Vol.2015-AL-155 No.10
2015/11/20

頂点被覆数が小さいグラフの最適消去木の計算について

小林 靖明[1,a)]　玉木 久夫[2]

概要：無向グラフの消去木の概念は疎行列の分解に対して応用を持つだけでなく，いくつかのグラフ不変量と関係を持つ重要な概念である．無向グラフ G の最適な消去木とは，高さが最小の G の消去木のことであり，一般のグラフにおいて最適な消去木を求める問題は NP 困難である．本稿では，G の頂点被覆数がパラメータとして与えられたときに，最適な消去木を求める問題に対する，多項式サイズのカーネル化と固定パラメータアルゴリズムを与える．

1. はじめに

連結な無向グラフ G の**消去木**（*elimination tree*）とは，頂点集合を $V(G)$ として持つ根付き木で，以下のように再帰的に定義される：

(1) G が孤立点 1 頂点からなる場合，それ自身が G の消去木である．

(2) そうでない場合, 任意の $v \in V(G)$ において, G から v を削除したグラフの各連結成分の消去木を $T_1, T_2, \dots, T_t$ としたとき，v を根とし，各 T_i の根と v の間に辺を加えることで得られる根付き木は G の消去木である．

G の**最適な**消去木とは，G の消去木の中で高さが最小のものを指す．

消去木の概念は疎な対称行列 A において，線形方程式系 $Ax = b$ を Cholesky 分解を用いて解く際に重要な役割を果たしたり [24]，VLSI レイアウト [23], [29] やスケジューリング問題 [26] に対しても応用を持つことが知られている．また，様々なグラフの不変量と密接に関係があることが知られている．例えば，グラフの最適な消去木の高さは，そのグラフの**木深度**（*tree-depth*）[25] や**頂点ランキング数**（*vertex ranking number*）[4] と等価であることが知られている．さらにグラフの木深度は**木幅**（*treewidth*）や**パス幅**（*pathwidth*）[3] といった重要なグラフの不変量と関係が深いことが知られている．具体的には，グラフ G の木幅を $\mathrm{tw}(G)$，パス幅を $\mathrm{pw}(G)$，木深度を $\mathrm{td}(G)$ とすると，$\mathrm{tw}(G) \le \mathrm{pw}(G) \le \mathrm{td}(G) - 1$ の関係が成り立つ [5]．これら 3 つの不変量が定数であるようなグラフにおいては，様々なグラフ上の NP 困難な問題を多項式時間で解くことができる [3]．さらに正確には，与えられたグラフの木幅/パス幅/木深度がパラメータ k 以下であるとすると，ハミルトン閉路問題や最大独立点集合問題といった問題が**固定パラメータ容易**（*fixed parameter tractable*）である，つまりこれらの問題を解く $f(k)n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムが存在する．ここで n はグラフの頂点数であり，f は k にのみ依存するような関数であるとする．このような計算時間のアルゴリズムを**固定パラメータアルゴリズム**（*fixed parameter algorithm*）と呼ぶ．その一方で，Gutin ら [20] は木幅やパス幅をパラメータとしたとき，混合中国人郵便配達問題（mixed chinese postman problem）が，ある仮定の下で，固定パラメータ容易ではないことを示し，木深度をパラメータとすれば固定パラメータ容易であることを示した．また，木深度はグラフ上のゲームによる特徴付けも知られている [19]．

一般に高さが最小の消去木を求める問題は NP 困難であり [27]，グラフクラスを 2 部グラフ [4] や弦グラフ [12] に限っても NP 困難である．その一方で，いくつかのグラフクラスにおいては多項式時間アルゴリズムが知られている [2], [11]．また，この問題はパラメータ化計算量理論の観点からも研究されている．与えられたグラフの木深度がパラメータ k 以下であるかを判定する問題を考える．木深度はグラフのマイナー操作に関して単調な不変量であるので，Robertson と Seymour のグラフマイナー理論の結果より，この問題は固定パラメータ容易である．Reidl ら [28] は，この問題に対する $2^{O(k^2)}n$ 時間アルゴリズムを与えた．実際には，このアルゴリズムは，グラフをそのグラフの幅 t の木分解が与えられたとき，$2^{O(kt)}n$ 時間でこの問題を解く．

いくつかの困難な問題に対しては，与えられるグラフの

1　学習院大学
Gakushuin University
2　明治大学
Meiji University
a)　yasuaki.kobayashi@gakushuin.ac.jp

頂点被覆数が小さい場合に，よりシンプルで高速なアルゴリズムが設計可能な場合がある [1], [15]．特に，グラフ G の木幅やパス幅を求める問題は，$3^{\tau(G)}n^{O(1)}$ 時間で解くことができる [10], [22]．ここで $\tau(G)$ は G の頂点被覆数とする．さらには，$\mathrm{tw}(G) \le k$ と $\mathrm{tw}(H) \le k$（$\mathrm{pw}(G) \le k$ と $\mathrm{pw}(H) \le k$）が等価であるようなグラフ H で，その頂点数が $O(\tau(G)^3)$ であるようなものを求める多項式時間アルゴリズム，つまり多項式サイズの**カーネル化**（*kernelization*）が存在することが知られている [6], [7]（その一方で，カット幅については $2^{\tau(G)}n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムが存在するものの，$NP \subseteq coNP/poly$ でない限り多項式サイズのカーネル化が存在しないことが知られている [9]）．このような結果は最適な消去木（木深度）に関しては，我々の知る限りでは，これまでに知られていなかった。

本稿では以下を与える．

定理 1. n 頂点グラフが与えられたとき，$4^{\tau(G)}n^{O(1)}$ 時間で最適な消去木が計算可能である．ここで，$\tau(G)$ は与えられたグラフの頂点被覆数である．

定理 2. 無向グラフ G，G の頂点被覆 C，正整数 k が与えられたとき，$\mathrm{td}(G) \le k$ と $\mathrm{td}(H) \le k$ が等価であるような H でその頂点数が $O(|C|^3)$ であるようなものを求める多項式時間アルゴリズムが存在する．

この節の残りでは，本稿の構成を示す．次節では，本稿で用いる概念と記法を示す．3 節では，定理 3 を証明し，4 節では，定理 4 を与え，最後の節で本稿をまとめと未解決問題について述べる．

2. 準備

G を無向単純グラフとする．G の頂点集合を $V(G)$，辺集合を $E(G)$ で表す．G の頂点数を n で表す．頂点 $v \in V(G)$ において，$N_G(v)$ で v の隣接点集合を表し，頂点部分集合 $X \subseteq V(G)$ において，$N_G(X) = \bigcup_{v \in X} N_G(v) \setminus X$ とする．G が文脈より明らかな場合は，単に $N(v)$，$N(X)$ と記述する場合がある．頂点集合 $X \subseteq V(G)$ によって誘導される部分グラフを $G[X]$ と書く．ふたつのグラフ G と H において，$H \subseteq G$ は H が G の部分グラフであることを意味する．

T を根付き木とする．$r(T)$ で T の根を表す．T の頂点 v において，T_v で v を根とする T の部分木を表す．また，P_v を $r(T)$ と v の間のユニークなパスと定義する．ある頂点が T の**分岐点**であるとは，その頂点が T において 2 つ以上の子を持つことをいう．2 つの頂点 $u, v \in V(T)$ において，$u \in V(P_v)$ を満たすとき，u は v の**先祖**であるといい，v は u の**子孫**であるという．互いに素な根付き木の集合を**根付き森**と呼ぶ．T における v の**深さ**とは P_v の頂点数と定義する．T の**高さ**を T に含まれる頂点の最大の深さとし，根付き森 F の高さをその森に含まれる根付き木の最大の高さとする．根付き木 T および根付き森 F の高さをそれぞれ $\mathrm{height}(T)$，$\mathrm{height}(F)$ で表す．

F を根付き森でとする．F の**閉包**（*closure*）とは，頂点集合を $V(F)$ に持つグラフで，そのグラフに辺 $\{u, v\}$ があることと，u が F において v の先祖であることが等価であるようなもののことである．F の閉包を $\mathrm{clos}(F)$ で表す．特に，F が単一の根付き木 T からなる場合は，$\mathrm{clos}(\{T\})$ の代わりに $\mathrm{clos}(T)$ と書く．連結とは限らない無向グラフ G の**木深度**（*tree-depth*）とは最小の非負整数 k で $G \subseteq \mathrm{clos}(F)$ かつ $\mathrm{height}(F) = k$ であるような F が存在する場合をいう．G の木深度を $\mathrm{td}(G)$ で表す．以下の命題はグラフが連結な場合の消去木と木深度の関係を示す．

命題 1 ([25])**.** G を連結なグラフとする．このとき，T が G の消去木であることと，$G \subseteq \mathrm{clos}(T)$ は等価である．特に，G の最適な消去木の高さは $\mathrm{td}(G)$ である．

本論文では，G の消去木 T について述べるとき，特に断ることなく $G \subseteq \mathrm{clos}(T)$ であることを用い，またその逆もあることに注意する．

3. カーネル化

この節では，頂点被覆数をパラメータとしたときの，最適消去木を求める問題に対する多項式カーネル化を与える．本節で使うテクニックは，木幅の場合 [7] やパス幅の場合 [6] のカーネル化の方法とほぼ同じではあるが，とグラフの変更ルールや解析方法がいくらか異なる．

本節では与えられるグラフ G が連結であると仮定する（そうでない場合も，標準的な議論を用いて同様の結果を導くことができる）．G の頂点被覆 C を固定し，$I = V(G) \setminus C$ とする．k を正整数とする．本節の残りでは，$\mathrm{td}(G) \le k$ であるかを判定する問題を考える．

補題 1. $\mathrm{td}(G) \le k$ とする．u と v を G の互いに隣接しない任意の（異なる）2 頂点で，$|N_G(u) \cap N_G(v)| \ge k$ を満たすとする．このとき，G' を G に辺 $\{u, v\}$ を加えたグラフとすると，$\mathrm{td}(G) = \mathrm{td}(G')$ を満たす．

証明. G は G' の部分グラフであるので，明らかに $\mathrm{td}(G) \le \mathrm{td}(G')$ である．逆向きの不等式を示すために，T を G の最適な消去木とする．もし T_v と T_u が互いに素でないとき，T は G の消去木でもあるので，$\mathrm{td}(G) \ge \mathrm{td}(G')$ である．ここで，そうでないと仮定する．この仮定より $N_G(u) \cap N_G(v)$ の頂点は T において u と v の共通先祖である．これは $height(T) \le k$ と $|N_G(u) \cap N_G(v)| \ge k$ であることに反する． □

この補題は以下のルールが最適解に影響を与えないことを示している．

ルール 1. u と v を G の互いに隣接しない任意の（異なる）

2 頂点で，$|N(u) \cap N(v)| \geq k$ を満たすとする．$u \in C$ または $v \in C$ の少なくとも一方を満たすとき，G に辺 $\{u, v\}$ を加える．

次の観察は閉包の定義より明らかである．

観察 1. K を G のクリークとし，T を G の消去木とする．このとき，ある $v \in K$ で $K \subseteq V(P_v)$ を満たすものが存在する．

頂点 v の隣接点集合が G においてクリークを成すとき，v を G の**単体的頂点**（*simplicial vertex*）と呼ぶ．

補題 2. $\mathrm{td}(G) \leq k$ とする．$u \in I$ を G の単体的頂点とし，u の各隣接点 $v \in N(u)$ が u と異なる隣接点を k 個以上持つとする．このとき $\mathrm{td}(G) = \mathrm{td}(G[V(G) \setminus \{u\}])$ である．

証明. 部分グラフの関係より，明らかに $\mathrm{td}(G) \geq \mathrm{td}(G[V(G) \setminus \{u\}])$ である．よって以下では逆向きの不等式を示す．T を $G[V(G) \setminus \{u\}]$ の最適な消去木とする．$N(u)$ は $G[V(G) \setminus \{u\}]$ においてクリークを成すため，観察 1 より，$v \in N(u)$ で $N(u) \subseteq V(P_v)$ であるものが存在する．補題の仮定から v は u と異なる隣接点を k 個以上持つため，$\mathrm{height}(T) \leq k$ より，そのうちのひとつは v の子孫になる．よって v は T において葉ではないことがわかる．T に対して u を v の子として加えた根付き木を T' すると，$N(u) \subseteq V(P_v)$ より，$G \subseteq \mathrm{clos}(T')$ である．また，$\mathrm{height}(T) = \mathrm{height}(T')$ のため，$\mathrm{td}(G) \leq \mathrm{td}(G[V(G) \setminus \{u\}])$ を得る． □

ルール 2. $u \in I$ を G の単体的頂点とし，u の各隣接点 $v \in N(u)$ が u と異なる隣接点を k 個以上持つとする．このとき u を G から削除する．

補題 3. G が $\mathrm{td}(G) \leq k$，$|C| \geq k$ を満たし，ルール 1 と 2 のいずれも適用できないグラフとする．このとき，G の頂点数は $O(|C|^3)$．

証明. S を G の単体的頂点の集合とし，$P = S \cap I, Q = I \setminus P$ とする．各 $v \in C$ において，ルール 2 より高々 k 個の隣接点を除いて，G の単体的頂点で v に隣接するものは削除される．よって $|P| \leq k \cdot |C| \leq |C|^2$ である．また，C の隣接しない異なる 2 点 u, v を考えたとき，u, v は高々 $k-1$ 頂点のみ隣接点を共有し得る．これは，ルール 1 より導くことができる．よって $|Q| \leq (k-1) \cdot |C|/(|C|-1)/2 \leq |C|^3/2$. つまり，$|V(G)| = |C| + |P| + |Q| \leq 3|C|^3$ を得る． □

$\mathrm{td}(G) \leq k$ であるかを判定する問題を考える．このとき，そのインスタンスを (G, k) の組で表す．$|C| < k$ ならば，明らかに (G, k) は YES インスタンスである．この場合には，自明な定数サイズの YES インスタンスを出力する．以下では $|C| \geq k$ の場合を考える．G に対し，ルール 1 と 2 をどちらのルールも適用できなくなるまで繰り返し適用し，得られるグラフを H とする．このとき，補題 1 と 2 より，$\mathrm{td}(G) = \mathrm{td}(H)$ である．また，H において $V(H) \cap C$ は頂点被覆であることに注意する．補題 3 より，$V(H) > 3|V(H) \cap C|^3$ であれば，(G, k) は NO インスタンスであるので，自明な定数サイズの NO インスタンスを出力する．よって，$O(|C|^3)$ カーネルが得られる．

4. 固定パラメータアルゴリズム

本節の目的は，グラフ G の最適な消去木を求める $4^{\tau(G)} n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムを与えることである．以下の命題は与えられたグラフの頂点被覆を求めるために用いる．

命題 2 ([8])**.** 与えられたグラフ G の最小の頂点被覆は $1.28^{\tau(G)} n^{O(1)}$ 時間で計算可能である．

以降では G の頂点被覆 C を固定し，$I = V(G) \setminus C$ とする．$X \subseteq C$ において，$I(X) = \{v \in I \mid N(v) \subseteq X\}$ とする．

空でない $X \subseteq C$ と（非空とは限らない）$P \subseteq C \setminus X$ において，根付き森 F が (X, P) に**適合する**とは以下の 3 つの条件を満たすことをいう．

C1 各 $T \in F$ において T は $G[V(T)]$ の消去木である，
C2 $\bigcup_{T \in F} V(T) \cap C = X$,
C3 $\bigcup_{T \in F} V(T) = X \cup I(X \cup P)$.

特に，F が単一の根付き木 T からなるとき，T が (X, P) に適合するという．(X, P) に適合する根付き森の中で最小の高さを $\mathrm{td}(X, P)$ で表す．定義より $\mathrm{td}(G) = \mathrm{td}(C, \emptyset)$ であることに注意する．

(X, P) に適合する根付き森および $\mathrm{td}(X, P)$ の値は以下のように解釈することができる．G の消去木 T が**コンパクト**であるとは，任意の $v \in V(G)$ において T_v が $G[V(T_v)]$ の最適な消去木になっていることである．消去木の定義より，任意の連結グラフはコンパクトな消去木を持つことがわかる．ここで，T を G のコンパクトな消去木とする．このとき，任意の $v \in V(G)$ において，T_v は $(V(T_v) \cap C, (V(P_v) \setminus \{v\}) \cap C)$ に適合する．また，$\mathrm{height}(T_v)$ は $\mathrm{td}(V(T_v) \cap C, (V(P_v) \setminus \{v\}) \cap C)$ と一致する．さらに，$v \in I$ である場合には，T_v から v を削除して得られる根付き森を F とすると，F は同じく $(V(T_v) \cap C, (V(P_v) \setminus \{v\}) \cap C)$ に適合し，その高さは $\mathrm{td}(V(T_v) \cap C, (V(P_v) \setminus \{v\}) \cap C) + 1$ である．

これらの性質を利用することで，以下では，$\mathrm{td}(X, P)$ を計算するための再帰式を定義する．提案するアルゴリズムは，その再帰式を動的計画法を用いて計算する．以下の補題は，再帰式の基底を与える．

補題 4. $x \in C$ と $P \subseteq C \setminus \{x\}$ において，x と隣接するような $v \in I(P \cup \{x\})$ が存在するならば $\mathrm{td}(\{x\}, P) = 2$ であり，そうでないならば $\mathrm{td}(\{x\}, P) = 1$ である．

証明. $\{x\}$ は $G[I(P \cup \{x\}) \cup \{x\}]$ の頂点被覆なので，$G[I(P \cup \{x\}) \cup \{x\}]$ の各連結成分は，孤立点であるか，$\{x\}$ を内部頂点とする星グラフである．x と隣接するような $v \in I(P \cup \{x\})$ が存在するならば，x と v を含む星グラフが連結成分にあるので，$\mathrm{td}(\{x\}, P) = 2$ であり，そうでないならば，$G[I(P \cup \{x\}) \cup \{x\}]$ は孤立点の集合からなるため $\mathrm{td}(\{x\}, P) = 1$ である． □

以下では，一般の場合（$|X| > 1$）の $\mathrm{td}(X, P)$ に対する再帰式を定義する．

補題 5. $X \subseteq V(G)$ が $|X| > 1$ を満たすとする．任意の頂点 $x \in X$ を選び，F を $(X \setminus \{x\}, P \cup \{x\})$ に適合する根付き森とする．根付き木 T を $r(T) = x$ で，F に含まれる各根付き木の根と x の間に辺を加えることで得られるものとする．このとき，T は (X, P) に適合する．

証明. 明らかに，T は (X, P) に対する条件 C2 と C3 を満たす．x が T の根であることにより，$N_{G[V(T)]}(x)$ に含まれる頂点は x の子孫である．よって (X, P) に対する条件 C1 も満たす． □

集合 X の 2 分割 (Y, Z) が**非自明**であるとは，$Y \neq \emptyset$ かつ $Z \neq \emptyset$ を満たすときである．

補題 6. $X \subseteq V(G)$ が $|X| > 1$ を満たすとする．(Y, Z) を X の非自明な 2 分割とし，F_Y と F_Z をそれぞれ (Y, P), (Z, P) に適合する根付き森とする．$N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ が空でないと仮定し，Q を $V(Q) = N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ を満たし，両端点を v_r, v_l（$|V(Q)| = 1$ の場合 $v_r = v_l$ であることを許す）であるような任意のパスであるとする．根付き木 T を $V(T) = V(Q) \cup \bigcup_{T' \in F_Y \cup F_Z} V(T')$, $r(T) = v_r$ で，各 $T' \in F_Y \cup F_Z$ について辺 $\{v_l, r(T')\}$ を加えることで得られるものとする．このとき T は (X, P) に適合する．また，$N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ が空である場合，$F_Y \cup F_Z$ が (X, P) に適合する．

証明. まず $I(X \cap P) \setminus (I(Y \cup P) \cup I(Z \cup P)) = N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ であることから証明する．$I(X \cup P) \setminus (I(Y \cup P) \cup I(Z \cup P))$ に含まれる頂点は Y と Z のいずれにも隣接点を持つので，左辺の集合は右辺の集合の部分集合である．逆に，$N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ に含まれる頂点は Y と Z の両方に隣接点を持つため，$I(Y \cup P)$ と $I(Z \cup P)$ のどちらにも含まれることは無い．よって，$I(X \cup P) \setminus (I(Y \cup P) \cup I(Z \cup P)) = N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ を得る．

上で示した事実を用いて補題を証明する．まず $N_G(Y) \cap N_G(Z) \cap I(X \cup P)$ が空でない場合について考える．Q と T を補題で述べたものとする．T は明らかに $(X \cup P)$ に対する条件 C2 を満たす．上で示した事実より，$V(Q) = I(X \cup P) \setminus (I(Y \cup P) \cup I(Z \cup P))$ が得られ，さらに $\bigcup_{T' \in F_Y} V(T') \cap I = I(Y \cup P), \bigcup_{T' \in F_Z} V(T') \cap I = I(Z \cup P)$ より条件 C3 が得られる．また，各 $v \in V(Q)$ において，v とは異なる $G[X \cup I(X \cup P)]$ の任意の頂点は，T において v の祖先か子孫のいずれかであるため，条件 C1 を満たすため，補題の前半部分が得られる．

$N_G(Y) \cap N_G(Z) \cap I(X \cup P)$ が空である場合も，上で示した事実より，$I(X \cup P) = I(Y \cup P) \cup I(Z \cup P)$ であることから，補題を導くことができる． □

T を (X, P) に適合する根付き木とし，$v \in V(T)$ を T の分岐点で深さが最小のものとする．ここで，v は（存在すれば）ユニークに決まることに注意する．T において P_v の頂点同士の位置を任意に入れ替えても，得られる根付き木 T' が (X, P) に適合することがわかる．この観察は次のように記述することができる．

観察 2. T を (X, P) に適合する根付き木で，少なくともひとつの分岐点を持つとし，v を T において深さ最小の分岐点とする．このとき $V(P_v) \cap X \neq \emptyset$ ならば，根が X に含まれる根付き木 T' で (X, P) に適合し $\mathrm{height}(T') = \mathrm{height}(T)$ であるようなものが存在する．

Deogun ら [11] は，極小切断 (minimal separator) の概念を用いて，いくつかのグラフクラスに対してランキング数を求める多項式時間アルゴリズムを与えた．次の命題は，その多項式時間アルゴリズムの中で鍵となるアイデアを我々の目的のために言い換えたものである．

命題 3 ([11])**.** G を完全グラフではない連結なグラフとする．このとき，G の最適な消去木 T で，T の深さ最小の分岐点 v において任意の $u \in V(P_v)$ と任意の v の子 w が $N(u) \cap V(T_w) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する．

観察 2 と命題 3 を用いて次の補題を示す．

補題 7. $G[X \cup I(X \cup P)]$ が連結で完全グラフではないと仮定する．さらに (X, P) に適合し，その高さが $\mathrm{td}(X, P)$ であるような根付き木が少なくともひとつ存在すると仮定する．このとき，(X, P) に適合する根付き木 T で次の (1), (2) のいずれかを満たし $\mathrm{height}(T) = \mathrm{td}(X, P)$ であるようなものが存在する: (1)T の根が X に含まれる，または (2)X の非自明な 2 分割 (Y, Z) に関して $V(P_v) = N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$．ここで，$v$ は T における深さ最小の分岐点である．

証明. T を命題 3 で主張する $G[X \cup I(X \cup P)]$ の消去木とする．その高さが $\mathrm{td}(X, P)$ であるような根付き木 T で (X, P) に適合するものが少なくともひとつ存在するという仮定より，$\mathrm{height}(T) = \mathrm{td}(X, P)$ である．観察 2 より，T の根は X に含まれるか，T の深さ最小の分岐点 v において $V(P_v) \subseteq I(X \cup P)$ であると仮定できるため，ここでは後者であると仮定する．W を T における v の子の集合であるとすると，命題 3 より，$w \in W$ において，

$V(T_w)$ が X の頂点を少なくともひとつ以上もつことがわかる．ここで，W' を W の空でない真部分集合とし，$Y = \bigcup_{w \in W'} V(T_w) \cap X$，$Z = \bigcup_{w \in W \setminus W'} V(T_w) \cap X$ とすると，(Y, Z) は X の非自明な 2 分割である．命題 3 より，$V(P_v)$ の頂点は Y と Z のいずれにも隣接点を持つため，$V(P_v) \subseteq N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ が導かれる．次に $N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ の頂点は，補題 6 と同様の議論により，$I(X \cup P) \setminus (I(Y \cup P) \cup I(Z \cup P))$ にも含まれるため，$I(X \cup P) \setminus (I(Y \cup P) \cup I(Z \cup P)) = V(P_v)$ より，$N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P) \subseteq V(P_v)$ が導かれる．これらにより補題が得られる． □

補題 8. $X \subseteq C$ で $|X| > 1$ とし，$P \subseteq C \setminus X$ とする．このとき，$\mathrm{td}(X, P)$ は

$$\min_{x \in X} \mathrm{td}(X \setminus \{x\}, P \cup \{x\}) + 1 \tag{1}$$

と

$$\min_{Y, Z \subseteq X} \max(\mathrm{td}(Y, P), \mathrm{td}(Z, P)) + |N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)| \tag{2}$$

のうち，小さい方の値と一致する．ただし，(2) 式の min は X の非自明な 2 分割 (Y, Z) で $E(Y, Z) = \emptyset$ であるものの中で最小値を選ぶとする．

証明. まず，$\mathrm{td}(X, P)$ が式 (1) と式 (2) の値いずれよりも大きくならないことを証明する．最初に式 (1) の値が式 (2) の値よりも小さい場合を考える。$x \in X$ を式 (1) を最小化する頂点とし，F を $(X \setminus \{x\}, P \cup \{x\})$ に適合する根付き森とする．補題 5 より，根付き木 T を $r(T) = x$ で，F に含まれる各根付き木の根と x の間に辺を加えて得られるものとしたとき，T は (X, P) 適合する．よって，$\mathrm{td}(X, P) \leq \mathrm{td}(X \setminus \{x\}, P \cup \{x\}) + 1$ が得られる．次に式 (1) の値が式 (2) の値以上である場合を考える．(Y, Z) を式 (2) を最小化するような X の非自明な 2 分割とする．F_Y と F_Z をそれぞれ (Y, P) と (Z, P) に適合する根付き森とし，F を補題 6 によって得られる根付き森とする（$N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)$ が非空であるときは，$F = \{T\}$ とする）．このとき F は (X, P) に適合するため，$\mathrm{td}(X, P) \leq \max(\mathrm{td}(Y, P), \mathrm{td}(X, P)) + |N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P)|$ が得られる．

次に逆向きの大小関係を証明する．F を (X, P) に適合する根付き森で，$\mathrm{height}(F) = \mathrm{td}(X, P)$ を満たし，さらに要素数 $|F|$ が最大のものとする．ここで，$G[X \cup I(X \cup P)]$ が非連結である場合，F は 2 つ以上の根付き木からなることに注意する．$G[X \cup I(X \cup P)]$ が完全グラフである場合は，任意の $x \in X$ に関して $\mathrm{td}(X, P) = \mathrm{td}(X \setminus \{x\}, P \cup \{x\}) + 1$ であるため，以降では $G[X \cup I(X \cup P)]$ が完全グラフでない場合を考える．

まず，F が単一の根付き木 T からなる場合を考える．$G[X \cup I(X \cup P)]$ が連結であるため，補題 7 より，T の根が X に含まれるか，X の非自明な 2 分割 (Y, Z) において，$V(P_v) = N_G(Y) \cap N_G(Z) \cap I(X \cup P)$ のいずれかを満たす．ここで v は T の深さ最小の分岐点とする．もし T の根が $x \in X$ であるとき，T から x を削除することで得られる根付き森は $(X \setminus \{x\}, P \cup \{x\})$ に適合する．T の根が X に含まれない場合，X の非自明な 2 分割 (Y, Z) において，$V(P_v) = N_G(Y) \cap N_G(Z) \cap I(X \cup P)$ を満たすので，T から $V(P_v)$ の頂点すべてを削除して得られる根付き森を F' とすると，$F_Y = \{T' \in F' \mid V(T') \cap Y \neq \emptyset\}$ と $F_Z = \{T' \in F' \mid V(T') \cap Z \neq \emptyset\}$ はそれぞれ (Y, P) と (Z, P) に適合する．よってこれらの事実より，$\mathrm{td}(X, P)$ は式 (1) の値と式 (2) の値いずれよりも小さくはないことがわかる．

次に F が 2 つ以上の根付き木からなる場合を考える．ここで，F が $X \subseteq V(T)$ を満たす根付き木 T を含む場合，F が単一の根付き木からなる場合と同様の議論が適用できるため，以下では F に含まれる根付き木 T で，$X \cap V(T) \neq \emptyset$ かつ $X \setminus V(T) \neq \emptyset$ を満たすものが存在すると仮定する．$Y = V(T) \cap X$，$Z = X \setminus Y$ と定義する．F は (X, P) に適合するため，$N(Y) \cap N(Z) \cap I(X \cup P) = \emptyset$ かつ T と $F \setminus \{T\}$ はそれぞれ (Y, P) と (Z, P) に適合する．したがって，この場合においても $\mathrm{td}(X, P)$ は式 (2) の値よりも小さくならないことがわかる．よって補題が得られる． □

補題 4，8 により，非空な $X \subseteq C$ と（非空とは限らない）$P \subseteq C \setminus X$ において，$\mathrm{td}(X, P)$ を動的計画法を用いて計算する．$\mathrm{td}(X, P)$ の値は，$X' \subset X$ と $P' \subseteq C \setminus X'$ における $\mathrm{td}(X', P')$ の値が表にあれば，$O(2^{|X|})n^{O(1)}$ 時間で計算可能である．よって，$\mathrm{td}(G) = \mathrm{td}(C, \emptyset)$ は，

$$\sum_{X \subseteq C} \sum_{P \subseteq C \setminus X} 2^{|X|} n^{O(1)} \leq 4^{|C|} n^{O(1)}$$

時間で計算可能である．

5. まとめ

本稿では，n 頂点グラフが与えられたとき，最適消去木を求める問題に対する $O(\tau(G)^3)$ 頂点カーネル化と $4^{\tau(G)} n^{O(1)}$ 時間固定パラメータアルゴリズムを与えた．Chapelle ら [10] は木幅やパス幅を求める問題に対して，$3^{\tau(G)} n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムを与えており，提案アルゴリズムの実行時間の 4 を 3 に改善できると期待できるが，未解決である．無向グラフの消去木の概念は有向グラフへ一般化されており（閉路ランク（cycle rank）[13], [14] などがその一例である），本結果を有向グラフに拡張できるかも今後考えていきたい．最後に，Fomin ら [16] は最適消去木を求める $O(1.9602^n)$ 時間アルゴリズムを与えた．これは，木幅 [17], [18] やパス幅 [21] を求める指数時間厳密アルゴリズムに比べると，幾

分実行時間が大きい結果である．この結果を改善できるかは，興味深い問題であろう．

参考文献

[1] F.N. Abu-Khzam: Maximum common induced subgraph parameterized by vertex cover. Information Processing Letters 114(3), 99–103 (2014).

[2] B. Aspvall, P. Heggernes: Finding Minimum Height Elimination Trees for Interval Graphs in Polynomial Time. BIT Numerical Mathematics 34(4), 484–509 (1994).

[3] H.L. Bodlaender: A tourist guide through treewidth. Acta Cybernetica 11, 1–23 (1993).

[4] H.L. Bodlaender, J.S. Deogun, K. Jansen, T. Kloks, D. Kratsch, H. Müller, Z. Tuza: Rankings of graphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics 11(1), 168–181 (1998)

[5] H.L. Bodlaender, J.R. Gilbert, H. Hafsteinsson, T. Kloks: Approximating Treewidth, Pathwidth, Frontsize, and Shortest Elimination Tree. Journal of Algorithms 18(2), 238–255 (1995).

[6] H.L. Bodlaender, B.M.P. Jansen, S. Kratsch: Kernel Bounds for Structural Parameterizations of Pathwidth. In: Proc. of SWAT 2012, pp.352–363 (2012).

[7] H.L. Bodlaender, B.M.P. Jansen, S. Kratsch: Preprocessing for Treewidth: A Combinatorial Analysis through Kernelization. SIAM J. Discrete Math. 27(4), 2108–2142 (2013).

[8] J. Chen, I.A. Kanj, G. Xia: Improved upper bounds for vertex cover. Theoretical Computer Science 411(40-42), 3736–3756 (2010).

[9] M. Cygan, D. Lokshtanov, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, S. Saurabh: On cutwidth parameterized by vertex cover. Algorithmica 68(4), 940–953 (2014).

[10] M. Chapelle, M. Liedloff, L. Todinca, Y. Villanger: Treewidth and Pathwidth parameterized by the vertex cover number. Discrete Applied Mathematics, In Press (2015).

[11] J.S. Deogun, T. Kloks, D. Kratsch, H. Müller: On the vertex ranking problem for trapezoid, circular-arc and other graphs. Discrete Applied Math. 98, 39–63 (1999).

[12] D. Dereniowski, A. Nadolski: Vertex rankings of chordal graphs and weighted trees. Information Processing Letters 98(3), 96–100 (2006).

[13] L.C. Eggan: Transition graphs and the star-height of regular events. Michigan Mathematical Journal 10(4), 385–397 (1963).

[14] S.C. Eisenstat, J.W.H. Liu: The Theory of Elimination Trees for Sparse Unsymmetric Matrices. SIAM Journal on Matrix Analysis 26(3), 686–705 (2006).

[15] M.R. Fellows, D. Lokshtanov, N. Misra, F.A. Rosamond, S.Saurabh: Graph Layout Problems Parameterized by Vertex Cover. In: Proc. of ISAAC 2008, pp.294–305 (2008).

[16] F.V. Fomin, A.C. Giannopoulou, M. Pilipczuk: Computing Tree-Depth Faster Than 2^n. Algorithmica 73(1), 202–216 (2015).

[17] F.V. Fomin, D. Kratsch, I. Todinca, Y. Villanger: Exact algorithms for treewidth and minimum fill-in. SIAM Journal on Computing 38(3), 1058–1079 (2008).

[18] F.V. Fomin, Y. Villanger: Treewidth computation and extremal combinatorics. Combinatorica 32(3), 289–308 (2012).

[19] A.C. Giannopoulou, P. Hunter, D.M. Thilikos: LIFO-search: A min-max theorem and a searching game for cycle-rank and tree-depth. Discrete Applied Mathematics 160(15), 2089–2097 (2012).

[20] G. Gutin, M. Jones, M. Wahlström: Structural Parameterizations of the Mixed Chinese Postman Problem. In: Proc. of ESA 2015, pp.668–679 (2015).

[21] K. Kitsunai, Y. Kobayashi, K. Komuro, H. Tamaki, T. Tano: Computing directed pathwidth in $O(1.89^n)$ time. Algorithmica, Accepted (2015).

[22] Y. Kobayashi: Computing the pathwidth of directed graphs with small vertex cover. Information Processing Letters 115(2), 310-312 (2015).

[23] C.E. Leiserson: Area efficient graph layouts for VLSI. In: Proc. of FOCS 1980, pp.270–281 (1980).

[24] J.W.H. Liu: The role of elimination trees in sparse factorization. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 11, 134–172 (1990).

[25] J. Nešetřil, P.O. de Mendez: Tree-depth, subgraph coloring and homomorphism bounds. European Journal of Combinatorics 27(6), 1022–1041 (2006).

[26] J. Nevins, D. Whitney: Concurrent Design of Products and Processes. McGraw-Hill, New York (1989).

[27] A. Pothen: The complexity of optimal elimination trees. Technical Report CS-88-13, Pennsylvania State University (1998).

[28] F. Reidl, P. Rossmanith, F. Sánchez Villaamil, S. Sikdar: A faster parameterized algorithm for treedepth. In: Proc. of ICALP 2014, pp.931–942 (2014).

[29] A. Sen, H. Deng, S. Guha: On a graph partition problem with application to VLSI layout. Information Processing Letters 43(2), 87–94 (1992).