

有理 Bézier および有理スプライン曲線曲面の 直観的構成法と形状制御†

齊 藤 剛†† 穂 坂 衛††

有理 Bézier および有理スプライン曲線曲面の構造と性質を取り扱う新しい解釈を示し、その利用を具体的に示す。この解釈では、従来の4次元空間による取扱いから離れ、有理補間と線形補間の幾何的關係を利用し、実際の3次元空間で、有理の Bézier およびスプラインの制御多辺形や網を非有理のそれらと対応付ける。従来の Bézier やスプラインに関する幾何学的性質が直接活用できるようになる。また、有理スプラインは C^{n-1} や G^1 接続した有理 Bézier に変換する。スプライン頂点に付けられたウェイトパラメータの変動や頂点挿入による形状への影響は、対応する Bézier の制御点の移動と増加として可視化でき利用者が影響を把握しやすくなる。また定義式が漸化式によらない閉じた数式となり、形状の理解と曲線や曲面上の諸量の計算が容易になる。これらはインタラクティブな設計に有効な特徴である。本論文はこの方法の原理および有理曲線曲面の直観的な構成と制御法を説明し、具体的な利用例を解析的および幾何学的に示す。

1. はじめに

本研究では有理 Bézier および有理スプラインの曲線と曲面を CAGD (Computer Aided Geometric Design) の分野において利用しやすくすることを目指し、具体的には、(i)その形状の生成構造と性質を明確にし整理する、(ii)それを幾何学的に理解しやすくする、(iii)有理式表現された対象の形状と特性をインタラクティブに制御できるようにする、(iv)有理スプラインの曲線と曲面を有理 Bézier 多辺形や網に変え、形状を閉じたオペレータ形式にすることをを行う。

この論文の研究の発想は次に述べる研究の流れで必然的に現れてきたものである。筆者の一人(穂坂)は、以前に、Bézier 曲線曲面の形状や性質をシフト演算子を用いて代数的に簡潔に整理するとともに、幾何学的特性の利用を容易にした¹⁾。さらに、スプライン多辺形および網から C^{n-1} 接続した Bézier 多辺形と網を幾何学的に導出する方法を示した²⁾⁻⁴⁾。これにより、スプライン曲線曲面の定義式が漸化式によらない閉じた定義式となり、曲面上の基本ベクトルや規格量およびそれに基づいた特徴量の算出、干渉問題などの数式的な扱いにも対処できるようになった⁵⁾。このような幾何的解釈と解析的表現の統一の枠組みの中に有理 Bézier および有理スプラインも入れることを考え、それらと非有理の Bézier およびスプラインとを

有理補間と線形補間により関係付けるといふ新しい解釈を持ち込んだ。それに従い具体的な作業を著者の他方(齊藤)が行った。これは単に有理と非有理との統一をとるといふことだけではなしに、対象の理解を深め応用範囲を広めることにつながる。

Bézier 式中の多項式を有理式に拡張することにより、その表現能力が高められることは70年代末から言われ始めた⁶⁾。しかし、現実のCAD分野での利用は少なかった。その理由は、有理 Bézier の理解が十分でなく、ウェイトパラメータ(以下、「重み」と書く)の形状への影響を総合的および視覚的に捕えることが行えず、その利用法が明らかではなかったからである。筆者らが拡張2次有理 Bézier 曲線により、アウトラインフォントの表現に有効であることを実証した^{7),8)}のはその利用の少ない例の1つである。

有理 Bézier の類推から有理スプラインも唱導され始めた。しかし、有理 Bézier の場合と同様に頂点に与える重みの決定法や有理式としたための計算量の増加と計算誤差が自由度増加のメリットに見合ったものかどうかは明確ではなかった。さらに、漸化式による定義式では微分等の数式処理も困難であった。一方、有理Bスプラインはその表現に非有理のスプラインも含まれることから、NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) という形式で CAD におけるデータ交換の手段として採用されるようになり関心は増大した⁹⁾。これに伴い有理スプラインに関する論文が増加してきたが、対象が円や球等を含む特定の形状の場合や曲面の表示に必要な計算の速度を早める方法に関する議論¹⁰⁾が主である。

† An Intuitive Method of Constructing Rational Bézier or Spline Curves and Surfaces by TSUYOSHI SAITOH and MAMORU HOSAKA (Department of Communication Engineering, Faculty of Engineering, Tokyo Denki University).

†† 東京電機大学工学部電気通信工学科

従来、有理曲線曲面は (wx, wy, wz, w) を座標とする 4次元空間 (4D) で記述された非有理曲線曲面を、 $w=1$ 面へ投影することにより構成される 3次元空間 (3D) の曲線曲面であると解釈されてきた^{9),10)}。この見方は数学的には整理されているように見えるが、3D 上にある実際の有理曲線曲面の性質を 4D 座標系で捕えることは困難である。そのため有理 Bézier 曲線の性質を 3D 空間に限定して論ずる研究¹¹⁾もあるが、複比 (double ratio) を用いるため、複雑さ、計算手段の点で問題がでてくる。

本論文では、有理 Bézier および有理スプラインの構造と性質を、従来の非有理 Bézier およびスプラインの延長として取り扱い、同じ方法でインタラクティブな形状設計へ応用することに主眼を置いている。新たに提唱する解釈では、線形補間と有理補間とが幾何学的手法で容易に関係付けられることを利用し、3D 上で有理の制御多辺形や網を非有理のそれらと対応付ける。これにより、線形補間により構成される非有理曲線曲面の性質とそれに関する知識が有理曲線曲面で活用できるようになる。

有理スプライン多辺形と網からは C^{n-1} および G^2 接続した有理 Bézier 多辺形および網を導出する。これにより曲線と曲面は制御点方式による閉じた形式の表現式となる。重みや頂点挿入による形状への影響を、対応する Bézier 多辺形と網の制御点の移動と追加に反映させ可視化し、利用者が直観的にそれらを理解できるようにする。また、閉じた数式で表現されるので、曲線曲面上の点や曲面上の規格量や特徴量が従来の計算式¹⁰⁾による計算に比べてはるかに容易になり、表示のみならず干渉や評価の諸計算に対しても正確かつ高速になる。これにより、平行平面との干渉線が容易に求まり、有理スプライン曲面でも等高線が描ける。パラメータ一定線による従来の形状表示に比べて、実際の形状が明確に表現でき形状を正確に把握できるようになる。

本論文の第 2 章において、線形補間と有理補間の関係を幾何学的に明らかにし、これを用いた新しい解釈を示す。第 3 章では、その解釈を応用し、有理スプライン多辺形から有理 Bézier 多辺形の導出法を示す。第 4、5 章で曲面への応用を示し、第 6 章はまとめである。

なお本論では、特に強調する場合を除き簡略化のために非有理という接頭語を省略し、非有理 Bézier および非有理スプラインは単に Bézier またはスプライン

と書く。

2. 有理曲線曲面の新しい解釈と有理 Bézier 曲線への適用

本章では線形補間と有理補間およびそれらの間の幾何学的性質を明らかにする。次に有理曲線曲面の新しい解釈と具体的な応用を述べる。

2.1 線形補間と有理補間および新しい解釈

Bézier 曲線の多くの性質は、その制御点を $t:1-t$ の比で分割することにより図的に求まる。また、スプライン多辺形や網からはそれをスケール比で分割することにより C^{n-1} や G^2 接続した Bézier 多辺形や網が導出できる²⁾⁻⁴⁾。

本論文で提唱する新しい解釈では、有理と非有理の Bézier およびスプラインを直観的に対応付け、この分割による特性を有理 Bézier や有理スプラインに組み込む。その手段として、線形補間と有理補間を用いる。始めに、本論文で重要な役割を持つ 2 つの補間について述べる。

3D 上の 2 つの点 P_0, P_1 の間を $a:b$ の比で分割することを線形補間 (Linear Interpolation) と呼ぶ。一方、各々に重み w_0, w_1 が付随する 3D 上の 2 点 P_0, P_1 の間を

$$a \cdot w_1 : b \cdot w_0 \tag{1}$$

の比で分割することを $a:b$ の比による有理補間 (Rational Interpolation) と呼ぶ。

これら 2 つの補間の幾何学的関係を説明し、有理 Bézier と非有理 Bézier を対応させる。図 1 で、 P_0, P_1 を有理 Bézier の制御点とする。O は任意の点であり仮の原点とする。仮の原点 O と有理の制御点 P_i ($i=0, 1$) を結ぶ線分 OP_i を各々 $w_i : 1-w_i$ の比で

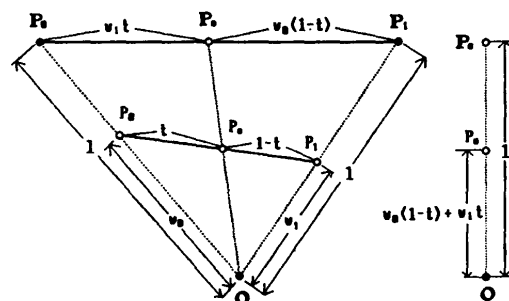


図 1 線形補間と有理補間の幾何学的関係および有理補間点の重み

Fig. 1 Relations between linear interpolation and rational interpolation, and weight of interpolated point.

分割した点を \mathbf{P}_i とする.

$$\mathbf{OP}_i : \mathbf{OP}_i = 1 : w_i \quad (2)$$

この時,

$$\mathbf{P}_i = w_i \mathbf{P}_i \quad (3)$$

が満たされる.

式(2)により求められた点 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ を有理の制御点 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ に対応する非有理の制御点とする. また, この非有理の制御辺 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ を $t : 1-t$ の比で線形補間した点を \mathbf{P}_a とする. この \mathbf{P}_a と仮の原点 \mathbf{O} とを結ぶ直線と有理制御辺 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ の交点を \mathbf{P}_a とする. この時,

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_a : \mathbf{P}_1\mathbf{P}_a = w_0t : w_0(1-t) \quad (4)$$

が成り立つ (証明は付録の前半). したがって, 交点 \mathbf{P}_a は有理制御辺 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ を有理補間した点となる. さらに, 線分 \mathbf{OP}_a と \mathbf{OP}_a の間には,

$$\mathbf{OP}_a : \mathbf{OP}_a = 1 : w_0(1-t) + w_1t \quad (5)$$

の関係が成立する (証明は付録の後半). 有理制御辺上の \mathbf{P}_a にも重みが付随すると考える時, 式(5)は式(2)を含むので式(5)の比は有理補間点 \mathbf{P}_a の重み w_a を表すと考えられる. したがって,

$$w_a = w_0(1-t) + w_1t \quad (6)$$

となる.

以上, 有理と非有理の制御点を対応付ける方法を示し, 線形補間点から有理補間点は容易に求まることを述べた. 与えられた有理制御点 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ は 3D 空間の点であっても, それらの点と任意の \mathbf{O} とが形成する 3 角形の中に $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_a, \mathbf{P}_a$ が含まれるので上記の議論は成り立つ.

この解釈の特徴は, (a)我々が通常用いる 3D のみ用いていること, (b)仮の原点 \mathbf{O} は 3D 上のどこに取っても良いこと, (c)有理補間点の重みは原点との距離の比で顕れること, したがって, (d)幾何学的に簡単に図化でき直観的にわかりやすいこと, にある. これらは, Bézier 曲線等の制御点方式による定義は座標系に依存しないという性質と初等幾何におけるメネラウスの定理を応用したものである.

本節以後では, この解釈を利用し, 次の 3つのプロセスにより具体的に有理曲線曲面の性質を示す.

(i) 非有理の生成: 有理 Bézier および有理スプラインの制御多辺形または網を非有理のそれに対応付ける.

(ii) 非有理での操作: 対応する非有理上で線形補間を求める.

(iii) 有理への復元: (ii)の線形補間点を再び有理

上に復元し, 有理上の有理補間点を求める.

2.2 有理 Bézier 曲線の構成への応用

本節では 3D 上の 3 次有理 Bézier 曲線の構成法を例に前述のプロセスを具体的に説明する. 図 2 を参照する*.

3 次有理 Bézier 曲線 $r_0(t; 3)$ の 4 つの制御点を $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ とする. \mathbf{O} を仮の原点とする. 各制御点 $\mathbf{P}_i (i=0 \dots 3)$ から (2) を満たす点 \mathbf{P}_i を求める. これら 4 つの点 \mathbf{P}_i を制御点とする 3 次 Bézier 曲線 $R_0(t; 3)$ が, 有理曲線 $r_0(t; 3)$ に対応する非有理曲線である. ここで, $r_i(t; n), R_i(t; n)$ の添字 i は第 1 制御点の添字, n は次数とする.

次に, これら 2 つの曲線の構成法を例に取り, 非有理曲線上の操作と元の有理曲線上での操作とがどのように対応するかを説明する. 図 3 は図 2 を平面に投影した図である. まず図 3 (a) を参照する. Bézier 曲線 $R_0(t; 3)$ 上の点 \mathbf{P} は線形補間の繰返しにより次のように求まる. 3 つの制御辺 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ の各々を $t : 1-t (0 \leq t \leq 1)$ の比で線形補間する. 各々の補間点を $\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b, \mathbf{P}_c$ と書く. この補間点で作られる辺 $\mathbf{P}_a\mathbf{P}_b, \mathbf{P}_b\mathbf{P}_c$ の各々を $t : 1-t$ の比で線形補間し, その補間点を $\mathbf{P}_d, \mathbf{P}_e$ と書く. この \mathbf{P}_d と \mathbf{P}_e の間を $t : 1-t$ の比で線形補間した点がパラメータ t に対応する曲線上の点 \mathbf{P} である. これは通常の Bézier 曲線を図式的に求める方法である.

シフト演算子を用いた式では,

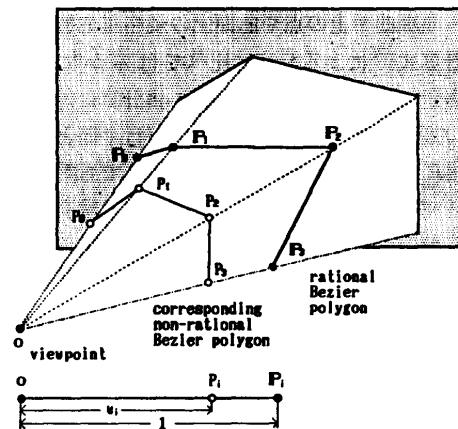


図 2 有理 Bézier の制御点と対応する非有理 Bézier の制御点

Fig. 2 Control points of a rational Bézier and the corresponding non-rational Bézier.

* 本論文の図中, ●は与えられた点, ○は求める点, そして, □は求める点を表す. また, 紙面の都合上, $w_i < 1$ の例を示すが, $w_i \geq 1$ であってもよい.

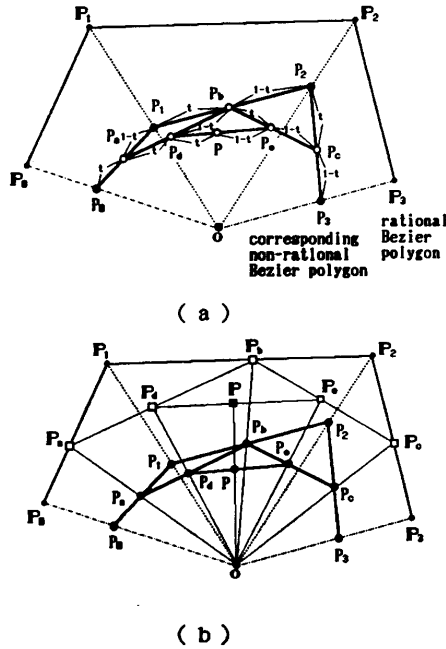


図3 有理 Bézier 曲線の分割と新しい制御点
Fig. 3 Division of a rational Bézier curve and positions of new control points.

$$\begin{aligned}
 P &= R_0(t; 3) = (1-t+tE)^3 P_0 \\
 &= (1-t+tE)R_0(t; 2) \\
 &= (1-t)R_0(t; 2) + tR_1(t; 2)
 \end{aligned} \tag{7}$$

である。ここで、 $R_0(t; 2)$ が P_a , $R_1(t; 2)$ が P_c であり、

$$\begin{aligned}
 P_a &= R_0(t; 2) = (1-t+tE)R_0(t; 1) \\
 &= (1-t)R_0(t; 1) + tR_1(t; 1), \\
 P_c &= R_1(t; 2) = (1-t+tE)R_1(t; 1) \\
 &= (1-t)R_1(t; 1) + tR_2(t; 1)
 \end{aligned} \tag{8}$$

と表される。式(8)中の、 $R_0(t; 1)$, $R_1(t; 1)$, $R_2(t; 1)$ が各々 P_a , P_b , P_c であり次式で表現される。

$$\begin{aligned}
 P_a &= R_0(t; 1) = (1-t)P_0 + tP_1, \\
 P_b &= R_1(t; 1) = (1-t)P_1 + tP_2, \\
 P_c &= R_2(t; 1) = (1-t)P_2 + tP_3.
 \end{aligned} \tag{9}$$

次に、有理辺への復元であるが、まず非有理の制御辺の3つの有理補間点 P_a , P_b , P_c を元の有理の制御辺に復元する(図3(b)参照)。これを P_a , P_b , P_c とする。これらに対応する各々の制御辺を有理分割した点である。各々の重み w_a , w_b , w_c は式(6)より

$$\begin{aligned}
 w_a &= (1-t)w_0 + tw_1, \\
 w_b &= (1-t)w_1 + tw_2, \\
 w_c &= (1-t)w_2 + tw_3.
 \end{aligned} \tag{10}$$

となる。便宜上、重みを一般的に書く記号として、

$$W_i(t; n) = (1-t+tE)^n w_i \tag{11}$$

を用いることにすると、式(10)より w_a , w_b , w_c は、
 $w_a = W_0(t; 1)$, $w_b = W_1(t; 1)$, $w_c = W_2(t; 1)$ (12)

となる。

同様の方法を P_a , P_c , P に適用することにより各点に対応する有理 Bézier 制御辺上の点 P_a , P_c , P は求まり、式(6)と式(12)より各々の重み w_d , w_e , w は、

$$\begin{aligned}
 w_d &= (1-t)W_0(t; 1) + tW_1(t; 1) = W_0(t; 2), \\
 w_e &= (1-t)W_1(t; 1) + tW_2(t; 1) = W_1(t; 2), \\
 w &= (1-t)W_0(t; 2) + tW_1(t; 2) = W_0(t; 3)
 \end{aligned} \tag{13}$$

となる。したがって式(3)より、

$$P = R_0(t; 3) = wP = W_0(t; 3)P \tag{14}$$

が成り立ち、次式が求まる。

$$\begin{aligned}
 P &= r_0(t; 3) = R_0(t; 3)/W_0(t; 3) \\
 &= \frac{(1-t+tE)^3(w_0P_0)}{(1-t+tE)^3w_0}
 \end{aligned} \tag{15}$$

これは3次有理 Bézier 曲線を表している。

2.3 補間を表す記号と有理 Bézier 曲線の性質

本節では、まず前節の2つの補間を簡略に表現するために補間点を表す記号を導入する。次いで、有理 Bézier 曲線の分割や次数上げなどの操作が、前節で述べた解釈で統一的に扱え有理補間により形式化できることを示す。

図1で示した有理補間点 P_a を式で表すと式(1)より、

$$P_a = \frac{(1-t)w_0P_0 + tw_1P_1}{(1-t)w_0 + tw_1} \tag{16}$$

となる。この右辺を

$$\Psi[t \cdot w_1 : (1-t) \cdot w_0](P_0, P_1) \tag{17}$$

と書くことにする。線形補間は $w_0 = w_1 = 1$ の場合の有理補間と考えることができるので線形補間点 P_a は、

$$P_a = \Psi[t : (1-t)](P_0, P_1) \tag{18}$$

と書ける。

この記法を用いると有理制御辺上の点 P_a , P_b , P_c は各々次式となる。

$$\begin{aligned}
 P_a &= \Psi[t \cdot w_1 : (1-t) \cdot w_0](P_0, P_1), \\
 P_b &= \Psi[t \cdot w_2 : (1-t) \cdot w_1](P_1, P_2), \\
 P_c &= \Psi[t \cdot w_3 : (1-t) \cdot w_2](P_2, P_3).
 \end{aligned} \tag{19}$$

同様に P_d , P_e , P も、

$$\begin{aligned}
 P_d &= \Psi[t \cdot w_b : (1-t) \cdot w_a](P_a, P_b), \\
 P_e &= \Psi[t \cdot w_c : (1-t) \cdot w_b](P_b, P_c), \\
 P &= \Psi[t \cdot w_e : (1-t) \cdot w_d](P_d, P_e).
 \end{aligned} \tag{20}$$

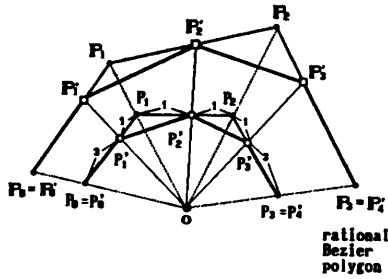


図4 有理 Bézier 曲線を次数上げた時の制御点 (P'_i) の位置

Fig. 4 Degree elevation and positions of new control points (P'_i).

となり有理補間の形式で記述できる。これらの各点の重みは式(12)および式(13)で与えられる。

また、図3において、3次 Bézier 曲線 $R_0(t; 3)$ を曲線上の点 P で2つの曲線に分割したとすると、その前半部の曲線の制御点は P_0, P_a, P_d, P であり、後半部は P, P_e, P_c, P_3 である。これと対応し、有理 Bézier 曲線 $r_0(t; 3)$ を P で分割したとすれば、分割前半の有理曲線の制御点は P_0, P_a, P_d, P となり、後半部は P, P_e, P_c, P_3 である。このように有理 Bézier 曲線の分割が直観的に行えると制御点の挿入と挿入後の形状制御の方針が立つようになる。

次数上げも本解釈の下で統一的に扱うことができる(図4参照)。一般に n 次 Bézier 曲線 $R_0(t; n)$ と同一の形状を持つ $n+1$ 次 Bézier 曲線 $R'_0(t; n+1)$ の制御点 P'_i ($i=0 \dots n+1$) は、式(17)の記法を用いれば、

$$P'_i = \Psi[n+1-i; i](P_{i-1}, P_i) \quad (21)$$

で与えられる。このように非有理上で求めた新しい制御点を2.1節で述べた方法で有理上に転写することにより、 $n+1$ 次有理 Bézier 曲線の制御点が求まる。数式で表すと有理 Bézier 曲線 $r_0(t; n+1)$ の新しい制御点 P'_i は、式(21)を有理補間に換えた次式として求まる。

$$P'_i = \Psi[(n+1-i) \cdot w_i : i \cdot w_{i-1}](P_{i-1}, P_i) \quad (22)$$

2.4 重みの形状への影響

従来、有理曲線や曲面の重みの影響は「ある1つの制御点の重みを増せば(減少させれば)、曲線および曲面はその点に近づく(遠退く)」という定性的な解釈や説明^{10)~13)}がなされていた。このような説明では、どれほど近づくか(遠退くか)の定量的な把握ができない。

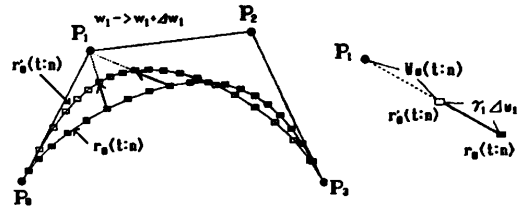


図5 重みの変化に伴う形状の変化

Fig. 5 Shape modification by changing a weight.

本論文で述べた解釈を用いると、有理 Bézier 曲線上の点は2.1節で述べた方法で作図でき、重みの影響が定量的にもコンピュータを利用せず鉛筆と定規により把握できる。

重みの形状への影響を解析的に明らかにすると次のようになる。有理 Bézier 曲線 $r_0(t; n)$ のある1つの制御点 P_i の重み w_i が、 $w'_i = w_i + \Delta w_i$ に変化した場合を扱う。重みが変わった曲線を $r'_0(t; n)$ と書くことにする。この $r'_0(t; n)$ 上の点は、重みが変わる前の曲線 $r_0(t; n)$ 上の点と重みが変わった制御点 P_i との間の有理補間点として次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} r'_0(t; n) &= \frac{(1-t+tE)^n w_0 P_0 + \gamma_i(t) \Delta w_i P_i}{(1-t+tE)^n w_0 + \gamma_i(t) \Delta w_i} \\ &= \Psi[\gamma_i(t) \Delta w_i : W_0(t; n)](r_0(t; n), P_i), \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、 $\gamma_i(t)$ は Bernstein 基底 $(?) (1-t)^i t^{n-i}$ である。移動の方向とその量を図5に示した。式(23)の第2式は次のように解釈できる。すなわち、 P_i の重みを $\gamma_i(t)$ と仮定し、 $r_0(t; n)$ (この重みは $W_0(t; n)$) と P_i の間を $\Delta w_i : 1$ の比で有理補間した点が $r'_0(t; n)$ である。重みを $\gamma_i(t)$ と仮定した P_i に対応する非有理の点(式(2)を満たす点)は作図でも求められるので、 Δw_i の変化と $r'_0(t; n)$ の位置の関係を視覚化できる。

このような形状変化は複数の制御点の重みを同時に変化させた時も成り立ち、変化した各々の制御点との間の有理補間点で表すことができる。

3. 有理スプラインから有理 Bézier の導出と重みの形状への影響

前章で述べた有理曲線の解釈を応用し、有理スプライン多辺形から有理 Bézier 多辺形を導出する。次いで、有理スプライン多辺形の制御点の重みの形状への影響を直観的に示し、それを有理補間を用いて形式化する。

3.1 有理スプライン多边形から C^{n-1} 接続した有理 Bézier 多边形の導出

従来、有理Bスプライン曲線式は、

$$\frac{\sum_{i=0}^{L+n-1} w_i P_i N_i^n(x)}{\sum_{i=0}^{L+n-1} w_i N_i^n(x)} \quad (24)$$

と書かれた¹⁰⁾。ここで、 $N_i^n(x)$ は再帰的に定義されたBスプライン関数であり、しかも、その関数値は式(24)中に明に表れない「knot」の分布に依存する。したがって、式(24)からその形状を直観的に把握するのは困難であり、制御点の重みの振る舞いも直観的にはわかりにくい。また、閉じていないために微分等の数式処理が困難である。

そこで、前章で述べた新しい解釈と文献2)~4)の方法を応用し、有理スプライン制御多边形から有理 Bézier 多边形を導出する。導出は 2.1 節で述べたプロセスに従うが、プロセス(ii)では文献2)~4)の方法を用いてスプライン多边形から互いに C^{n-1} 接続した Bézier 多边形を線形補間により求める。これを有理スプライン上に転写することにより、 C^{n-1} 接続した有理 Bézier が求まる。プロセス(ii)において接続条件を G^2 とすると、結果として G^2 接続した有理 Bézier 多边形が導出される¹⁴⁾。以下に3次有理スプ

ラインを例に C^2 接続した有理 Bézier 曲線の制御点と各制御点の重みの導出法を示す(図6参照)。

有理スプライン多边形 $(\dots, q_{-1}, q_0, q_1, q_2, q_3, \dots)$ と各々の制御点の重み k_i が与えられたとする。ここで、重みを k_i とするのは Bézier 制御点の重み w_i と区別するためである。また、任意の仮の原点を O とする。2.1 節と同様にスプラインの制御点 q_i と仮の原点 O とを結ぶ線分 Oq_i を各々 $k_i : 1-k_i$ に分割した点を p_i とする。各 p_i で作られる多边形 $(\dots, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, p_3, \dots)$ が、対応するスプライン多边形である。

このように構成されたスプライン多边形から C^{n-1} 接続した Bézier 多边形列を構成する方法の詳細は文献2)~4)に詳しく述べられているので、以下ではその概略を示す。スケール比のリストを $(\dots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ とする(スケール比はおおよそ構成する曲線分の長さの比)。図6(a)を参照する。まず、スプライン制御辺 q_0q_1 を $\lambda_{-1} : \lambda_0$ の比で分割する。この分割点を、各々 P_{-1}, P_2 と置く。式(17)の記号を用いると、次式のように線形補間点となる。

$$\begin{aligned} P_{-1} &= \Psi[\lambda_{-1} : \lambda_0 + \lambda_1](q_0, q_1), \\ P_2 &= \Psi[\lambda_{-1} + \lambda_0 : \lambda_1](q_0, q_1), \end{aligned} \quad (25)$$

このようにして求められた分割点 P_{-1}, P_2 が、単位スプライン多边形^{2),3)} $q_0q_1q_2q_3$ から導出される3次 Bézier 曲線の第2および第3制御点となる。以下、分割を式(25)の形式で表現すると、次のようにして第1および第4の制御点 P_0, P_3 が求まる。まず、

$$\begin{aligned} P_{-1} &= \Psi[\lambda_{-2} + \lambda_{-1} : \lambda_0](q_{-1}, q_0) \\ P_4 &= \Psi[\lambda_0 : \lambda_1 + \lambda_2](q_1, q_2) \end{aligned} \quad (26)$$

を求め、式(25)、(26)を用いて

$$\begin{aligned} P_0 &= \Psi[\lambda_{-1} : \lambda_0](P_{-1}, P_1), \\ P_3 &= \Psi[\lambda_0 : \lambda_1](P_2, P_4). \end{aligned} \quad (27)$$

これらの各点を有理スプラインに転写するとその有理制御辺を有理補間した点となる。したがって、導出された有理 Bézier の制御点は、式(25)~(27)の線形補間式を有理補間の形式とすることにより次式として求まる。

$$\begin{aligned} P_{-1} &= \Psi[(\lambda_{-2} + \lambda_{-1})k_0 : \lambda_0 k_{-1}](q_{-1}, q_0), \\ P_0 &= \Psi[\lambda_{-1} w_1 : \lambda_0 w_{-1}](P_{-1}, P_1), \\ P_1 &= \Psi[\lambda_{-1} k_1 : (\lambda_0 + \lambda_1)k_0](q_0, q_1), \\ P_2 &= \Psi[(\lambda_{-1} + \lambda_0)k_1 : \lambda_1 k_0](q_0, q_1), \\ P_3 &= \Psi[\lambda_0 w_4 : \lambda_1 w_2](P_2, P_4), \\ P_4 &= \Psi[\lambda_0 k_2 : (\lambda_1 + \lambda_2)k_1](q_1, q_2). \end{aligned} \quad (28)$$

ただし各点の重み w_j は、第2章と同様に仮の原点

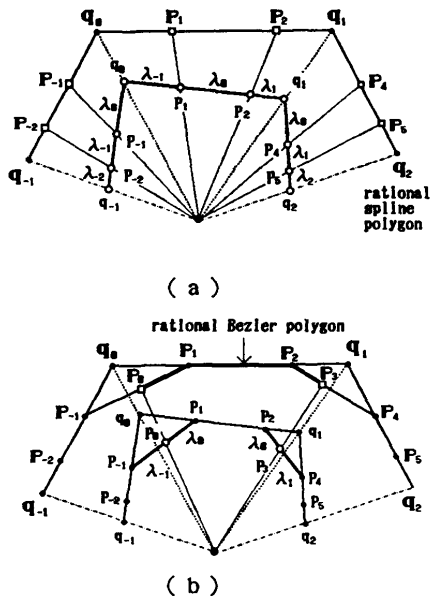


図6 3次有理スプライン多边形から導出した3次有理 Bézier 点の位置
Fig. 6 Positions of control points of rational Bézier curves of degree three derived from a rational spline polygon.

からの距離の比で与えられ次式となる。

$$\begin{aligned}
 w_{-1} &= \Psi[\lambda_{-2} + \lambda_{-1} : \lambda_0](k_{-1}, k_0), \\
 w_0 &= \Psi[\lambda_{-1} : \lambda_0](w_{-1}, w_1), \\
 w_1 &= \Psi[\lambda_{-1} : \lambda_0 + \lambda_1](k_0, k_1), \\
 w_2 &= \Psi[\lambda_{-1} + \lambda_0 : \lambda_1](k_0, k_1), \\
 w_3 &= \Psi[\lambda_0 : \lambda_1](w_2, w_4), \\
 w_4 &= \Psi[\lambda_0 : \lambda_1 + \lambda_2](k_1, k_2).
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

3.2 有理スプラインの重みの曲線形状への影響

本論文の解釈では、重みの形状への影響はまず 2.1 節(i)のプロセスで対応する非有理スプラインの制御点に移動に反映され、したがって導出された Bézier 点の移動と重みの配分となる。

以下では、導出される有理 Bézier 点がどのように移動するかを解析的に示す。図 7 を参照する。

図 7 はスプライン制御点 q_0 の重み k_0 または制御点 q_1 の重み k_1 が変化した場合、導出された 3 次有理 Bézier 制御点がどのように移動するかを示した。まず、制御点 q_0 の重みが $k_0 + \Delta k_0$ に変化した場合を扱う。この場合、導出される有理 Bézier の第 1 制御点は次式で示すように、重みが増加する前の制御点 P_0 と重みの増加した制御点 q_0 との間の有理補間の関係で新しい点 P'_0 に q_0 の方向に移動する。

$$P'_0 = \Psi[\lambda_0 \Delta k_0 : \lambda(-1, 0)w_0](P_0, q_0) \tag{30}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= \lambda_{-1} \cdot \frac{\lambda(0, 1)}{\lambda(-1, 1)} + \lambda_0 \cdot \frac{\lambda(-2, -1)}{\lambda(-2, 0)}, \\
 \lambda(i, j) &= \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_{j-1} + \lambda_j.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

一方、スプライン制御点 q_1 の重み k_1 が $k_1 + \Delta k_1$ に変化するときの導出される Bézier の第 1 制御点は、次に示す有理補間の関係で新しい P''_0 に移動する。

$$P''_0 = \Psi[\lambda_1 \Delta k_1 : \lambda(-1, 0)w_0](P_0, q_1), \tag{32}$$

ただし、

$$\lambda_1 = (\lambda_2 - 1) / \lambda(-1, 1).$$

したがって、 P_0 と q_1 を結ぶ直線上の点となる。

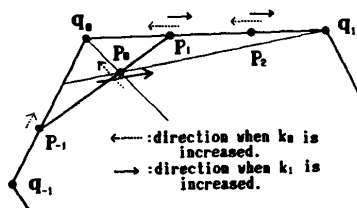


図 7 重み (k_0, k_1) の Bézier 制御点への影響
Fig. 7 Direction of displacement of derived control points, when weights are changed.

スプライン制御点の重みが形状に影響を及ぼす範囲は、その影響が Bézier 点の導出に影響を及ぼす範囲と同じであり、それらは Bézier 点を定めた式(28)の有理補間式からわかる。

4. 有理補間による有理 Bézier 曲面の直観的構成法

本章と次章では、これまでに示した有理曲線の解釈がそのまま有理曲面にも適用できることを示す。まず有理 Bézier 曲面を扱う。

有理 Bézier 曲面 $S_{00}(u, v; n, n)$ の制御点を P_{ij} , その重みを w_{ij} とする。2.1 節で述べたプロセス(i)を適用することにより有理 Bézier 曲面 $S_{00}(u, v; n, n)$ に対応する Bézier 曲面 $S_{00}(u, v; n, n)$ が生成される。対応する Bézier 曲面をシフト演算子を用いて表すと、

$$S_{00}(u, v; n, n) = (1-u+uE)^n (1-v+vF)^n P_{00} \tag{33}$$

となる。以下では、 $n=1$ の場合を例に取り、これら 2 つの曲面上の点がどのような関係にあるかを示す。 $n=1$ の場合、式(33)は、

$$S_{00}(u, v; 1, 1) = (1-u+uE)(1-v+vF)P_{00} \tag{34}$$

である。この面上のパラメータ u, v に対応する点 P は、以下のように定まる。

まず制御辺 $P_{00}P_{01}$ を $v : 1-v$ の比で線形補間し、その点を P'_0 とする。また、制御辺 $P_{10}P_{11}$ を同じ比 $v : 1-v$ で線形補間した点を P'_1 とする。これらの分割点同士を結ぶ線分 $P'_0P'_1$ を $u : 1-u$ の比で線形補間した点が求める点 P となる。

各補間点をこれまでと同じ方法で有理制御辺に転写することにより、対応する有理上の有理補間点として有理 Bézier の制御点が求まる。

図 8 を参照する。有理制御辺 $P_{01}P_{00}$ および $P_{11}P_{10}$ を各々 $v : 1-v$ の比で有理補間する。この分割点が各々 P'_0, P'_1 であり、

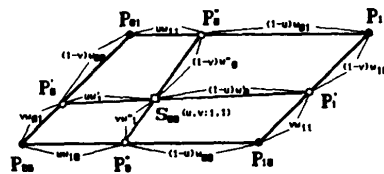


図 8 1 次有理曲面と曲面上の点
Fig. 8 Rational Bézier surface of degree one and a point on it.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_0 &= \Psi[v \cdot w_{01} : (1-v) \cdot w_{00}] (\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{01}), \\ \mathbf{P}'_1 &= \Psi[v \cdot w_{11} : (1-v) \cdot w_{10}] (\mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{11}), \end{aligned} \quad (35)$$

となる。各々の重みを、

$$\begin{aligned} w'_0 &= \Psi[v : 1-v] (w_{00}, w_{01}), \\ w'_1 &= \Psi[v : 1-v] (w_{10}, w_{11}), \end{aligned} \quad (36)$$

と書く。この補間点 \mathbf{P}'_0 と \mathbf{P}'_1 との間を $u : 1-u$ の比で有理補間した点が \mathbf{P} であり、

$$\mathbf{P} = \Psi[u \cdot w'_1 : (1-u) \cdot w'_0] (\mathbf{P}'_0, \mathbf{P}'_1) \quad (37)$$

となる。これをシフト演算子を用いて書き直すと式(35)より、

$$\begin{aligned} (1-v+vF)w_{00} \cdot \mathbf{P}'_0 &= (1-v+vF)(w_{00}\mathbf{P}_{00}), \\ (1-v+vF)w_{10} \cdot \mathbf{P}'_1 &= (1-v+vF)(w_{10}\mathbf{P}_{10}) \end{aligned} \quad (38)$$

となる。また、式(36)と(37)より、

$$(1-u+uE)w'_0 \cdot \mathbf{P} = (1-u+uE)(w'_0\mathbf{P}'_0) \quad (39)$$

である。ただし、 $Ew'_0 = w'_1$ 、 $E\mathbf{P}'_0 = \mathbf{P}'_1$ 。したがって、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{S}_{00}(u, v; 1, 1) \\ &= \frac{(1-u+uE)(1-v+vF)(w_{00}\mathbf{P}_{00})}{(1-u+uE)(1-v+vF)w_{00}} \end{aligned} \quad (40)$$

となる。

一般に n 次有理 Bézier 曲面は、

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{00}(u, v; n, n) \\ = \frac{(1-u+uE)^n (1-v+vF)^n (w_{00}\mathbf{P}_{00})}{W_{00}(u, v; n, n)} \end{aligned} \quad (41)$$

である。ここで、

$$W_{00}(u, v; n, n) = (1-u+uE)^n (1-v+vF)^n w_{00} \quad (42)$$

とし、曲面上の点 $\mathbf{S}_{00}(u, v; n, n)$ の重みを表す。また式(41)を再帰的な式で表現すると、 n 次有理 Bézier 曲面上の点 $\mathbf{S}_{00}(u, v; n, n)$ は $n-1$ 次有理 Bézier 曲面の4点

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{00}(u, v; n-1, n-1), \quad \mathbf{S}_{10}(u, v; n-1, n-1), \\ \mathbf{S}_{01}(u, v; n-1, n-1), \quad \mathbf{S}_{11}(u, v; n-1, n-1) \end{aligned} \quad (43)$$

の有理補間で表現される。

さて、曲面(33)は n 次 Bézier 曲線のテンソル積として定義される。有理曲面(41)は有理曲線のテンソル積である。これは以下のように示される。

有理 Bézier パッチの制御点を行列で $\{\mathbf{P}_{ij}\}$ と表し、その重みも同様に行列で $\{w_{ij}\}$ と表す ($0 \leq i, j \leq n$)。ここで、 j 番目の列ベクトル

$$[\mathbf{P}_{0j}, \mathbf{P}_{1j}, \dots, \mathbf{P}_{nj}] \quad (44)$$

を有理 Bézier 曲線 $\mathbf{r}_j(u; n)$ の制御多边形と考えれば、

$$\mathbf{r}_j(u; n) = \frac{(1-u+uE)^n (w_{0j}\mathbf{P}_{0j})}{(1-u+uE)^n w_{0j}} \quad (45)$$

なる曲線となる。この曲線上のパラメータ u に対応する点 $\mathbf{r}_j(u; n)$ の重みは $(1-u+uE)^n w_{0j}$ と表すことができる。パラメータ u を固定し、各列ベクトルから式(45)で定まる点のベクトル

$$[\mathbf{r}_0(u; n), \mathbf{r}_1(u; n), \dots, \mathbf{r}_n(u; n)] \quad (46)$$

を考える。これを n 次有理 Bézier 曲線の制御点とすれば、新たなパラメータ v の有理 Bézier 曲線

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(v; n) \\ = \frac{(1-v+vF)^n \{ (1-u+uE)^n w_{00} \mathbf{r}_0(u; n) \}}{(1-v+vF)^n \{ (1-u+uE)^n w_{00} \}} \end{aligned} \quad (47)$$

が定義できる。ただし、 $F^i \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_i$ 。 u と v とは独立なパラメータであるので上式は有理曲面式(41)となる。

次に、有理 Bézier 制御点の重みの形状への影響を定量的に述べる。前述のように、有理曲面は有理曲線のテンソル積であるので、重みの形状への影響は面を定義する各々の曲線への影響(これは図5に示した)の積の形で与えられる。ある制御点 \mathbf{P}_{ij} の重み w_{ij} が Δw_{ij} 増加した場合、その曲面は元の曲面上の点 $\mathbf{S}(u, v; n, n)$ と重みが増加した制御点 \mathbf{P}_{ij} との間を

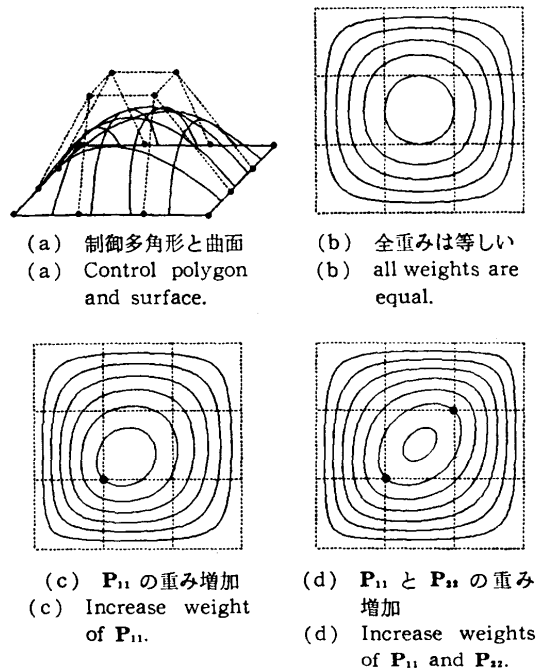


図9 重みの形状への影響 (実線は等高線)
Fig. 9 Shape modifications by weights.
(In this figure, solid lines show contour curves.)

$$\gamma_j(u)\gamma_i(v)\Delta w_{ij} : W_{00}(u, v; n, n) \quad (48)$$

の比で分割した点に移動する。ただし、 $\gamma_j(t)$ は式(23)で与えた。この点は式(17)の記号を用いると、

$$\begin{aligned} S'(u, v; n, n) \\ = \Psi[\gamma_j(u)\gamma_i(v)\Delta w_{ij} : W_{00}(u, v; n, n)] \\ (S(u, v; n, n), P'_{ij}) \end{aligned} \quad (49)$$

のように有理補間の形式となる。重みの形状への影響が、従来のような定性的方法でなく式(49)のように有理補間により、その図的解釈ができる数式として定量的にも表現できる。これらの具体的な例として図9に3次有理 Bézier 曲面の例を示す。図9では、すべての重みが1の時、 P_{11} のみの重みを増加させた時、および P_{11} と P_{22} とを同時に同じ量増加させた時、各々について、等高線により形状の変化を示した。

5. 有理スプライン網から有理 Bézier 網の導出と重みの影響

本章では、新しい解釈を有理スプライン曲面に適用する。これにより、スプライン頂点の挿入、分割そして次数上げなどに従来のスプラインでの操作が直接応用できる。また、有理スプライン網から有理 Bézier 網を導出する。Bézier を導出する利点はすでに第1章で述べたとおりである。

有理 Bézier の導出手順は次のとおりである。本論文の解釈(2.1節)のプロセス(i)により、与えられて有理スプライン網から対応するスプライン網を求めることができる。このスプライン網から文献2)~4)で述べた方法で Bézier 網を導出する。これを有理スプライン制御辺に転写することにより有理 Bézier 網が導出できる。

以下では、有理補間を用いて、有理スプライン網から有理 Bézier 網を直接導出する方法を述べる。

有理スプラインの制御点行列を $\{q_{ij}\}$ 、重みの行列を $\{k_{ij}\}$ とする ($0 \leq i, j \leq N$)。導出した有理 Bézier 網の制御点行列を $\{P_{mn}\}$ とその重み行列 $\{w_{mn}\}$ とする。導出は、次の2つのステップに分れる。始めに、 $\{q_{ij}\}$ の j 番目の列ベクトル

$$\{q_{0j}, q_{1j}, \dots, q_{(N-1)j}, q_{Nj}\} \quad (50)$$

を有理スプライン曲線の制御多辺形とみなし、第3章で示した方法により中間的な有理 Bézier 制御点の列

$$\{P'_{0j}, P'_{1j}, \dots, P'_{(m-1)j}, P'_{mj}\} \quad (51)$$

を求める。すべての列に対して行うことにより、中間的な有理 Bézier 制御点の行列 $\{P'_{ij}\}$ とその重みの行列 $\{k'_{ij}\}$ が求まる。

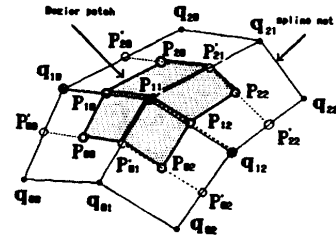


図10 2次有理 Bézier パッチの導出例
Fig. 10 Example of a derived rational Bézier patch.

次いで、この行列 $\{P'_{ij}\}$ の第 h 行

$$\{P'_{h0}, P'_{h1}, \dots, P'_{h(N-1)}, P'_{hN}\} \quad (52)$$

を独立した有理スプラインの制御多辺形とみなし、同様に第3章に示した方法で有理 Bézier 制御点列を求める。これをすべての行について行うと、重み行列 $\{w_{mn}\}$ を持つ有理 Bézier 網 $\{P_{mn}\}$ が求められる。これらの変換過程で、行と列どちらを先に行ってもよい。

具体的な例を図10に示す。単位2次有理スプライン網を $\{q_{ij}\}$ ($0 \leq i, j \leq 2$)、列方向の分割比を λ_i 、行方向の分割比を μ_j とする。ここから導出される2次有理 Bézier パッチ $S_{00}(u, v; 2, 2)$ の制御点は以下のように定まる。まず、各々の列から中間的な Bézier 制御点 $\{P'_{ij}\}$ とその重み $\{k'_{ij}\}$ は以下のように求まる。 $j=0 \dots 2$ とすると、

$$\begin{aligned} P'_{0j} &= \Psi[\lambda_{-1}k_{1j} : \lambda_0k_{0j}](q_{0j}, q_{1j}), \\ P'_{1j} &= q_{1j}, \\ P'_{2j} &= \Psi[\lambda_0k_{2j} : \lambda_1k_{1j}](q_{1j}, q_{2j}), \\ k'_{0j} &= \Psi[\lambda_{-1} : \lambda_0](k_{0j}, k_{1j}), \\ k'_{1j} &= k_{1j}, \\ k'_{2j} &= \Psi[\lambda_0 : \lambda_1](k_{1j}, k_{2j}). \end{aligned} \quad (53)$$

これらの各々を有理スプライン制御点とみなすことにより、2次有理パッチの Bézier 制御点 $\{P_{mn}\}$ とその重み $\{w_{mn}\}$ は以下のように求まる。 $i=0 \dots 2$ とする時、

$$\begin{aligned} P_{i0} &= \Psi[\mu_{-1}k'_{i1} : \mu_0k'_{i0}](P'_{i0}, P'_{i1}), \\ P_{i1} &= P'_{i1}, \\ P_{i2} &= \Psi[\mu_0k'_{i2} : \mu_1k'_{i1}](P'_{i1}, P'_{i2}), \\ w_{i0} &= \Psi[\mu_{-1} : \mu_0](k'_{i0}, k'_{i1}), \\ w_{i1} &= k'_{i1}, \\ w_{i2} &= \Psi[\mu_0 : \mu_1](k'_{i1}, k'_{i2}). \end{aligned} \quad (54)$$

この有理 Bézier パッチ $S_{00}(u, v; 2, 2)$ は、隣接するパッチ $S_{2i, 2j}(u, v; 2, 2)$ ($i=-1, 0, 1, j=-1, 0, 1$) と C^1 接続している。高次の有理スプライン網でも同様の手法により有理 Bézier 網が導出できる。

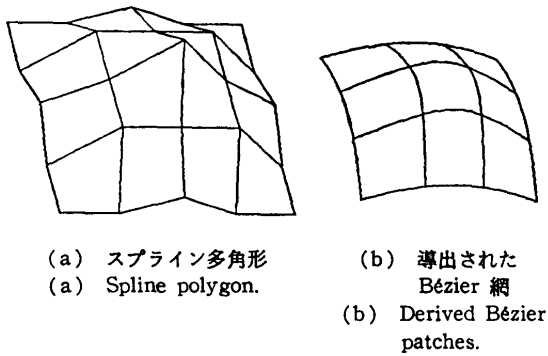


図 11 スプライン網と導出された Bézier 網
Fig. 11 Spline nets and derived Bézier patches.

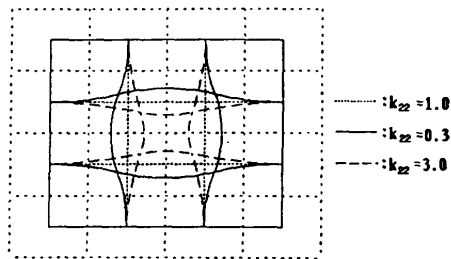


図 12 重みの Bézier パッチ境界への影響
Fig. 12 Shape modifications of derived patch boundaries by weight.

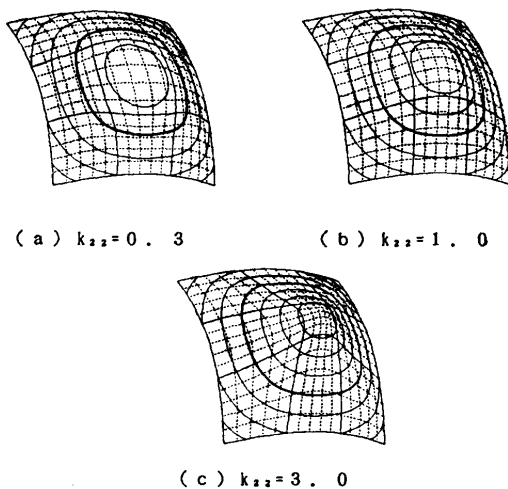
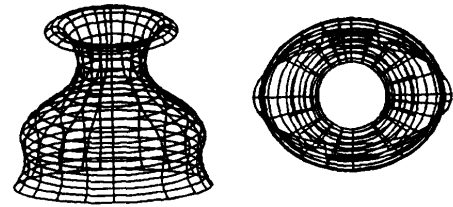


図 13 重みの曲面形状への影響 (点線はパラメーター定線, 実線はパッチ境界および等高線)
Fig. 13 Shape modification by a weight k_{22} .
(Dotted lines show constant parameter curves, and solid lines show patch boundaries and contour curves.)

導出例を図 11 に示す。図 11 は、 5×5 の有理スプライン網から 9 枚の 2 次有理 Bézier パッチを導出した例である。図 12 は中央の制御点 q_{22} の重み k_{22} が



(a) 斜図 (b) 上図
(a) Oblique view. (b) Top view.

図 14 回転面を含む曲面の表現例
Fig. 14 Example of a shape partly including surface of revolution.

0.3, 1.0, 3.0 とした場合に各々導出された有理 Bézier パッチの境界を示した。パッチ境界も図 5 と同様の形状変化を受ける。さらに図 13 では、各々のパッチ群の境界とパラメーター定線を示し、重みによる形状変化を明らかにするために等高線を書き加えた。パラメーター定線の変化は大きく、その形状をそれから判断しにくい。しかし、等高線を表示することにより実際の形状が把握できるようになる。導出されたパッチの外周辺は重みの影響がないことがわかる。

また、図 14 に有理曲面の特徴として回転面をその一部に含み、しかも全体が滑らかに接続されたパッチから構成した自由曲面形状の例を示した。上部は回転面であるが下部は自由曲面である。

6. おわりに

本論文では、有理式表現した曲線と曲面の新しい解釈を示し具体的な応用を述べた。これにより、有理 Bézier と有理スプラインの曲線曲面の形状や性質が直観的かつ幾何学的にわかりやすくなると同時に、有理補間の導入により形式化しコンピュータによる扱いにも対処できるようになる。特に、有理スプライン曲面を Bézier 形式にすることにより表示や干渉そして評価のための計算が効率的に行えるようになった。

また本解釈により、著者らは従来なかった新しい問題を取り扱うことができた。これについては将来発表する予定である。

謝辞 有用かつ貴重なご意見とご討論を頂きました本学研究生 久志本琢也氏(スタンレー電気)に感謝いたします。また、ご協力頂いた権田秀夫氏(現 NTT)に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Hosaka, M. and Kimura, F.: A Theory and Methods for Three Dimensional Free Form

- Shape Construction, *J. of IPSJ*, Vol. 3, No. 3, pp. 140-151 (1980).
- 2) 穂坂, 久志本, 権田: 曲線曲面の接続と干渉, 情報処理学会 G & CAD シンポジウム予稿集, pp. 57-66 (1987).
 - 3) 穂坂, 久志本, 権田: 曲線曲面の接続と干渉(続), 情報処理学会 G & CAD シンポジウム予稿集, pp. 121-131 (1988).
 - 4) 穂坂: 自由曲面パッチ接続問題の解決, 情報処理学会30周年記念論文, 情報処理, Vol. 31, No. 5, pp. 612-622 (1990).
 - 5) 東, 久志本, 穂坂: 自由曲面の特徴および評価に関する諸量および表示, 情報処理学会 G & CAD シンポジウム予稿集, pp. 45-54 (1989).
 - 6) Faux, L.D. and Pratt, M.J.: *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood (1979).
 - 7) 齊藤, 穂坂: 拡張した2次有理 Bézier 曲線の性質とその曲線近似法への応用, 情報処理学会論文誌, Vol. 31, No. 1, pp. 33-41 (1990).
 - 8) 齊藤, 穂坂: 拡張2次有理 Bézier 曲線を用いた高品位文字フォントの作成とその性質, 情報処理学会論文誌, Vol. 31, No. 4, pp. 562-570 (1990).
 - 9) Dokken, T., Skytt, V. and Ytrehus, A.M.: The Role of NURBS in Geometric Modelling and CAD/CAM, *Proc. of Int. GI-IFIP Symp. '89*, pp. 95-102 (1989).
 - 10) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design—A Practical Guide*, Academic Press, Inc. (1988).
 - 11) Farin, G.: Algorithms for Rational Bézier Curve, *Comput. Aided Des.*, Vol. 15, No. 2, pp. 73-77 (1983).
 - 12) Piegl, L.: Modifying the Shape of Rational B-spline. Part 1: Curves, *Comput. Aided Des.*, Vol. 21, No. 8, pp. 509-518 (1989).
 - 13) Piegl, L.: Modifying the Shape of Rational B-spline. Part 2: Surface, *Comput. Aided Des.*, Vol. 21, No. 9, pp. 538-546 (1989).
 - 14) 齊藤, 穂坂: 有理 Bézier と有理スプライン曲線曲面の直観的な構成法と諸性質, 精密工学会設計シンポジウム予稿集, pp. 4-6 (1990).
 - 15) 矢野: 幾何の有名な定理, pp. 55-63, 共立出版 (1981).
 - 16) Rockwood, A., Heaton, K. and Davis, T.: Real Time Rendering of Trimmed Surfaces, *ACM Comput. Gr.*, Vol. 23, No. 3, pp. 107-116 (1989).

付 録

まず, 式(4)を証明する(図15参照). $P'O P_1$ を $P_0 P_1$ に平行に取り, $P'O P_1$ と PO の交点を P' とす

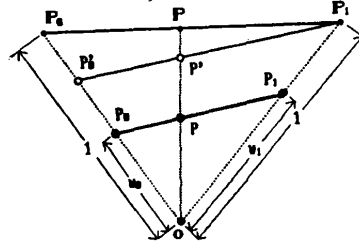


図15 式(4)と(5)証明のための補助線
Fig. 15 Figure for proof of Eqs. (4) and (5).

る. この時, メネラウスの定理¹⁵⁾より,

$$\frac{P'O P' \cdot P_1 P \cdot P_0 O}{P' P_1 \cdot P P_0 \cdot O P'} = \frac{t \cdot P_1 P \cdot w_1}{1-t \cdot P P_0 \cdot w_0} = 1 \quad (55)$$

が成り立つ. したがって,

$$P_0 P : P P_1 = t w_1 : (1-t) w_0 \quad (56)$$

である.

一方, 式(5)は以下のように証明できる.

$$\begin{aligned} \frac{P P' \cdot O P' \cdot P_0 P_1}{P' O \cdot P' O P_0 \cdot P_1 P} &= \frac{P P' \cdot w_0 \cdot w_1 t + w_0 (1-t)}{P' O \cdot w_1 - w_0 \cdot w_0 (1-t)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (57)$$

であり, さらに,

$$O P : O P' = w_1 : 1 \quad (58)$$

であるので,

$$\begin{aligned} \frac{O P}{O P'} &= \frac{O P'}{O P} \cdot \frac{O P}{O P'} = \frac{O P'}{O P} \cdot \frac{1 + P P'}{O P'} \\ &= \frac{1}{w_1 t + w_0 (1-t)}. \end{aligned} \quad (59)$$

ゆえに,

$$O P : O P = 1 : (w_1 t + w_0 (1-t)). \quad (60)$$

(平成2年4月25日受付)

(平成3年1月11日採録)



斉藤 剛 (正会員)

昭和25年生。昭和48年東京電機大学工学部電気通信工学科卒業。昭和51年東京電機大学大学院修士課程修了。昭和54年4月、工学部電気通信工学科助手。現在、グラフィックス、CADに関する研究に従事。電子情報通信学会、精密工学会など各会員。



穂坂 衛 (名誉会員)

大正9年生。昭和17年9月東京大学工学部航空学科卒業。海軍、運輸省、国鉄を経て、昭和34年10月より東京大学教授、50年4月より東京工業大学教授兼任、昭和56年3月東京大学、東京工業大学定年。工学博士。東京大学名誉教授。現、東京電機大学教授、当学会前会長、調査研究運営委員会委員長。学会論文賞（当学会3編、機械学会1編）、当学会功績賞、紫綬褒章、科学技術庁長官賞など。昭和28年からコンピュータに関心を持ち実時間情報システム、グラフィックス、CADなどをその初期から取り扱う。