

要素間補間による共回転系弾性体シミュレーションの高速化

福原 吉博¹ 斎藤 隼介¹ 成田 史弥¹ 森島 繁生²

概要: 弾性体は肌や布など多くの変形可能な物体の運動を記述するモデルとして、コンピューターグラフィクス (CG) において必要不可欠なものである。本稿では、CG の分野において多用されている弾性体モデルの 1 つである共回転系弾性体のシミュレーションについて、クォータニオンブレンドを用いた回転行列の要素間補間による高速化手法を提案する。本手法により、従来の共回転系弾性体シミュレーションとほぼ同等の結果をより高速に得ることが可能となる。

1. はじめに

変形可能な物体の物理ベースシミュレーションは CG の様々な分野において必要不可欠なものである。中でも弾性体は肌や布、ゴムなど多くの物体の運動を記述するモデルであるが、そのシミュレーションには大きな計算コストを要するため、多くの高速化の研究がなされてきた。

共回転系弾性体は大変形に対して頑強であるという特徴から、CG の分野において頻繁に使用されている弾性体モデルの 1 つである。共回転系弾性体のシミュレーションの過程では、各ステップにおいて全要素の回転行列の値が必要である。そのため、毎ステップごとに全要素に対して、非線形の計算プロセスである特異値分解を実行し、回転行列を計算しなければならない。特異値分解については McAdams ら [11] の手法など高速な計算方法が提案されているが、膨大な要素からなるモデルのすべての要素に対して特異値分解を行うためには、依然として大きな計算時間を要する。

Jacobson [6] らはスキニングウェイトの値によって、全頂点をクラスタリングし、各クラスタ内においては同じ回転行列を計算に用いることで、特異値分解を行う回数を削減し、計算時間を短縮する Rotation Clusters という手法を提案した。Jacobson らの手法はボーンやリグの埋め込まれたモデルに対しての適応を前提としており、最終的な頂点位置に影響を与えるのは制御点の回転行列のみである。そのため、クラスタリングによる回転行列の大胆な近似を行っても最終的な変形の結果は滑らかなものを得ることが出来る。しかし、共回転系弾性体では各要素の回転行列の値が

頂点の位置に直接影響を与えるため、Jacobson らの考え方をそのまま適用すると、物理的に不合理な変形となってしまう。

そこで、本稿では要素をクラスタリングするのではなく、サンプリングされた代表要素の回転行列の値から残りの要素の回転行列を滑らかに補間することにより、特異値分解の工程の計算時間を削減し、シミュレーションを高速化する手法を提案する。手順として、まず要素のサンプリングを行い回転行列を正確に計算する代表要素を決定する。次に、ポアソン方程式をディリクレ境界条件のもとで解き、回転行列の要素間補間を行う際の重みを決定する。最後にクォータニオンブレンドによって残りの要素の回転行列を代表要素の回転行列から要素間補間する。これにより、最適化の各イテレーションに要する時間が短縮され、より高速なシミュレーションが可能となった。

2. 関連研究

弾性体シミュレーションの高速化については様々な手法が提案されているが、大きく 3 つののアプローチに分けることが出来る。

1 つ目は、系の次元を減らすことによって、高速化を行うアプローチである。このアプローチの代表的なものは Subspace を用いる手法である。Barbic ら [2] は Subspace を用いて系の次元を削減することによって非線形の弾性体モデルである、StVK 弾性体のシミュレーションを高速に行う手法を提案した。また、弾性体モデルを用いたスキニングの高速化の手法としても、ボーンやリグの情報を用いることで次元を減らす手法が Gao ら [3] や Jacobson ら [6] 提案されている。

2 つ目は解の収束の速度を速めることによって、高速化を行うアプローチである。このアプローチの代表的なもの

¹ 早稲田大学

Waseda University

² 早稲田大学理工学術院

Waseda Research Insutitute for Science and Engineering

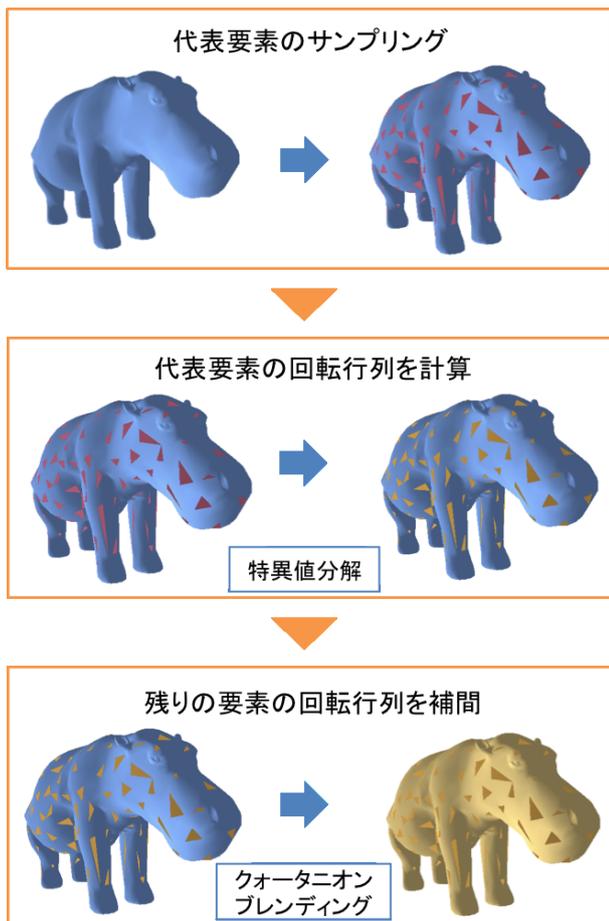


図 1 研究概要

Fig. 1 Overview of our method

は McAdams ら [11] や Georgii ら [4] の Multigulid を用いる手法である。Multigulid を用いるアプローチには解の安定性が高いという利点もある。

3 つ目はシステム行列の扱いを工夫することで高速化を行うアプローチである。Hecht ら [5] はモデルを領域分割することで、システム行列を複数のブロックに分割し、誤差が大きくなったブロックの成分のみを更新することによりシミュレーションを高速化する手法を提案した。

本研究は 1 つ目のアプローチに近い手法である。本手法ではサンプリングされた代表要素の回転行列の値から残り全ての要素の回転行列を近似的に補間することで、シミュレーションの高速化を行う。これは、捉え方によっては要素の回転の自由度を減らすことによる高速化と捉えることができる。

3. 背景・表記法

4. 関連研究

本稿を通して、以下のような表記を用いる。 Ψ のような細字の文字はスカラーを、 \mathbf{x} のようなボールド体の小文字はベクトルを、 \mathbf{F} のようなボールド体の大文字は行列を、 $\hat{\mathbf{q}}$ のようなハット付きの文字はクォータニオンをそれぞれ表

すものとする。

4.1 陰解法

本章では基本的な陰解法の枠組みを復習するとともに、最適化問題へと置き換える方法を説明する。

n 個の頂点からなる 3 次元の力学系を考える。時刻 t において頂点の位置と速度を与えるベクトルを、それぞれ $\mathbf{x}^{(t)} \in \mathbf{R}^{3n}$, $\mathbf{v}^{(t)} \in \mathbf{R}^{3n}$ とし、ポテンシャルを与える関数を $E: \mathbf{R}^{3n} \rightarrow \mathbf{R}$ とすると、陰解法の位置と速度の更新の式は以下のように表すことができる [1]。

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} + h\mathbf{v}^{(t+1)} \quad (1)$$

$$\mathbf{v}^{(t+1)} = \mathbf{v}^{(t)} - h\mathbf{M}^{-1}\nabla E|_{\mathbf{x}^{(t+1)}} \quad (2)$$

h は時間の刻み幅であり、 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{3n \times 3n}$ は質量マトリックスを表している。代入によって、式 (15), (2) から速度を消去して整理すると、離散化されたニュートンの運動方程式

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(t+1)} - 2\mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{x}^{(t-1)}) = -h^2\nabla E|_{\mathbf{x}^{(t+1)}} \quad (3)$$

を得る。式 (3) を解くために、 $\nabla E|_{\mathbf{x}^{(t+1)}}$ の部分を以下のように近似する [1]。

$$\nabla E|_{\mathbf{x}^{(t+1)}} \approx \nabla E|_{\mathbf{x}^{(t)}} + (\nabla^2 E|_{\mathbf{x}^{(t)}})(\mathbf{x}^{(t+1)} - \mathbf{x}^{(t)}) \quad (4)$$

ここで、式 (4) を式 (3) に代入して、整理すると以下の式 (5) を得る。

$$\mathbf{M}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -h^2 E(\mathbf{x}) \quad (5)$$

ただし、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(t+1)}$, $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{x}^{(t-1)}$ とした。式 (5) を解くことで、既知の頂点の位置の情報 \mathbf{y} から次の時刻における頂点の位置 \mathbf{x} を得ることが出来る。ここで、式 (5) を解いた結果得られる \mathbf{x} は、以下の式 (6) によって与えられる関数 $g(\mathbf{x})$ の最小値を与える \mathbf{x} に等しいため、式 (5) を解く問題を関数 $g(\mathbf{x})$ の最小化問題として置き換えることが出来る。

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{M}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + h^2 E(\mathbf{x}) \quad (6)$$

実際に、関数 $g(\mathbf{x})$ の極値を求める式、 $\nabla g(\mathbf{x}) = 0$ は式 (5) のものである。このように最適化問題として置き換えた陰解法は Martin ら [10] によって提案され、variational implicit Euler と呼ばれている。

以上の枠組みでは摩擦による減衰などは一切考えていない。ダンピングの影響を考慮するためには、Liu ら [9] の手法に従って、 $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(t)} + h\tilde{\mathbf{v}}^{(t)}$ と置き換えればよい。ここで、 $\tilde{\mathbf{v}}^{(t)}$ はダンピングを考慮した速度であり、最も単純なモデルでは、ダンピング係数 $\alpha \in [0, 1]$ を用いて、 $\tilde{\mathbf{v}}^{(t)} = \alpha\mathbf{v}^{(t)}$ と表せる。

4.2 共回転系弾性体

本章では提案手法で用いた弾性体モデルである、共回転系弾性体の力学的な取り扱いについて説明する。

3次元空間中の弾性体を変形させたときに蓄えられる歪みエネルギー E は、弾性体が占める領域を Ω とすると、式 (7) のように表すことが出来る。

$$E = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) dx \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{F} は位置 \mathbf{x} における弾性体の変形勾配テンソルであり、各成分は $F_{ij} = \partial \phi_i / \partial x_j$ のように表される。また、 $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}))$ 歪みエネルギー密度であり、その具体的な関数系は採用する弾性体のモデルを定めることで決定される。弾性体モデルとして共回転系弾性体を採用した場合、歪みエネルギー密度は式 (8) のように表すことが出来る。

$$\Psi_{\text{cor}} = \mu \|\mathbf{F} - \mathbf{R}\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2(\mathbf{R}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (8)$$

μ, λ はラメ定数であり、 \mathbf{R} は極分解 $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{S}$ によって得られる回転行列である。式 (8) において、解の安定性に大きく影響するのは $\mu \|\mathbf{F} - \mathbf{R}\|_F^2$ の部分であるので McAdams ら [11] の手法に従って、第2項を落として近似すると、 $\Psi_{\text{cor}} = \mu \|\mathbf{F} - \mathbf{R}\|_F^2$ となる。

4.3 離散化

本章では、4.2章で説明した式を離散化し、有限要素からなるモデルに対して適応する方法を説明する。

ここで、モデルを m 個の要素（提案手法では四面体を用いた。）に分割して離散化し、定数項を無視すると、式 (7) の歪みエネルギーは以下のような行列を用いた形式で書き表すことが出来る。

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \|\mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i\|_F^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{r} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{3n}$ は弾性体を構成する全頂点の位置ベクトルである。ただし、全頂点数を n とした。また、ベクトル $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{9m}$ は、 $\mathbf{R} = (\text{vec}(\mathbf{R}_1) \dots \text{vec}(\mathbf{R}_m))$ であり、行列 $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{3n \times 3n}$ と $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{3n \times 9m}$ はそれぞれ以下の式 (10), (11) のように定義される。

$$\mathbf{L} = \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{A}_i^T \tilde{\mathbf{M}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_i^{-T} \mathbf{A}_i \right) \otimes \mathbf{I}_3 \quad (10)$$

$$\mathbf{J} = \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \tilde{\mathbf{M}}_i^{-T} \mathbf{A}_i \right) \otimes \mathbf{I}_3 \quad (11)$$

$\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{3 \times 3n}$ は i 番目の要素のインデックス行列で、 $A_{1i_1} = A_{2i_2} = A_{3i_3} = 1, A_{1i_4} = A_{2i_4} = A_{3i_4} = -1$ であり、残りの成分はすべてゼロである。また、 $\tilde{\mathbf{M}}_i \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ は外力が作用していないときの、 i 番目の要素を構成する頂点の位置を $\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_4$ とすると、 $\tilde{\mathbf{M}}_i = (\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_4, \tilde{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_4, \tilde{\mathbf{v}}_3 - \tilde{\mathbf{v}}_4)$ と表せる。また、 $\mathbf{I}_3 \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ は3次の単位行列であり、 \otimes は

テンソル積である。

よって、重力などの外力を \mathbf{f}_{ext} と書くことにすると、ポテンシャルエネルギーは以下の式 (12) のように表せる。

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{r} + \mathbf{x}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (12)$$

式 (12) を陰解法で最小化すべき関数の式 (6) に代入して整理すると、最終的に最小化すべき式 (13) が得られる。

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{M} + 2h^2 \mathbf{L}) \mathbf{x} - \mathbf{x}^T (\mathbf{M} \mathbf{y} + h^2 (2\mathbf{J} \mathbf{r} - \mathbf{f}_{\text{ext}})) \quad (13)$$

4.4 Local/Global Optimization

本章では、前章で示した式 (13) の最小化問題の解法の1つとして、Sokine ら [13] によって提案された Local/Global approach を用いた最適化の方法を説明する。Local/Global approach では Local step と Global step の2つのステップを繰り返すことにより目的関数の最小化を行う。

Local step では頂点ベクトル \mathbf{x} を固定し、ベクトル \mathbf{r} について目的関数 g を最小化する。具体的には、 \mathbf{x} を固定した状態で、すべての要素に対して特異値分解 $\mathbf{F}_i = \mathbf{U}_i \Sigma_i \mathbf{Q}_i$ を行い、 $\mathbf{R}_i = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{U}_i^T$ によって g を最小化する回転行列 $\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m$ を計算する。

Global step ではベクトル \mathbf{r} を固定し、頂点の位置 \mathbf{x} について g を最小化する。 g の \mathbf{x} についての偏微分は

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{M} + 2h^2 \mathbf{L}) \mathbf{x} - (\mathbf{M} \mathbf{y} + h^2 (2\mathbf{J} \mathbf{r} - \mathbf{f}_{\text{ext}})) \quad (14)$$

であるので、固定された \mathbf{r} に対して g を最小化する \mathbf{x} は以下の式 (15) によって与えられる。

$$\mathbf{x} = (\mathbf{M} + 2h^2 \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{M} \mathbf{y} + h^2 (2\mathbf{J} \mathbf{r} - \mathbf{f}_{\text{ext}})) \quad (15)$$

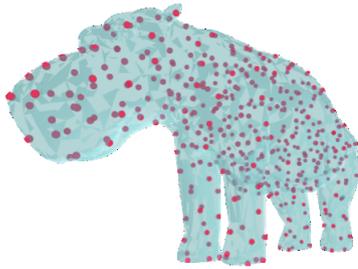
以上の2つのステップを繰り返すことにより g の最小化を行い、最終的な頂点の位置 \mathbf{x} を求める。

5. 提案手法

本研究は4.4章で説明した、Local/Global approach の Local step において回転行列を要素間で補間することによって計算量を削減し、シミュレーションの高速化を行った。本章ではその具体的な方法について述べる。まず、5.1章において特異値分解を行う代表要素のサンプリング方法について述べる。次に、5.2章において、クォータニオンブレンドリングを用いた回転行列の要素間補間の方法について述べる。最後に、5.3章において、提案手法を用いて Local/Global approach により最適化を行う方法について述べる。

5.1 サンプリング

特異値分解を行う代表要素を決定するために、各要素の重心に対して Schlomer ら [12] の farthest points を用いたサンプリングを行った。その結果、得られた l 個の代表要素



赤点:サンプリング点

図2 farthest points によるサンプリング
Fig. 2 Farthest point sampling

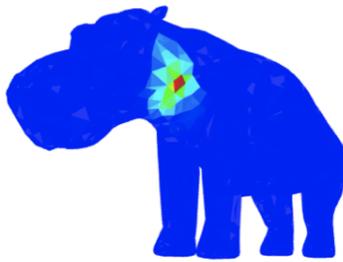


図3 ポアソン方程式から計算した重み
Fig. 3 Blending weights derived from solutions of Poisson equation

を e_{s1}, \dots, e_{sl} と表すものとする。また、サンプリングを行う要素の割合についてはユーザーが指定することが出来るパラメータであるが、本稿ではモデルの形状の複雑さに応じて、全要素の 5% ~ 15% をサンプリングし、代表要素とした。

5.2 回転行列の要素間補間

代表要素に対して計算された回転行列と後述の重み w から全要素の回転行列を補間する方法を説明する。

サンプリングされた代表要素 e_{s1}, \dots, e_{sl} に対して、特異値分解を行って得られた回転行列 $\mathbf{R}_{s0}, \dots, \mathbf{R}_{sl}$ をクォータニオンに変換したものを、 $\hat{\mathbf{q}}_{s0}, \dots, \hat{\mathbf{q}}_{sl}$ とする。このとき、要素 e_i の回転行列を以下の式 (16) に従って、クォータニオンブレンドイングによって補間する。

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1}^l (-1)^{s_j} w_j^{(i)} \hat{\mathbf{q}}_{s_j} \quad (16)$$

ここで、 s_j は最短経路による補完を行うための整数であり Kavan ら [8] の手法に従って、

$$s_j = \begin{cases} 0 & \langle \hat{\mathbf{q}}_{s1}, \hat{\mathbf{q}}_{s_j} \rangle \geq 0 \text{ のとき} \\ 1 & \langle \hat{\mathbf{q}}_{s1}, \hat{\mathbf{q}}_{s_j} \rangle < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (17)$$

のように定めるものとする。式 (16) の計算を代表要素以外のすべての要素に対して行い、全要素の回転行列を得る。

次に、要素間補間の際に用いたクォータニオンブレンドイングの重み w の求めかたを説明する。本研究では、有限要

素法によってポアソン方程式をディリクレ境界条件のもとで解き、得られた解を用いて補間の重み w を決定した。

まず、モデルの頂点座標 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ を節点として異なる境界条件のもとでポアソン方程式を l 回解き、解となるベクトル $\mathbf{u}^{(1)} \dots \mathbf{u}^{(l)}$ を得る。ただし、 $\mathbf{u}^{(i)} \in \mathbf{R}^{3n}$ は、以下のディリクレ境界条件を課したときのポアソン方程式の解である。

$$u_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & j \in e_{si} \text{ のとき} \\ 0 & j \in e_{sk} \wedge k \neq i \text{ のとき} \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 $j \in e_{si}$ は j が要素 e_{si} を構成する頂点のインデックスに含まれていることを表している。更に、これらの解のそれぞれに対して、各要素ごとの平均をとり、 $\bar{\mathbf{u}}^{(1)} \dots \bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ を得る。

このとき、要素 e_i に対する代表要素 e_{sj} の重み $w_j^{(i)}$ を式 (19) によって定めた。

$$w_j^{(i)} = \frac{\bar{u}_i^{(j)-1}}{\sum_{k=1}^l (\bar{u}_i^{(k)-1})} \quad (19)$$

また、本手法では式 (16) の計算を高速化するために重みに対して閾値 $w_{threshold}$ を設定し、重みの値が閾値以下の代表要素は補間される要素の回転行列への寄与が十分小さいとして計算に加えなかった。また、 $w_{threshold}$ の値についてはユーザーが決めることの出来るパラメータであるが、本稿では重みの平均値と最小値の中間値とした。

5.3 最適化

本章では、提案手法を適用した Local/Global approach により、目的関数 g の最適化を行う方法を述べる。

始めに、事前計算として 5.1 章と 5.2 章において述べた代表要素 e_{s0}, \dots, e_{sl} のサンプリングと重み w の計算を行っておく。

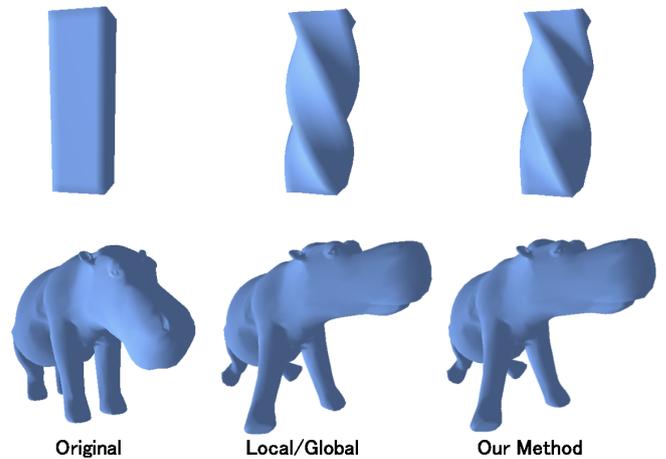


図4 提案手法と Local/Global Optimization の適応結果
Fig. 4 Compare the results

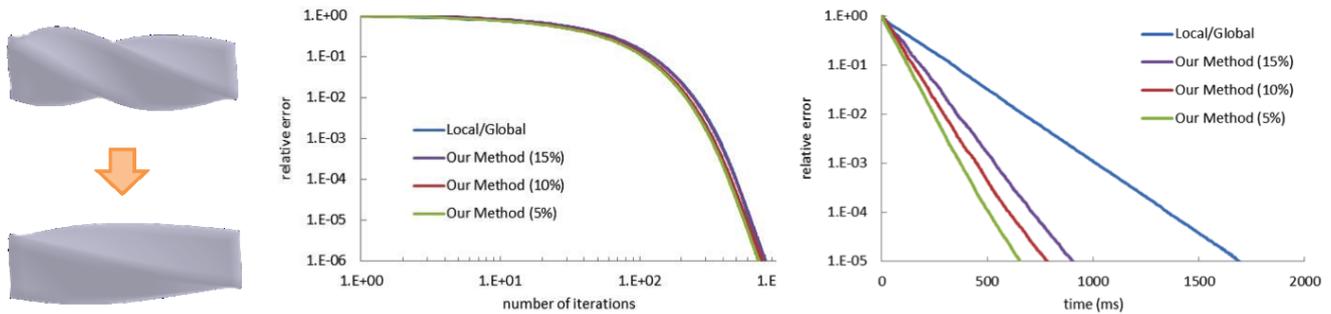


図5 エネルギー関数の収束
Fig. 5 Our optimization converges.

Local step では、まず、代表要素 e_{s0}, \dots, e_{sl} のそれぞれに対して特異値分解 $\mathbf{F}_i = \mathbf{U}_i \Sigma_i \mathbf{Q}_i^T$ を行い、 $\mathbf{R}_i = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{U}_i^T$ によって代表要素の回転行列 $\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_l$ を計算する。次に、求めた回転行列をクォータニオン $\hat{\mathbf{q}}_{s0}, \dots, \hat{\mathbf{q}}_{sl}$ に変換し、式 (16) を用いて残りの要素の回転行列を補間する。

Global step では 4.4 章と全く同様に式 (15) によって、 g を最小化する \mathbf{x} を求める。

6. 結果

以上の手順によって、3D モデルに対してシミュレーションを行った。その結果と、従来の Local/Global Optimization を適応したシミュレーションの結果を比較したものを図 5.2 に示す。この結果から、提案手法を用いても従来の Local/Global Optimization を適応した場合とほぼ同じ結果を得ることが可能であることが確認できる。

次に、2375 個の四面体から構成される、四角柱のモデルを用いて提案手法と従来の Local/Global Optimization のエネルギーの相対誤差の減少の速度を比較した結果を図 5 に示す。ただし、提案手法の括弧内の値はサンプリングを行う要素の割合を表している。また、相対誤差の真値としてはそれぞれの手法において反復回数を 1000 としたときの値を用いた。図 5 から提案手法を用いた場合、従来の Local/Global Optimization を用いた場合よりも収束に要する時間を短縮出来ることが確認出来る。

また、収束に要する時間の高速化の割合はサンプリングを行う要素の割合に応じて変化し、サンプリングを行う要素の割合を増やしていくことによって、従来の Local/Global Optimization の結果に漸近していくことが分かる。このことから、サンプリングを行う要素の割合を変化させることで速度と正確さのどちらにどの程度重きをおくか調整をすることが出来る。

一方で、解が収束するまでに要するイテレーションの回数は提案手法と従来手法で大きな差は見られなかった。

7. まとめと今後の課題

本稿では、クォータニオンブレンドを用いた回転

行列の要素間補間によって、共回転系弾性体のシミュレーションを高速化する手法を提案した。これにより、従来の Local/Global approach による最適化と比較して、各イテレーションに必要な時間を短縮することが可能となり、結果として解が収束するまでの時間の短縮を実現した。

しかし、本手法で用いたクォータニオンブレンドによる回転行列の要素間補間はいくまで近似計算であるため、最終的な解の収束点が Newton 法や本来の Local/Global approach による最適化の結果として得られるものと一致することは保証されていない。

今後は代表要素のサンプリングの手法や重み w の計算方法について、より適切な方法を検討していきたい。特に、本手法では重み w をポアソン方程式の解をもとに決定したが、今後は Jacobson ら [7] や Zhang ら [14] の手法を用いた場合の結果との比較を行う予定である。

参考文献

- [1] Baraff, D. and Witkin, A.: Large Steps in Cloth Simulation, *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH '98*, New York, NY, USA, ACM, pp. 43–54 (online), 1998.
- [2] Barbič, J. and James, D. L.: Real-Time Subspace Integration for St. Venant-Kirchhoff Deformable Models, *ACM SIGGRAPH 2005 Papers, SIGGRAPH '05*, New York, NY, USA, ACM, pp. 982–990 (online), 2005.
- [3] Gao, M., Mitchell, N. and Sifakis, E.: Steklov-Poincaré Skinning, *Eurographics/ ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation* (Koltun, V. and Sifakis, E., eds.), The Eurographics Association, (online), 2014.
- [4] Georgii, J. and Westermann, R.: Corotated Finite Elements Made Fast and Stable, *Workshop in Virtual Reality Interactions and Physical Simulation "VRIPHYS" (2008)* (Faure, F. and Teschner, M., eds.), The Eurographics Association, (online), 2008.
- [5] Hecht, F., Lee, Y. J., Shewchuk, J. R. and O'Brien, J. F.: Updated Sparse Cholesky Factors for Corotational Elastodynamics, *ACM Trans. Graph.*, Vol. 31, No. 5, pp. 123:1–123:13 (online), 2012.
- [6] Jacobson, A., Baran, I., Kavan, L., Popović, J. and Sorkine, O.: Fast Automatic Skinning Transformations, *ACM Trans. Graph.*, Vol. 31, No. 4, pp. 77:1–77:10 (on-

- line), 2012.
- [7] Jacobson, A., Baran, I., Popović, J. and Sorkine, O.: Bounded Biharmonic Weights for Real-time Deformation, *ACM Trans. Graph.*, Vol. 30, No. 4, pp. 78:1–78:8 (online), 2011.
 - [8] Kavan, L., Collins, S., Žára, J. and O’Sullivan, C.: Geometric Skinning with Approximate Dual Quaternion Blending, *ACM Trans. Graph.*, Vol. 27, No. 4, pp. 105:1–105:23 (online), 2008.
 - [9] Liu, T., Bargteil, A. W., O’Brien, J. F. and Kavan, L.: Fast Simulation of Mass-spring Systems, *ACM Trans. Graph.*, Vol. 32, No. 6, pp. 214:1–214:7 (online), 2013.
 - [10] Martin, S., Thomaszewski, B., Grinspun, E. and Gross, M.: Example-based Elastic Materials, *ACM Trans. Graph.*, Vol. 30, No. 4, pp. 72:1–72:8 (online), 2011.
 - [11] McAdams, A., Zhu, Y., Selle, A., Empey, M., Tamstorf, R., Teran, J. and Sifakis, E.: Efficient Elasticity for Character Skinning with Contact and Collisions, *ACM Trans. Graph.*, Vol. 30, No. 4, pp. 37:1–37:12 (online), 2011.
 - [12] Schlömer, T., Heck, D. and Deussen, O.: Farthest-point Optimized Point Sets with Maximized Minimum Distance, *Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on High Performance Graphics*, HPG ’11, New York, NY, USA, ACM, pp. 135–142 (online), 2011.
 - [13] Sorkine, O. and Alexa, M.: As-rigid-as-possible Surface Modeling, *Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry Processing*, SGP ’07, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, Eurographics Association, pp. 109–116 (online), 2007.
 - [14] Zhang, J., Deng, B., Liu, Z., Patanè, G., Bouaziz, S., Hormann, K. and Liu, L.: Local Barycentric Coordinates, *ACM Trans. Graph.*, Vol. 33, No. 6, pp. 188:1–188:12 (online), 2014.