7段数6次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式の解について†

田中正次†† 高山尚文†††

7段数6次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式とその解については，Butcher によって先鞭がつけられた．すなわち，Butcher はある仮定を導入することにより，28個のパラメータに関する37個の次数条件式の中に一次従属な関係を作り，等価な14個の系を得た．ついで Butcher は，この系を自由パラメータが適当に与えられると他の係数が容易に計算できるような等価な系に変形し，いくつかの7段数6次法を導いた．著者たちは，Butcher の解の誘導法を参考にしながら，前述の簡単化の仮定と14個の次数条件式から，4自由度をもつ一解系の一般式を得た．これにより，自由パラメータが実用的な範囲で変動するとき，打ち切り誤差・安定性・丸め誤差などの諸特性の大域的な領域における変化の模様をとらえることが可能になり，ひいてはいろいろな角度から公式を最適化する道が開かれた．

1. はじめに

7段数6次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式とその解については，Butcher (1964)[1] による研究がある．彼は，公式を特徴づけるパラメータ間にある仮定を導入することにより，28個の係数パラメータに関する37個の次数条件式の中に一次従属な関係を作り，等価な14個の方程式系を得た．ついで彼は，この系を自由パラメータが適当に与えられると他の係数が容易に計算できるように変形し，いくつかの7段数6次法（以下7段数6次陽的 Runge-Kutta 法を，しばしばこのように略称する）を導いた．

著者たちは，Butcher による解の誘導法を参考にしながら，簡単化の3条件と14個の次数条件式から4自由度をもつ一解系の一般式を得た．これにより自由パラメータが実用的な範囲で変動するとき，打ち切り誤差・安定性・丸め誤差などの諸特性がどのように変動するかをとらえることができ，いろいろな観点から公式を最適化する道が開かれた．

この研究は，続編の“7段数6次法の最適化”の基礎編で，その準備として行われたものである．

以下2章において7段数6次法の次数条件式について述べ，3章において得られた解系を示す．また4章において，既知公式のあるものがこの解系に属することを示す．

† On a Solution of the Order Conditions for the Seven-stage Sixth-order Explicit Runge-Kutta Method by MASATSUGU TANAKA (Department of Electrical Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering, Yamanashi University) and NAOBUMI TAKAYAMA (Shinku Joho System Ltd.).

†† 山梨大学工学部電子情報工学科
††† (有)シンク情報システム

2. 7段数6次法と次数条件式

与えられた初期値問題を

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{2.1}$$

とする．ここで y, y' および f は関数ベクトル，y_0 は定数ベクトルで，f は十分滑らかなものとする．

初期値問題(2.1)において，$x=x_n$ における解 y_n が知られているとき，$x=x_n+h$ における近似解 y_{n+1} を次式によって求める方法(2.2)を，7段数陽的 Runge-Kutta 法という．

$$\begin{aligned}
k_1&=hf(x_n,y_n)\\
k_2&=hf(x_n+c_2h,\ y_n+b_{21}k_1)\\
k_3&=hf(x_n+c_3h,\ y_n+b_{31}k_1+b_{32}k_2)\\
k_4&=hf(x_n+c_4h,\ y_n+b_{41}k_1+b_{42}k_2+b_{43}k_3)\\
k_5&=hf(x_n+c_5h,\ y_n+b_{51}k_1+b_{52}k_2+b_{53}k_3+b_{54}k_4)\\
k_6&=hf(x_n+c_6h,\ y_n+b_{61}k_1+b_{62}k_2+b_{63}k_3\\
&\qquad +b_{64}k_4+b_{65}k_5)\\
k_7&=hf(x_n+c_7h,\ y_n+b_{71}k_1+b_{72}k_2+b_{73}k_3\\
&\qquad +b_{74}k_4+b_{75}k_5+b_{76}k_6)\\
y_{n+1}&=y_n+a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3+a_4k_4+a_5k_5\\
&\qquad +a_6k_6+a_7k_7
\end{aligned} \tag{2.2}$$

特に，$y_n=y(x_n)$（ここで $y(x)$ は(2.1)の理論解である）のときの(2.2)の y_{n+1} の右辺および $y(x_n+h)$ の両者の $x=x_n$ に関するテイラー展開が，関数 f に関係なく h^6 の項まで正確に一致するとき，公式(2.2)は6次法であるといわれる．ここでは(2.2)が6次法である場合について考察する．公式(2.2)は，簡単のために次のような係数マトリックス（**表1**）を用いて表示することが多い．

表1に示す係数パラメータの間には

$$c_i=\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}\qquad (i=2,3,\cdots,7) \tag{2.3}$$

表 1　公式(2.2)の係数マトリックスによる表示
Table 1　The representation of the formula (2.2) by the array numbers that characterize it.

c_2	b_{21}
c_3	b_{31} b_{32}
c_4	b_{41} b_{42} b_{43}
c_5	b_{51} b_{52} b_{53} b_{54}
c_6	b_{61} b_{62} b_{63} b_{64} b_{65}
c_7	b_{71} b_{72} b_{73} b_{74} b_{75} b_{76}
	a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7

なる関係があるので，決定すべきパラメータは 28 個である．

根付き木 (rooted tree)[2] を用いて7段数6次法の次数条件式を求めると，前記の 28 パラメータに関する 37 個の方程式系が得られる．このままではパラメータ数より方程式数のほうが多いので，解の存在も疑わしい．そこで，次数条件式中に一次従属な関係を作って条件式数を減らすために，次に示すような簡単化の仮定を導入する．

$$\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}c_j=\frac{c_i^2}{2} \qquad (i=3, 4, \cdots, 7) \tag{2.4}$$

$$a_2=0 \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=j+1}^{7} a_i b_{ij}=a_j(1-c_j) \qquad (j=1, 2, \cdots, 6) \tag{2.6}$$

この仮定を用いることにより，7段数6次法の 37 個の次数条件式は，これと等価な次に示す 14 個の方程式系に減らすことができる．ただし $1\leqq i, j, k, l\leqq 7$, $i>j>k>l$ および $c_1=0$ であり，また $i\leqq j$ ならば $b_{ij}=0$ であるものとする．

$$\sum_{i=1}^{7} a_i=1 \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=2}^{7} a_i c_i=1/2 \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=2}^{7} a_i c_i^2=1/3 \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=2}^{7} a_i c_i^3=1/4 \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=2}^{7} a_i c_i^4=1/5 \tag{2.11}$$

$$\sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j^2 c_i=1/15 \tag{2.12}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k c_i=1/30 \tag{2.13}$$

$$\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_i c_l=1/144 \tag{2.14}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^2 c_i=1/72 \tag{2.15}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_i c_j c_k=1/48 \tag{2.16}$$

$$\sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j^3 c_i=1/24 \tag{2.17}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k c_i^2=1/36 \tag{2.18}$$

$$\sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j^2 c_i^2=1/18 \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=2}^{7} a_i c_i^5=1/6 \tag{2.20}$$

3. 7段数6次法の次数条件式の解

7段数6次法の 37 個の次数条件式を解く代りに，ここでは簡単化の条件(2.4)～(2.6)と，これを導入することにより 37 条件式と等価になった 14 個の方程式，(2.7)～(2.20)とを連立して解いた．解系の導出に当っては，Butcher の研究から示唆されるところが少なくなかった．得られた c_2, c_3, c_5 および c_6 を自由パラメータとする解系を次に示す．

$$c_7=1 \tag{3.0}$$

$$c_4=\frac{c_3}{15c_3^2-10c_3+2} \tag{3.1}$$

いま

$$p_1(c_3, c_4, c_5, c_6)=c_3+c_4+c_5+c_6$$

$$\bar{p}_1(c_i, c_j, c_k)=c_i+c_j+c_k$$

$$p_2(c_3, c_4, c_5, c_6)=c_3c_4+c_3c_5+c_3c_6+c_4c_5+c_4c_6+c_5c_6$$

$$\bar{p}_2(c_i, c_j, c_k)=c_ic_j+c_ic_k+c_jc_k$$

$$p_3(c_3, c_4, c_5, c_6)=c_3c_4c_5+c_3c_4c_6+c_3c_5c_6+c_4c_5c_6$$

$$q(c_i, c_j, c_k, c_l)=60c_j(c_i-c_j)(c_j-c_k)(c_j-c_l)\cdot(1-c_j)$$

とおくと，

$$a_1=\frac{30c_3c_4c_5c_6-10p_3(c_3, c_4, c_5, c_6)+5p_2(c_3, c_4, c_5, c_6)-3p_1(c_3, c_4, c_5, c_6)+2}{60c_3c_4c_5c_6} \tag{3.2}$$

$$a_3=\frac{10c_4c_5c_6-5\bar{p}_2(c_4, c_5, c_6)+3\bar{p}_1(c_4, c_5, c_6)-2}{q(c_4, c_3, c_5, c_6)} \tag{3.3}$$

$$a_4=\frac{10c_3c_5c_6-5\bar{p}_2(c_3, c_5, c_6)+3\bar{p}_1(c_3, c_5, c_6)-2}{q(c_3, c_4, c_5, c_6)} \tag{3.4}$$

$$a_5=\frac{10c_3c_4c_6-5\bar{p}_2(c_3,c_4,c_6)+3\bar{p}_1(c_3,c_4,c_6)-2}{q(c_3,c_5,c_4,c_6)} \tag{3.5}$$

$$a_6=\frac{10c_3c_4c_5-5\bar{p}_2(c_3,c_4,c_5)+3\bar{p}_1(c_3,c_4,c_5)-2}{q(c_3,c_6,c_5,c_4)} \tag{3.6}$$

$$a_7=\frac{30c_3c_4c_5c_6-20p_3(c_3,c_4,c_5,c_6)+15p_2(c_3,c_4,c_5,c_6)-12p_1(c_3,c_4,c_5,c_6)+10}{60(1-c_3)(1-c_4)(1-c_5)(1-c_6)} \tag{3.7}$$

$$a_2=0 \tag{3.8}$$

$$b_{21}=c_2 \tag{3.9}$$

$$b_{32}=\frac{c_3^2}{2c_2} \tag{3.10}$$

$$b_{31}=c_3-b_{32} \tag{3.11}$$

$$b_{54}=-\frac{15c_3c_6-9c_3-6c_6+4}{360a_5(1-c_5)(c_5-c_6)c_4(c_3-c_4)} \tag{3.12}$$

$$b_{64}=\frac{15c_3c_4c_6-15c_3c_5^2-9c_3c_4+15c_3c_5-6c_3c_6-6c_4c_6+6c_5^2+4c_4-7c_5+3c_6}{360a_6(1-c_6)c_4(c_3-c_4)(c_5-c_6)(c_4-c_5)} \tag{3.13}$$

$$b_{65}=\frac{5c_3c_4-2(c_3+c_4)+1}{120a_6(1-c_6)(c_3-c_5)(c_4-c_5)c_5} \tag{3.14}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
ans\,2 :=\ & 2a_5(c_5-1)\{b_{32}a_4c_2(c_4-c_5)(c_4-1)\\
&-b_{54}a_5c_3(c_5-c_6)(c_5-1)\}\\
&-2a_6c_3(c_6-1)\{b_{64}a_5(c_5-c_6)(c_5-1)\\
&-b_{65}a_4(c_4-c_6)(c_4-1)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bc :=\ & -2b_{32}\Big[b_{32}a_3a_5c_2(c_5-1)(c_3-1)(c_3-c_5)\\
&+a_6(c_6-1)\Big\langle b_{64}a_5c_4(c_5-1)(c_5-c_6)\\
&+b_{65}\{a_3c_3(c_3-c_6)(c_3-1)+a_5c_5(c_5-1)(c_5-c_6)\}\\
&-\frac{1}{2}a_5a_6^2(c_5-c_6)(c_5-1)\Big\rangle\Big]
\end{aligned}$$

$bc := bc/ans\,2$

$bb := 2b_{32}a_4a_5c_3(c_4-1)(c_5-1)(c_5-c_6)$

$bb := bb/ans\,2$

$ba := 2b_{32}a_5^2c_3(c_5-1)^2(c_5-c_6)$

$ba := ba/ans\,2$

$$\begin{aligned}
ans\,6 :=\ & 2[a_5(c_5-1)\{b_{32}a_4c_2(c_4-1)(c_4-c_5)\\
&-b_{54}a_5c_3(c_5-1)(c_5-c_6)\}\\
&-a_6(c_6-1)\{b_{64}a_5c_3(c_5-1)(c_5-c_6)\\
&-b_{65}a_4c_3(c_4-1)(c_4-c_6)\}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bk :=\ & 2a_3(c_3-1)\{b_{32}a_4c_2(c_4-1)(c_3-c_4)\\
&+b_{54}a_5c_3(c_5-1)(c_3-c_6)\}\\
&+a_6(c_6-1)[2b_{64}\{a_3c_3(c_3-c_6)(c_3-1)\\
&+a_4c_4(c_4-c_6)(c_4-1)\}\\
&+2b_{65}a_4a_5(c_4-c_6)(c_4-1)\\
&-a_4c_6^2(c_4-c_6)(c_4-1)]
\end{aligned}$$

$bk := bk\cdot b_{32}/ans\,6$

$bj := 2a_4^2c_3(c_4-1)^2(c_6-c_4)$

$bj := bj\cdot b_{32}/ans\,6$

$bi := -2a_4a_5c_3(c_4-1)(c_5-1)(c_4-c_6)$

$bd := -c_2/c_3$

$be := c_4^2/2c_3$

$bf := -c_2/c_3$

$bh := (c_5^2-2b_{54}c_4)/2c_3$

$tt := 1-bi\cdot bf-bd\cdot bj\cdot ba\cdot bf/(1-bb\cdot bd)$

とおくと，

$$\begin{aligned}
b_{52}=\ & (bi\cdot bh+(bj\cdot bd/(1-bb\cdot bd))\\
&\cdot(ba\cdot bh+bc+bb\cdot be)+bk+bj\cdot be)/\\
&(1-bi\cdot bf-bd\cdot bj\cdot ba\cdot bf/(1-bb\cdot bd))
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$b_{42}=(bb\cdot be+ba\cdot bf\cdot b_{52}+ba\cdot bh+bc)/(1-bd\cdot bb) \tag{3.16}$$

$$b_{43}=bd\cdot b_{42}+be \tag{3.17}$$

$$b_{53}=bf\cdot b_{52}+bh \tag{3.18}$$

となる．また

$$\begin{aligned}
ans\,4 :=\ & a_4a_5a_6(c_6-1)\{c_6^2(c_4-1)(c_5-1)(c_4-c_5)\\
&-2b_{65}c_5(c_5^2-c_5+c_4)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ans\,3 :=\ & 2a_6(c_6-1)[b_{64}a_5(c_5-1)\langle a_3c_3\{c_3(c_5+1)-c_5\}\\
&-a_4c_4(c_4-1)(c_4-c_5)\rangle\\
&+b_{65}a_4\langle a_3c_3(c_3-1)(c_4-1)(c_3-c_4)\\
&-a_5c_4c_5\{c_4(c_5-1)-c_5^2\}\rangle]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ans\,2 :=\ & 2a_5c_3(c_5-1)\{b_{43}a_4^2(c_4-1)^2(c_4-c_5)\\
&+b_{53}a_4a_5(c_4-1)(c_4-c_5)
\end{aligned}$$

$$-b_{54}a_3a_5(c_3-1)(c_5-1)(c_3-c_5)$$
$$-b_{64}a_3a_6c_3^2(c_6-1)\}+ans\,3$$

$$ans\,1:=b_{32}\cdot ans\,2$$

$$tt:=2a_5a_6(c_6-1)[a_4(c_4-1)\{b_{32}c_2(c_5-1)(c_4-c_5)$$
$$+b_{65}c_3(c_6-1)(c_4-c_6)\}$$
$$-c_3(c_5-1)\{b_{54}a_5(c_5-1)(c_5-c_6)$$
$$+b_{64}a_6(c_6-1)(c_5-c_6)\}]$$

とおくと，

$$b_{62}=ans\,1/tt \tag{3.19}$$

同様にして

$$ans\,5:=b_{65}a_4a_6^2(c_6-1)^2[2b_{65}c_5\{c_4(c_6+1)-c_6\}$$
$$+c_6^2(c_4-1)(c_4-c_6)]$$

$$ans\,4:=a_6^2[(c_6-1)^2\{b_{64}a_5(c_5-c_6)(c_5-1)$$
$$\cdot(2b_{65}c_5-c_6^2)-2b_{65}^2a_4c_4^2c_5\}$$
$$-2b_{64}b_{65}c_4a_4\{c_4^2-(c_6+1)(c_6-1)^2c_4$$
$$+c_6(c_6-1)^2\}]+ans\,5$$

$$ans\,3:=a_6[2b_{64}a_6c_4\langle b_{64}a_5(c_6-1)^2(c_5-1)(c_5-c_6)$$
$$-b_{65}a_4c_4^2c_6(c_6-2)\rangle$$
$$-b_{54}a_5^2\langle 2b_{65}c_5\{c_5^3+(c_6-1)(c_6+2)c_5^2$$
$$-(c_6-1)(2c_6+1)c_5+c_6(c_6-1)\}$$
$$+c_6^2(c_6-1)(c_5-1)^2(c_5-c_6)\rangle]+ans\,4$$

$$ans\,2:=2a_6[b_{54}a_5^2\langle b_{64}c_4(c_6-1)\{c_5^3-c_6c_5^2$$
$$+(2c_6+1)c_5-c_6\}+b_{65}c_5^4c_6\rangle$$
$$-b_{32}a_3c_2\langle b_{64}a_5\{(c_5+c_6-1)c_3^2$$
$$+(c_5^2-1)(c_6-1)c_3-(c_5-1)(c_6-1)c_5\}$$
$$+b_{65}a_4(c_3-1)(c_4-1)(c_6-1)(c_3-c_4)\rangle]$$

$$ans\,1:=2b_{32}a_5[b_{64}a_3a_6c_2c_3^2c_5c_6$$
$$+c_2(c_5-1)\langle b_{54}a_3a_5(c_3-1)(c_5-1)(c_3-c_5)$$
$$-b_{53}a_3a_5(c_4-1)(c_5-1)(c_4-c_5)$$
$$-b_{43}a_4^2(c_4-1)^2(c_4-c_5)\rangle]+ans\,2$$

$$tt:=2a_6(c_6-1)[a_4(c_4-1)\{b_{32}a_5c_2(c_5-1)(c_4-c_5)$$
$$+b_{65}a_6c_3(c_6-1)(c_4-c_6)\}-a_5c_3(c_5-1)(c_5-c_6)$$
$$\cdot\{b_{54}a_5(c_5-1)+b_{64}a_6(c_6-1)\}]$$

とおくと，

$$b_{63}=ans\,1/tt \tag{3.20}$$

$$b_{72}=-\frac{a_3b_{32}+a_4b_{42}+a_5b_{52}+a_6b_{62}}{a_7} \tag{3.21}$$

$$b_{73}=\frac{a_3(1-c_3)-(a_4b_{43}+a_5b_{53}+a_6b_{63})}{a_7} \tag{3.22}$$

$$b_{74}=\frac{a_4(1-c_4)-(a_5b_{54}+a_6b_{64})}{a_7} \tag{3.23}$$

$$b_{75}=\frac{a_5(1-c_5)-a_6b_{65}}{a_7} \tag{3.24}$$

$$b_{76}=\frac{a_6(1-c_6)}{a_7} \tag{3.25}$$

$$b_{41}=c_4-(b_{42}+b_{43}) \tag{3.26}$$

$$b_{51}=c_5-(b_{52}+b_{53}+b_{54}) \tag{3.27}$$

$$b_{61}=c_6-(b_{62}+b_{63}+b_{64}+b_{65}) \tag{3.28}$$

$$b_{71}=c_7-(b_{72}+b_{73}+b_{74}+b_{75}+b_{76}) \tag{3.29}$$

となる．

自由パラメータ c_2, c_3, c_5 および c_6 を，(3.0)〜(3.29)のすべての分母を零にしないように任意に選び，式の番号順にそれらの式を逐次計算するとすべての係数が得られる．このように決定された係数に対して，7段数陽的 Runge-Kutta 法(2.2)は6次の打ち切り精度をもつ．

4. 公式の実例と考察

Butcher による次の2公式[1] および Lawson の公式[3] の係数は，3章の解系において自由パラメータ c_2, c_3, c_5 および c_6 を，それぞれ前記の公式のそれらのように特殊化することにより，解系から算出される．ただしこの解系は，c_3, c_4, c_5 および c_6 がすべて異なり，またいずれも0と1に等しくないタイプの公式である．

0							
1	1						
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{12}$				
$-\frac{1}{3}$	$\frac{151}{36}$	$\frac{29}{9}$	$-\frac{7}{4}$	-6			
$\frac{4}{3}$	$-\frac{112}{9}$	$-\frac{116}{9}$	$\frac{32}{3}$	18	-2		
1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{29}{23}$	$\frac{397}{276}$	$\frac{152}{69}$	$-\frac{10}{69}$	$\frac{1}{69}$	
	$\frac{23}{160}$	0	$\frac{29}{80}$	$\frac{29}{80}$	$-\frac{1}{160}$	$-\frac{1}{160}$	$\frac{23}{160}$

0							
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{12}$				
$\frac{5}{6}$	$-\frac{35}{144}$	$-\frac{55}{36}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{15}{8}$			
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{360}$	$-\frac{11}{36}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$		
1	$-\frac{41}{260}$	$\frac{22}{13}$	$\frac{43}{156}$	$-\frac{118}{39}$	$\frac{32}{195}$	$\frac{80}{39}$	
	$\frac{13}{200}$	0	$\frac{11}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{13}{200}$

3章で導出された解系は，完全解ではなく単なる一解系であって，他に多くの可能性が考えられる．しかし，この解系は陽的で多くの自由パラメータを含んでいるので，われわれは解系の表す公式群の中から好ましい特性を有する公式を導出するのに，この自由度を活用することができる．実際われわれは，この解系から既知公式よりも特性のすぐれたいくつかの公式を得た．これについては，本論文の姉妹編“7段数6次陽的 Runge-Kutta 法の最適化”に譲る．

謝辞 有益な助言をいただいた山梨大田口東助教授，何かとご協力をいただいた山下茂技官に感謝する．

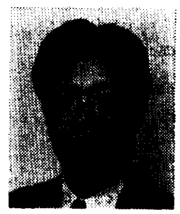
参考文献

1) Butcher, J. C.: On Runge-Kutta Processes of High Order, *J. Austral. Math. Soc.*, Vol. 4, pp. 179-194 (1964).
2) Butcher, J. C.: *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons (1987).
3) Lawson, J. D.: An Order Six Runge-Kutta Process with Extended Region of Stability, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 4, pp. 620-625 (1967).

(平成3年10月11日受付)
(平成4年 4 月 9 日採録)

田中　正次（正会員）

1927年生．1957年東北大学理学部数学科卒業．1961年同大学大学院理学研究科修士課程修了．同年富士電機(株)に入社．1962年同社を退社し，山梨大学講師となる．現在は同大学電子情報工学科教授．工学博士．専門は数値解析，主として常微分方程式の数値解法とその応用に関する研究に携わる．日本数学会，日本応用数理学会各会員．



高山　尚文（正会員）

1962年生．1985年山梨大学工学部計算機科学科卒業．1987年同大学工学研究科修士課程修了．同年(株)オギノ入社，POS システム，業務システムの開発に従事．1992年(有)シンク情報システム設立．現在，同社代表取締役．数値解析，オペレーションズリサーチ，応用ソフトウェアの研究開発に従事．日本オペレーションズリサーチ学会会員．