算式は

$$p_1=1+1/n,$$
$$p_i=p_{i-1}\times p_{i-1}\quad(i=2,\cdots,m),$$
$$q_1=p_1,$$

$q_i = q_{i-1} \times p_i \quad (i=2, \cdots, m)$,

で q_m が $(1+1/n)^n$ となる．このアルゴリズムは必ずしも乗算回数最小ではないが，漸近的に乗算回数最小のアルゴリズムに近い[13),14)]ので，一応これで丸め誤差を評価してみる．

有効桁数を k とし，上式に基づいて実際に計算される p_i の値を P_i とすると，

$p_1(1-\varepsilon) \leqq P_1 \leqq p_1(1+\varepsilon)$,

$P_{i-1}^2(1-\varepsilon) \leqq P_i \leqq P_{i-1}^2(1+\varepsilon) \quad (i=2, \cdots, m)$,

であるから

$|P_i/p_i - 1| \leqq (1+\varepsilon)^{2^i-1} - 1 < 2^i \varepsilon \quad (i=1, \cdots, m)$.

ただし，$10^{-k} = \varepsilon$ とする．同様に，q_i の実際に計算される値を Q_i とすると，

$$P_{i-1}Q_{i-1}(1-\varepsilon) \leqq Q_i \leqq P_{i-1}Q_{i-1}(1+\varepsilon) \quad (i=2, \cdots, m),$$

であるから

$|Q_i/q_i - 1| < 2^{i+1}\varepsilon \quad (i=1, \cdots, m)$,

したがって，丸め誤差は $2n\varepsilon$ であり，n が大きくなるに伴い大きくなる．

打ち切り誤差と丸め誤差が等しくなるのは

$e/2n = 2n\varepsilon$

から，$n = (1/2)\sqrt{e/\varepsilon}$ のときであり，n がこの値より小さいときは誤差の主要なものは打ち切り誤差，n がこの値より大きいときは誤差の主要なものは丸め誤差である．以上の解析は図1とよく一致している．

付　録　4

レポートに書かれていた学生の感想の代表的なものは次のとおりである．

“くたびれた．今の時代に生まれてよかった．”

“面白かった．”

“加減算が計算機の基礎であることがわかった．”

“電子計算機が出現する前から今日の電子計算機と同じ計算の原理が使われていたとは驚きである．”

“計算の本質に触れたような気がした．”

しかし，“なぜ，このような時代遅れのテーマをやらせるのか”という感想は皆無である．

付　録　5

手回し計算器を用いて開平法により数の平方根を求めるアルゴリズムを次に述べる．

a を2桁ごとに区切り，最上位2桁を a_1 とする．

$$\sum_{i=1}^{r} (2i-1) \leqq a_1$$

となる最大の r を求める．これを r_1 とする．左辺は r_1^2 に等しいので，r_1 が $\sqrt{a}$ の最上位の桁になる．次に $10(a_1 - r_1^2)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} (20r_1 + 2i - 1) \leqq 10(a_1 - r_1^2)$$

となる最大の r を求める．これを r_2 とする．左辺は $20r_1r_2 + r_2^2$ に等しいので，r_2 は

$(10r_1 + r_2)^2 \leqq 100a_1$

を満たす最大の r となる．すなわち，r_2 が $\sqrt{a}$ の最上位から2番目の桁である．この操作を繰り返す．

具体例として，99,000 の平方根を求める場合を次に示す．以下では，L は左ダイヤル，R は右ダイヤル，M は置数部である．クラッチはマイナスに設定されているとする（ハンドルを一方向に回転すると回転数が L に加算される）．

M＝0100

L＝000　R＝099000

ハンドルを－方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝0300

L＝100　R＝089000

ハンドルを－方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝0500

L＝200　R＝059000

ハンドルを－方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝0700

L＝300　R＝009000

ハンドルを－方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝0700

L＝400　R＝939000

キャリーが生じたので，ハンドルを＋方向に1回転する．M を1減らす．L，R を左に1桁移動する．

M＝ 0610

L＝300　R＝009000

ハンドルを－方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝ 0630

L＝310　R＝002900

ハンドルを－方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝ 0630

L＝320　R＝996600

キャリーが生じたので，ハンドルを＋方向に1回転する．M を1減らす．L，R を左に1桁移動する．

M＝ 0621

L＝310　R＝002900

ハンドルを−方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝ 0623

L＝311　R＝002279

ハンドルを−方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝ 0625

L＝312　R＝001656

ハンドルを−方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝ 0627

L＝313　R＝001031

ハンドルを−方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝ 0629

L＝314　R＝000404

ハンドルを−方向に1回転する．キャリーが生じないので，M を2増やす．

M＝ 0631

L＝315　R＝999775

キャリーが生じたので，ハンドルを＋方向に1回転する．M を1減らす．L，R を左に1桁移動する．

M＝ 0630

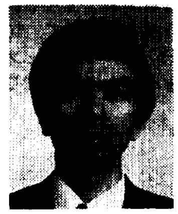
L＝314　R＝000404

解は左ダイヤルに現れた314である．

(平成元年8月30日受付)
(平成2年7月10日採録)

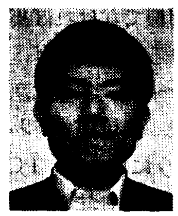
中森眞理雄（正会員）

昭和46年東京大学工学部計数工学科卒業．昭和52年同大学院修了．工学博士．同年東京農工大学工学部数理情報講師．現在助教授．昭和60年度文部省在外研究員として西ドイツ，ボン大学で研究．組合せ的数理計画問題，グラフ・ネットワークフロー，アルゴリズム・データ構造，地理情報処理，集積回路の配置配線設計，CAI，ソフトウェア開発手法などの研究と教育に従事．



萩原　洋一（正会員）

昭和54年東京電機大学工学部電気通信工学卒業．同年東京農工大学工学部数理情報工学科技官．現在助手．情報処理センターのシステム運用に従事．情報システム，データベース，ネットワークに興味を持っている．著書「パソコン端末利用マニュアル」(オーム社，共著)．



高田　正之（正会員）

昭和54年早稲田大学理工学部数学修士修了．同年東京農工大学工学部数理情報工学科助手．以来，プログラム言語，知識処理，音楽情報処理などの研究に従事．現在江戸川大学社会学部応用社会学科講師．情報規格調査会 FORTRAN WG 委員，音楽情報科学研究グループ連絡委員．