Bessel 関数と Mathieu 関数の逆向き漸化式について

山下 眞一郎[†☆]

良く知られているように，第1種 Bessel 関数 $J_n(x)$ は，漸化式を逆向きに使って計算する．その初期条件も良く知られている．しかし，初期条件は表や簡単な近似式で与えられている．そのために使用方法が限定される恨みがある．本論文は，計算の安定な $Y_n(x)$ の方を計算し，それから $J_n(x)$ を推測し，逆向き漸化式の初期条件を算定する．また，応用として Mathieu 関数のフーリエ級数展開の項数決定を述べる．

Note on the Recurrence Techniques for Bessel function and Its Application to Mathieu Function

SHIN-ICHIRO YAMASHITA[†☆]

As is well known, Bessel function of the first kind, $J_n(x)$, should be calculated by applying its recurrence relation backward for numerical stability, with an appropriate initial condition. One difficulty is that the condition has been given only in a table or as a simple approximation, so it is limited for use. This paper proposes a better way to determime the initial condition, with utilizes $Y_n(x)$ that is more stable and gives an estimation of $J_n(x)$. As its application, the paper presents a method of calculating the Fourier series of Mathieu function.

1. まえがき

第1種 Bessel 関数 $J_n(x)$ の計算は，漸化式を

$$Z_{k+1}=\frac{2k}{x}Z_k-Z_{k-1} \tag{1}$$

$$k=1,2,\cdots$$

Z_0, Z_1 を与える

と順方向に計算すれば不安定であり，逆に，漸化式を逆向きに計算すれば安定であることは良く知られている[2)~4)]．その理由も知られている[1)]．(1)の Z_k は，2次漸化式(1)の特性方程式

$$\lambda^2-\frac{2k}{x}\lambda+1=0 \tag{2}$$

の根 λ_1, λ_2 に対応する2つの数列 $\{F_k(\lambda_1)\}$, $\{G_k(\lambda_2)\}$ の一次結合

$$Z_k=\alpha F_k(\lambda_1)+\beta G_k(\lambda_2) \tag{3}$$

であり，目的の数列は小さな固有値に対応し，大きな固有値に対応するものは不要である．漸化式の性質として，大きな固有値のほうの成分は拡大され，小さな固有値のほうの成分は縮小される．ところが(3)の2つの成分は分離不能であり，本来0であるべき大きな固有値の成分は計算誤差のために，なにがしか残留し，その成分は小さな固有値の成分を圧倒する．これが不安定な理由である．

そこで，安定に計算するために，逆向き漸化式で次のように計算する．

$$F_{k-1}=\frac{2k}{x}F_k-F_{k+1} \tag{4}$$

$$k=M, M-1, M-2, \cdots, 1$$

$$F_{M+1}=0$$

$F_M=\epsilon$：任意の値

$a=F_0+2\sum_{k=1}^{[M/2]}F_{2k}$ （正規化定数）

$$J_k(x)=F_k/a;\ k=0,1,2,\cdots$$

$J_0(x)$ の絶対精度が p 桁以上であるための逆向き漸化式の開始点 M は，表または簡単な区分的近似式で与えられている[2)~4)]．この開始点 M は x に依存するので計算範囲が限定され，少し不便である．

この論文は，逆向き漸化式の開始点 M の簡単な与え方を論じ，その応用として，Mathieu関数に現れるフーリエ展開係数の漸化式に関する，その取るべき項数の決定について述べる．

* 富士通(株)沼津工場 PP 事業部
Program Products Division, Numazu Plant, Fujitsu Limited
☆ 現在 日本大学理工学部
Presently, College of Science and Technology, Nihon University

2. $Y_n(x)$ から $J_n(x)$ を推定する

Bessel 関数の漸化式の一般解は

$$F_n=\alpha J_n(x)+\beta Y_n(x) \tag{5}$$

α, β: 定数

と表せる．漸化式を順方向に計算すれば，β を 0.0 としておいても，計算誤差のために必ず，$\beta\neq 0.0$ となってしまう．xを固定して，$n\to\infty$ とすれば，$|J_n(x)|\ll|Y_n(x)|$ となるから，結局，$Y_n(x)$ を計算することになる．そこで，最初から $Y_n(x)$ を計算し，$J_n(x)$ を推測することを考える．

Lommel の方式

$$J_n(x)Y_{n-1}(x)-J_{n-1}(x)Y_n(x)=\frac{2}{\pi x} \tag{6}$$

から，

$$|xJ_k(x)Y_k(x)|\sim 1: k=0,1,2,\cdots \tag{7}$$

を考え，これを利用する．どの程度成り立つかを見るためにグラフを描く．$x=50.0$，精度 $p=16$ の場合に，k を横軸にとって描けば，**図1**のようになった．一般に，条件に関係なく，おおむね，図のようになる．図1では $n=[x]$ 付近で1.3程度，$n=M$ 付近で，0.2 程度である．$Y_n(x)$ を計算して $J_n(x)$ を推測する時，オーダを狂わすほどの問題ではなく，十分使える．

なお，z を固定して，$k\to\infty$ としたときの漸化式は文献 9) の公式 9.3.1

$$J_k(z)\sim+\sqrt{\frac{1}{2\pi k}}\left(\frac{ez}{2k}\right)^{+k} \tag{8}$$

$$Y_k(z)\sim-\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\left(\frac{ez}{2k}\right)^{-k} \tag{9}$$

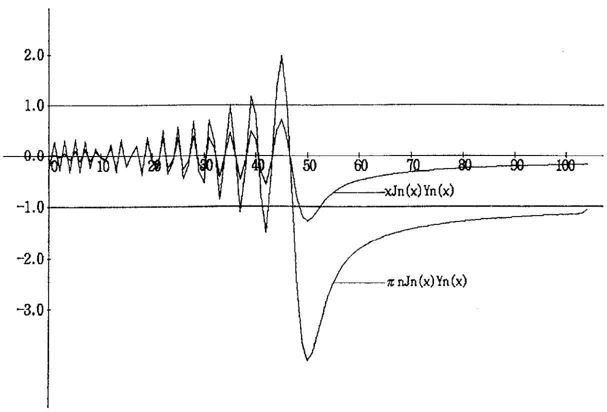


図 1 $x=50.0$, $N=94$, $M=104$, $p=16$, $q=5$ を与えたときの $xJ_k(x)Y_k(x)$

Fig. 1 $xJ_k(x)Y_k(x)$ for $x=50.0$, $N=94$, $M=104$, $p=16$, $q=5$.

の積から

$$\pi kJ_k(z)Y_k(z)\sim-1 \tag{10}$$

である．これは，$k\gg[|z|]$ の時，-1 より小さい値から-1に近づき，(7)より良い近似式となるが，(7)のほうが安全側の大き目の M を決定できる．

また，$Y_k(z)$ の計算から，$J_k(z)$ を推定する方法は，文献11), 12)に一般的に述べられている．

3. 逆向き漸化式の出発条件

この図1からも分かるように，$Y_n(x)$ の発散の様子から $J_n(x)$ の 0.0 に近づく様子を知ることができる．すなわち，順方向の漸化式を次のように計算し，N，Mを決定する．

$$F_{k+1}=\frac{2k}{x}F_k-F_{k-1} \tag{11}$$

$k=1,2,\cdots,N,\cdots,M$

$F_0=0$

$F_1=1$

$N=$最初に $|F_k|>10^p$ となった k

$M=$最初に $|F_k|>10^{p+q}$ となった k

$J_0(x)$ の絶対精度が p 桁以上ある出発点は N である．$J_N(x)$ に相対精度が q 桁以上あるための出発点は M である．M が定まると改めて逆向きに(4)によって関数値を決定する．文献3), 4)と比較すると少し違う程度である．実数の場合は，$k=[x]$ から始めると少し時間が節約できる．

4. 複素数の逆向き漸化式

実数は複素数の特別な場合として扱うことができる．複素数の場合は正規化定数と異なる．まず，これを述べる．Bessel 関数の母関数展開

$$exp\left\{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)u^n \tag{12}$$

において $u=\pm i$ と置けば(12)は

$$e^{\pm iz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\pm i)^nJ_n(z) \tag{13}$$

$$=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}(\pm i)^nJ_n(z)$$

となる．正規化定数を精度良く計算するために，桁落ちをできるだけ防ぐ．そのために(13)の左辺が大きくなるように符号を選ぶ．$z=x+iy$ とする．(13)の左辺 $e^{\pm iz}$ は $e^{\pm iz}=e^{\pm ix\mp y}$ であるから，$y>0$ なら大きくなるために符号を$-$に選ぶ．$y<0$ ならば $\overline{J_n(z)}=J_n(\bar{z})$ を使って虚数部を正にする．

$$e^{-iz}=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n J_n(z) \tag{14}$$

$$=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}d(j)J_n(z) \tag{15}$$

ここに $j=mod(n,4)$ は n を4で割った余りである．d は $(-i)^n$ を示す4個の複素数配列で，

$d(0)=1$; $d(1)=-i$

$d(2)=-1$; $d(3)=i$

である．正規化定数は

$$a=F_0+2\sum_{k=1}^{M}d(j)F_k \tag{16}$$

とすれば良い．関数値は

$$J_k(z)=\frac{e^{-iz}F_k}{a} \tag{17}$$

とする．複素数の第1種 Bessel 関数の項数を決める開始点は $k=[\mathcal{R}(z)]$ から始めると時間の節約になる．

5. 第1種変形 Bessel 関数 $I_n(z)$

第1種変形 Bessel 関数 $I_n(z)$ の逆漸化式[5)~7)]は

$$G_{k-1}=-\frac{2k}{z}G_k+G_{k+1} \tag{18}$$

$k=M, M-1, M-2, \cdots, 1$

$G_{M+1}=0$

$G_M=\epsilon$: 任意の値

$$a=G_0+2\sum_{k=1}^{[M/2]}G_k \tag{19}$$

$I_k(z)=e^z G_k/a$; $k=0,1,2,\cdots$

で与えられる．

第1種 Bessel 関数 $J_n(z)$ と第1種変形 Bessel 関数 $I_n(z)$ の関係は

$$I_n(z)=i^{-n}J_n(iz)=d(j)J_n(iz) \tag{20}$$

である．これと(18)は同じ結果をもたらす．

6. 第1種 Mathieu 関数

第1種 Mathieu 関数は，次のようにフーリエ級数に展開される．

$$ce_{2n}(z,q)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\cos(2k)z \tag{21}$$

$$ce_{2n+1}(z,q)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+1}\cos(2k+1)z \tag{22}$$

$$se_{2n}(z,q)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k}\sin(2k)z \tag{23}$$

$$se_{2n+1}(z,q)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+1}\sin(2k+1)z \tag{24}$$

展開係数の間には次の漸化式が成り立つ．

$$A_{2k+2-d}=V_{2k-d}A_{2k-d}-A_{2k-2-d} \tag{25}$$

$k=2,3,\cdots$

ただし，初めのほうの項は次のとおり．

(21)の場合：$d=0$; A_0 は任意

$$A_2=V_0A_0\ ;\ A_4=V_2A_2-2A_0 \tag{26}$$

(22)の場合：$d=1$; A_1 は任意

$$A_3=(V_1-1)A_1 \tag{27}$$

(23)の場合：$d=0$; A_2 は任意

$$A_0=0\ ;\ A_4=V_2A_2 \tag{28}$$

(24)の場合：$d=1$; A_1 は任意

$$A_3=(V_1+1)A_1 \tag{29}$$

さらに

$$V_k=(\lambda-k^2)/q\ ;\ k=0,1,2,\cdots \tag{30}$$

である．ここでは，固有値 λ は与えられるとする．

理論的には，これでフーリエ係数は決める．計算的にも簡単に決定できそうである．しかし，その簡単ではない．Mathieu 関数の漸化式は(1)と比較すると $V_k=2k/x$ と置けば，Bessel 関数と同じ型である．したがって，Bessel 関数と同じような振る舞い，順向きに計算しては良くないと考えられる．しかも，1つの漸化式が順向きと逆向きの両方の計算を必要とする．

7. Mathieu 関数の漸化式

Mathieu 関数の漸化式[8)]の主要項は(25)である．これを特徴づけているのは(30)の V_k である．これを少し検討しよう．以後は(26)だけを考える．

$q>0$ ならば，

```
C*************************************
C  フーリエの項数 NN,MM を決定する
C*************************************
C   N : 固有値の番号
C   P : 固有値
C   Q : パラメータ
C   NN: 15桁を得る項数
C   MM: 更に 5桁を得る項数
!C************************************
      SUBROUTINE  RKKNM( N,P,Q,NN,MM )
      REAL*8 P,Q,QI,T1,T2,T3
        IP=MOD(N,2)
        T2=1.0; T1=0.0; QI=1.0D0/Q
        IP=MOD(N,2)
      IF( P.GT. 0.0) THEN
         K=SQRT(P)*0.5
         IF(K.LT.1)K=1
      ELSE
         K=1
      ENDIF
   10 CONTINUE
        T3=T2*((2*K+IP)**2-P)*QI-T1
        T1=T2; T2=T3; K=K+1
        IF(ABS(T3).LT.1.0D15)KK= K
        IF(ABS(T3).LT.1.0D20)GOTO 10
         MM=K   ;  NN =KK
        RETURN ; END
```

図 2 フーリエ展開の項数を決定する

Fig. 2 Determination of necessary number of terms of Fourier series.

```
C*********************************************
C  Mathieu 関数のフーリエ展開係数を求める
C*********************************************
C  KY: 展開の種類  // KY=0:cen // KY=1:sen
C  N : 固有値の番号  n
C  P : 固有値
C  Q : パラメータ
C  NN: フーリエの係数は 0 ～ＮＮまで
C  MM: ＮＮまで正確にする為にＭＭ項が必要
C  A : フーリェ展開係数
!C*********************************************
      SUBROUTINE FCESE(KY,N,P,Q,NN,MM,A)
      IMPLICIT COMPLEX*16 (A-H,O-Z)
      REAL*8 A(0:99),P,Q
      REAL*8 AM,R,QI,S,G,E
CC Q=0.0 の処理
     IF(Q.EQ. 0.0 )THEN
     DO 15 J=0,NN; 15 A(J)=0.0; A(M)=1.0
     IF(KY.EQ.0.AND.N.EQ.0)A(0)=SQRT(0.5D0)
     RETURN
     ENDIF ; QI=1.0D0/Q; IP=MOD(N,2 )
CC 展開の中心  M を決定する
     M=2; IF(P.GT.16.0)M=SQRT(P)/2.0
     KYIP=KY*2+IP !C 場合分けに用いる
CC*******  順向き計算  **********
     IS=1  !C 共通な漸化式の始まり
     IF(KYIP.EQ.0)THEN
      A(0)=1.0; A(1)=P*QI ;IS=2
      A(2)=(P-4.0D0)*QI*A(1)-2.0
     ELSEIF(KYIP.EQ.1)THEN
      A(0)=1.0;A(1)=(P-1.0)*QI-1.0
     ELSEIF(KYIP.EQ.2)THEN
       A(0)=0.0; A(1)=1.0
     ELSE; A(0)=1.0;A(1)=(P-1.0)*QI+1.0
     ENDIF
CC  M が IS より小さい時は特別に扱う
     IZ=IS; IF(M.GT.IS)THEN
     IZ=M !C 順向き計算の部分
     DO 21 K=IS,M-1
        V=(P-(2*K+IP)**2)*QI
 21  A(K+1)=A(K)*V-A(K-1)
     ENDIF
     AM=A(IZ) !C 順向と逆向の調整用
CC*******  逆向き計算  **********
     S=0.0; A(MM+1)=0.0; A(MM)=1.0
     DO 23 K=MM,IZ+1,-1
        V=(P-(2*K+IP)**2)*QI
 23  A(K-1)=A(K)*V-A(K+1)
     R=AM/A(IZ)
CC 逆向きの部分を調整
     DO 24 K=IZ,MM
 24  A(K)=A(K)*R
     DO 25 K=MM,0,-1
 25  S=S+A(K)**2
     IF(KYIP.EQ.0)S=S+1.0
C**  正規化する  **********
     E=1.0D0/SQRT(S)
     DO 31 J=0,NN
 31  A(J)=A(J)*E
     RETURN ; END
```

図 3 フーリエ展開係数を求める
Fig. 3 Determination of the coefficients of Fourier series.

$$V_0 > V_2 > V_4 > \cdots$$

であり，$V_0>0$ なら途中1回だけ0点を通過する．大まかに言えば，V_k の大きさは3つに分けられる．

第1は $V_k \geq +2$：$k=0, 2, 4, \cdots, 2n$

第2は $|V_k|<2$：$k=2n+2, \cdots, 2m-2, 2m$

第3は $V_k \leq -2$：$k=2m+2, 2m+4, \cdots$

の3つである．この区間に対する漸化式の振る舞いは

第1区間は　順方向安定　逆方向不安定

第2区間は　順方向安定　逆方向安定

第3区間は　順方向不安定　逆方向安定

である．拡大のようすは，次の点から調べる．

$$\lambda \leq 0 \text{ なら } N=0 \qquad (31)$$

$$\lambda > 0 \text{ なら } N=[\sqrt{\lambda}/2]$$

漸化式を満たす2つの数列 $\{F_k\}$，$\{G_k\}$ は

$$|F_k G_k| \sim (\text{一定}) \qquad (32)$$

が期待できる．Mathieu 関数として役立つ数列は0に収束する．したがって，発散のようすを見て，0へと収束を知ることができる．プログラムは，**図2**のとおりである．相対精度が15桁を得る項数と，さらにそこから5桁の精度が得られるようにした．フーリエ係数を求めるプログラムは，**図3**である．これを使って文献9)の $q=5$，$r=10$ の場合を実行すれば**表1**のとおりになった．本論文で提案した方法は，展開係数が容易に求まることが分かる．

8. むすび

この論文の結果は，実数次や複素数次の Bessel 関数の計算に適用できると考えられるが，研究は進んでいない．

Mathieu 関数の固有値の計算については，文献13)に述べられている．関数の計算は，フーリエ展開係数

表 1 文献9)の $q=5$，$r=10$ のフーリエ展開係数を求める
Table 1 Comparison of the coefficients for $q=5$ (parameter), $r=10$ (order), refer to table 20.2.[9]

	文献[9]の値	計算値	順方向の計算値	F(k)G(K)
0	0.0000016790	1.678854190E-06	1.000000000E+00	1.678854190E-06
2	0.0000336190	3.361951490E-05	2.002527384E+01	6.732399924E-04
4	0.0006429870	6.429866721E-04	3.829913735E+02	2.462583486E-01
6	0.0107848067	1.078480732E-02	6.423909464E+03	6.928062582E+01
8	0.1376751214	1.376751206E-01	8.200540666E+04	1.129010425E+04
10	0.9839556217	9.839556403E-01	5.860876103E+05	5.766842099E+05
12	-0.1128067821	-1.128067800E-01	-6.719271982E+04	7.579794362E+03
14	0.0058929622	5.892962683E-03	3.510105806E+03	2.068492253E+01
16	-0.0001891660	-1.891657062E-04	-1.125977915E+02	2.129964075E-02
18	0.0000042260	4.226406448E-06	9.951041612E-02	4.205714643E-07
20	-0.0000000710	-7.048510133E-08	1.081422399E+02	-7.622416738E-06
22	0.0000000010	9.182025556E-10	-6.485900734E+03	-5.955370629E-06
24	0.0000000000	-9.648426321E-12	4.978451105E+05	-4.803421868E-06
26	0.0000000000	8.377739798E-14	-4.737578616E+07	-3.969020092E-06
28	0.0000000000	-6.125490396E-16	5.455995352E+09	-3.342064713E-06
30	0.0000000000	3.829165883E-18	-7.461948944E+11	-2.857304032E-06

が得られれば Clenshaw の方法で簡単に計算できるが，次の機会に改めて発表したい．変形 Mathieu 関数は，双曲線関数による展開である．その係数は，Mathieu 関数の係数と同じである．あるいは，単に $ce_n(x,q)$, $se_n(x,q)$ の x を純虚数に拡張したものであると言える．したがって，x を複素数に拡張した計算が可能になれば，変形 Mathieu 関数は，計算可能な全平面の単なる虚数軸上の値ということになる．全平面を考察対象にしたほうが，計算の困難を解決できる可能性がある．変形 Mathieu 関数の実数，したがって Mathieu 関数の純虚数に対しては結果を得たが，全平面に対しては緒についたばかりで，今後の結果に期待したい．

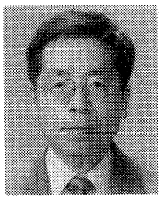
最後に，Mathieu 関数のパラメータ q を複素数に拡張する場合についてであるが，固有値の計算は，q が実数の場合の固有値から逐次計算していき，所定の q の固有値が計算可能である．フーリエ展開係数は，本論文で述べた方法を複素数に拡張すれば良いと考えられる．これらは他日を期したい．また，これらのプログラムは『計算技術研究会』から配付する予定である．

謝辞 本論が陽の目を見たのは，富士通(株) PP 事業部伊奈博君のお蔭である．ここに謝意を表する．

参考文献

1) 宇野利雄：計算機のための数値計算，pp. 11-13，朝倉書店 (1963).
2) 魚木五夫：$J_n(x)$ を漸化式によって計算するための条件，計算機のための函数近似公式，第2集，数理科学総合研究第4班5分科会 (1962).
3) 二宮市三：漸化式による Bessel 関数の計算，電子計算機のための数値計算法2，pp. 103-121，培風館，東京 (1965).
4) 牧之内三郎：漸化式による $J_\nu(x)$ の近似計算，情報処理，Vol. 6, No. 4, pp. 194-201 (1965).
5) 牧之内三郎：漸化式による $I_\nu(x)$ の近似計算，情報処理，Vol. 6, No. 5, pp. 247-252 (1965).
6) 吉田年雄ほか：漸化式を用いる複素数のベッセル関数 $I_n(z)$ の数値計算，情報処理，Vol. 14, No. 1, pp. 23-29 (1973).
7) 吉田年雄：漸化式を用いる複素数のベッセル関数 $I_\nu(z)$ の数値計算法の誤差解析，情報処理学会論文誌，Vol. 31, No. 8, pp. 1159-1167 (1990).
8) McLachlan, N. W.: *Theory and Application of Mathieu Functions*, Dover Publ., N. Y. (1964).
9) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., N. Y. (1965).
10) The Computation Laboratory of the National Applied Mathematics Laboratories National Bureau of Standards: Tables Relating to Mathieu Functions; Characteristic Values, Coefficients and Joining Factors, N. Y., Columbia University Press (1951).
11) Gautschi, W.: Computational Aspects of Three-Term Recurrence Relations, *SIAM Rev.*, Vol. 9, pp. 24-82 (1967).
12) Olver, F. W. J. and Sookne, D. J.: Note on Backward Recurrence Algorithms, *Math. Comput.*, Vol. 26, pp. 941-947 (1972).
13) 山下眞一郎：Mathieu 関数の固有値の計算について，情報処理学会論文誌，Vol. 33, No. 11, pp. 1290-1295 (1992).

(平成4年3月3日受付)
(平成4年11月12日採録)



山下眞一郎（正会員）

昭和12年宮崎県えびの市生．昭和31年鹿児島工業高等学校卒業．昭和49年日本大学理学博士．昭和32年8月有隣電機精機(株)（日本最初の計算センタ）に入社．計算機の保守および受託計算に従事．高次代数方程式・最良近似などを研究．昭和38年 FACOM 231 ALGOL コンパイラ開発．昭和40年4月現富士通(株)に移籍．昭和42年5月 FACOM 230-60 FORTRAN コンパイラ開発．昭和50年から科学計算ライブラリ SSL 開発．昭和48.5〜53.4 本会会誌編集委員．昭和53.5〜56.4 本誌論文編集委員．昭和56.5〜58.4 本会数値解析研究会幹事．平成4年4月日本大学理工学部教授に就任．日本数学会，日本応用数理学会各会員．