陰的列挙法に基づく SAT アルゴリズム

大柳俊夫[†] 山本雅人[††] 大内 東[††]

命題論理の充足可能性問題（以下 SAT と呼ぶ）は，計算複雑度が NP-完全である代表的な問題として，情報処理の分野における基本的な問題の一つにあげられている．この問題に対して，Davis-Putnam の方法に代表される記号的方法に関する研究がこれまで盛んに行われている．最近になって，OR 技法の一つである整数計画法や線形計画法に基づく研究が主にORの分野の研究者によって行われている．この方法は記号的方法に対し定量的方法と呼ばれ，本来計算機が得意とする数値的な処理により SAT を高速に解くことを目指したものである．SAT に対する定量的方法に関するこれまでの研究として，1）Branch and Bound に基づく方法，2）切除平面に基づく方法，3）内点法に基づく方法，4）陰的列挙法に基づく方法，などが提案されている．本論文では，陰的列挙法に基づく新しい SAT アルゴリズム IEMSAT を提案する．そして，SAT に対する代表的な方法である Davis-Putnam と提案アルゴリズムの関係を詳細に調べ両方法の対応付けを行う．この結果は，一般の 0-1 整数計画問題に対する陰的列挙法を SAT 向きに特殊化することで，Davis-Putnam とほぼ同じ方法が導けることを示すものである．また，IEMSAT および Davis-Putnam の方法を用いた計算機実験を行い，IEMSAT の有効性を検証する．

SAT Algorithm Based on Implicit Enumeration Method

TOSHIO OHYANAGI,[†] MASAHITO YAMAMOTO[††] and AZUMA OHUCHI[††]

The satisfiability problem (SAT) is one of well-known problems in the field of computer science. Many researchers in this field attempted to develop an algorithm for solving this problem. Among them Davis and Putnam succeeded to develop so-called Davis-Putnam method. Recently some researchers in the field of *Operations Research* applied mathematical programming theory to SAT. This approach intends to solve SAT by not symbolical computation but numerical one. This paper intends to propose new SAT algorithm based on implicit enumeration method that is one of algorithms for general 0-1 integer programming problems. Furthermore, a detailed comparison between the proposed method and Davis-Putnum method is made. The result shows that the proposed method and Davis-Putnum method are closely related. Some computational experiences are also made to verify effectiveness of the proposed method. As a result, the method solved all the test problems faster than Davis-Putnam method and Kamath's method.

1. はじめに

命題論理の充足可能性問題（以下 SAT と呼ぶ）は，計算複雑度が NP-完全である代表的な問題として情報処理の分野における基本的な問題の一つにあげられている．この問題は，与えられた命題論理式集合中のすべての論理式を真とする原子論理式への真偽の割当てが存在するか否かを決定するものである．

この問題に対して，Davis-Putnam の方法（以下 Davis-Putnam と呼ぶ）に代表されるいわゆる記号的方法に関する研究が盛んに行われている[1),2)]．

最近になって，OR 技法の一つである整数計画法や線形計画法に基づく研究がおもに OR の分野の研究者によって行われている．この方法は記号的方法に対して定量的方法と呼ばれ[3)]，本来計算機が得意とする数値的な処理により SAT を高速に解くことを目指したものである．

SAT に対する定量的方法に関するこれまでの研究として，

1. Jeroslow らによる Branch and Bound に基づく方法[3),4)]，
2. Hooker による切除平面に基づく方法[3),5)~8)]，
3. Kamath や今井らによる内点法に基づく方法[9),10)]，
4. 大柳らによる陰的列挙法[11)]に基づく方法[12)]，

† 札幌医科大学保健医療学部
School of Health Sciences, Sapporo Medical University
†† 北海道大学工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University

などが提案されている．また，STA を 0-1 整数計画問題として定式化し，その整数条件を線形緩和した線形計画問題と Davis-Putnam の 1-リテラル規則の関係に関する研究[13]や関数記号を含まない第一階述語論理の充足可能性判定に関する研究[14]なども行われている．

なお，大規模な SAT に対する近似解法として GSAT と呼ばれる方法も最近提案されている[15]．

本論文では，SAT を 0-1 整数計画問題として定式化した場合の特徴を利用した，陰的列挙法に基づく新しい SAT アルゴリズム（以下，IEMSAT と呼ぶ）を提案する．

そして，IEMSAT と Davis-Putnam を比較し，両者の関係を明らかにする．その結果は，一般の 0-1 整数計画問題に対する Balas の陰的列挙法を SAT 向きに特殊化することで，Davis-Putnam とほぼ同じものが導けることを示すものである．

また，IEMSAT および Davis-Putnam の方法を用いた計算機実験を行い，その実験結果ならびに最近の Kamath らの実験結果[9]との比較により IEMSAT の有効性を検証する．

以下，2章で SAT と SAT を 0-1 整数計画問題として定式化する方法を示す．そして3章で今回提案するアルゴリズム IEMSAT を説明し，4章で IEMSAT と Davis-Putnam の関係を詳細に調べる．また，5章で計算機実験について述べる．

2. SAT と 0-1 整数計画問題

2.1 SAT

任意の命題論理式は連言標準形に変換できることから，一般に SAT は m 個の基礎節集合

$$S=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}, \qquad (1)$$

として与えられる．ここで，$C_i(i=1,\cdots,m)$ は基礎節であり，各基礎節は原子論理式 p_j またはその否定 $\neg p_j(j=1,\cdots,n)$ の選言からなる論理式である．これら S 中のすべての基礎節を真とする原子論理式 $p_j(j=1,\cdots,n)$ への真偽の割り当てが存在するか否かを調べ，S の充足可能性を決定する問題が SAT である．

例えば

$$\begin{aligned}S=\{&p_1, p_1\vee p_3\vee p_4\vee\neg p_5, p_1\vee\neg p_3\vee p_5,\\&\neg p_1\vee p_2\vee p_5\vee\neg p_6, \neg p_2\vee p_4\vee\neg p_6,\\&p_2\vee\neg p_4\vee p_6\},\end{aligned} \qquad (2)$$

は，6個の基礎節からなる SAT であり，各節は原子論理式 $p_1,\cdots,p_6$ またはその否定の選言である．この例では，後に示すように，$(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)=$(真，偽，偽，偽，真，偽) とすると6個の基礎節がすべて真となり，S は充足可能と判定される．

2.2 SAT の 0-1 整数計画問題としての定式化

2.1節で示した(1)式の SAT は，0-1 整数計画問題

$$\begin{aligned}\text{min}\quad & x_0\\ \text{sub.to}\quad & x_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\\ & x_0\in\{0,1\}, \boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n,\end{aligned} \qquad (3)$$

と定式化できる[12]．ここで，$\boldsymbol{e}$ はすべての成分が1である m 列ベクトル，$\boldsymbol{A}$ は $m\times n$ 行列，そして $\boldsymbol{b}$ はm 列ベクトルである．この定式化において，原子論理式 $p_i(i=1,\cdots,n)$ と 0-1 変数 $x_i(i=1,\cdots,n)$ は，p_i が真のとき x_i が1，偽のとき0という対応がある．

たとえば(2)式の SAT を 0-1 整数計画問題として定式化すると，

$$\begin{array}{lllllllll}\text{min} & x_0 \\ \text{sub.to} & x_0 & +x_1 & & & & & \geq & 1,\\ & x_0 & +x_1 & & +x_3 & +x_4 & -x_5 & \geq & 0,\\ & x_0 & +x_1 & & -x_3 & & +x_5 & \geq & 0,\\ & x_0 & -x_1 & +x_2 & & & +x_5\ -x_6 & \geq & -1,\\ & x_0 & & -x_2 & & +x_4 & -x_6 & \geq & -1,\\ & x_0 & & +x_2 & & -x_4 & +x_6 & \geq & 0,\\ & & & x_j\in\{0,1\}, \forall j\in\{0,\cdots,6\}, \end{array} \qquad (4)$$

となる．

3. 陰的列挙法に基づく新しい SAT アルゴリズム IEMSAT

本章では，SAT を 0-1 整数計画問題として定式化した(3)式の特徴である．

1. x_0 以外の変数の目的関数の係数はすべて0である，
2. $(x_0, \boldsymbol{x})=(1, \boldsymbol{0})$ は(3)式の制約条件を満足する，
3. 係数行列の各成分 a_{ij} は $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$ である，

ことを利用して，一般の 0-1 整数計画問題に対する陰的列挙法を SAT 向きに見直し，計算の効率化を目指した IEMSAT を示す．

3.1 用語および諸記号の定義

2つの添え字集合 M, N をそれぞれ，$M=\{1,\cdots,m\}$，$N=\{1,\cdots,n\}$ とする．(3)式に対して $x_j\in\{0,1\}$，$\forall j\in N$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^t$ を解

と呼ぶ．さらに，（3）式中の制約条件 $x_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{Ax}\geq\boldsymbol{b}$ を満足する解を実行可能解と呼ぶ．また N の部分集合 J に対し，$x_j, j\in J$ の値を 0 または 1 に固定し，$x_j, j\in N-J$ は変数のままであるベクトル $\boldsymbol{x}$ を（3）式の部分解，もしくは単に部分解と呼ぶ．部分解 $\boldsymbol{x}$ が与えられたとき，値が 0 または 1 に固定されている変数の添え字集合を $J=J(\boldsymbol{x})$ と表す．部分解 $\boldsymbol{x}$ において，値が固定されていない変数 $x_j, j\in N-J(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ に対応する自由変数，もしくは単に自由変数という．自由変数のすべてを 0 または 1 に固定したものを完備解といい，特にすべての自由変数を 0 に固定したものを 0-完備解と呼ぶ．

また，実行可能解を探索する途中で調べる第 k 番目の部分解 $\boldsymbol{x}^k$ に対して，

$$
\begin{aligned}
P_k:\ \min\quad & x_0\\
\text{sub.to}\quad & x_0+\sum_{j\in N-J^k} a_{ij}x_j\geq b_i^k,\ \forall i\in M^k,\\
& x_0\in\{0,1\},\ x_j\in\{0,1\},\ \forall j\in N-J^k,\qquad (5)\\
& \text{ただし，}\ J^k=J(\boldsymbol{x}^k),\\
& b_i^k=b_i-\sum_{j\in J^k} a_{ij}x_j^k\ \text{である，}
\end{aligned}
$$

を，（3）式の第 k 部分問題，もしくは単に部分問題と呼ぶ．ここで M^k は元問題の制約式番号集合 M の部分集合である．なお（3）式の問題は，$M^1=M, J=\phi$ である第1部分問題と考え P_1 と呼ぶ．

3.2 実行可能解の探索に関連する諸定理

（1）式の SAT と（3）式の 0-1 整数計画問題の間には，『基礎節集合（1）式が充足可能であればまたそのときに限り，$x_0=0$ となる実行可能解が（3）式に存在する．』という関係がある．そこで IEMSAT では，以下の諸定理を用いて $x_0=0$ となる実行可能解の探索を行う．なお，各定理の証明は付録に示す．

［定理1］（実行可能解の存在に関する定理）

部分問題 P_k において，$b_i^k\leq 0, \forall i\in M^k$ または $M^k=\phi$ ならば，部分解 $\boldsymbol{x}^k$ の 0-完備解は，$x_0=0$ となる実行可能解である．

［定理2］（実行可能解の非存在に関する定理）

部分問題 P_k において，$s_i<0$ となる $i\in M^k$ が存在すれば，$\boldsymbol{x}^k$ の完備解の中に $x_0=0$ となる実行可能解は存在しない．ただし，

$$s_i=\sum_{j\in N-J^k}\max\{0,a_{ij}\}-b_i^k, \qquad (6)$$

である．

［定理3］（自由変数の値に関する定理）

$\tilde{\boldsymbol{x}}^k$ を $x_0=0$ となる実行可能な $\boldsymbol{x}^k$ の完備解とする．このとき，$i\in R, h\in N-J^k$ に対して，$a_{ih}=1$ ならば $\tilde{x}_h^k=1$，$a_{ih}=-1$ ならば $\tilde{x}_h^k=0$ でなくてはならない．ただし，

$$R=\{i\in M^k\,|\,s_i=0\}, \qquad (7)$$

である．

［系4］（実行可能解の非存在に関する系）

$\boldsymbol{x}^k$ の完備解で，$x_0=0$ となる実行可能解は，$x_j=1, \forall j\in Q_+^k$；$x_j=0, \forall j\in Q_-^k$ をみたさなくてはならない．したがって，$Q_+^k\cap Q_-^k\neq\phi$ ならば $\boldsymbol{x}^k$ の完備解で実行可能なものは存在しない．ただし，

$$
\begin{aligned}
Q_+^k&=\{h\in N-J^k\,|\,a_{ih}=1, i\in R\},\\
Q_-^k&=\{h\in N-J^k\,|\,a_{ih}=-1, i\in R\},
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

である．

一般の 0-1 整数計画問題に対する陰的列挙法では，解の探索途中に，自由変数の値によらず成り立つ制約式を除去する処理は含まれていない．これは，ある制約式が自由変数の値によらず成り立つか否かを判定することはそれ自体が多くの計算を要することであるためである．

しかし，SAT を 0-1 整数計画問題として定式化した場合，以下の定理5によりその判定を容易に行うことが可能で，部分問題の生成時に制約式を除去することができる．

［定理5］（制約式の除去に関する定理（1））

部分問題 P_k の自由変数の値を固定して新しい部分問題を生成する際に，ある制約式において係数が1の自由変数の値を1に固定するか，もしくは係数が -1 の自由変数を0に固定するのであれば，固定後その制約式は他の自由変数の値によらず常に成り立つことになる．したがって，新しい部分問題においてその制約式を取り除くことができる．

また，以下の定理6によりさらに制約式の除去が可能となる．

［定理6］（制約式の除去に関する定理（2））

部分問題 P_k のある自由変数 x_k に対し，

$$a_{ik}=1\ \text{もしくは}\ a_{ik}=0\quad \forall i\in M^k, \qquad (9)$$

または，

$$a_{ik}=-1\ \text{もしくは}\ a_{ik}=0\quad \forall i\in M^k, \qquad (10)$$

であれば，その x_k を含む制約式を P_k から削除することができる．このとき x_k の値は，（9）式が成り立てば1，（10）式が成り立てば0とする．

3.3 IEMSAT アルゴリズム

前節で示した定理および系に基づく IEMSAT を**図1**に示す．

まず，S 1 で基礎節集合 S を(3)式の問題に定式化する．その際，S 中に含まれる可能性がある $p \vee \neg p$ のトートロジーを含む基礎節を制約式として表すことはできないが，その基礎節は必ず真とすることができるので除いて考える．

そして，S 2〜S 5 で元問題を P_1 とするための処理を行い，S 6〜S 24 の **while** ループで $x_0=0$ なる解の探索を行う．

この **while** ループの部分は探索の一般形を示しており，S 21 の部分問題の選択方法によって種々の探索戦略が可能となる．例えば，部分問題としてPの中で加えられた順序が最も古い問題を選択すると幅優先探索となり，最も新しく加えられた問題を選択すると深さ優先探索となる．

```
S1:  節集合 S を 0–1 整数計画問題として定式化し，元問題とする;
S2:  部分問題の集合 P ← φ;
S3:  k ← 1;
S4:  P_k ← 元問題;
S5:  P_k より削除可能な制約式を削除する([定理 6]);
S6:  while (P_k の 0–完備解が実行可能でない([定理 1])) do begin
S7:    if (P_k に実行可能解が存在する可能性がある([定理 2],[系 4])) then
S8:      if (値を固定しなければならない自由変数が存在する([定理 3])) then begin
S9:        Q ← 部分解にそれらの変数を加えた部分問題([定理 5]);
S10:       Q より削除可能な制約式を削除する([定理 6]);
S11:       P ← P ∪ {Q}
S12:     end else begin
S13:       自由変数を 1 つ選択する(y とする);
S14:       Q_1 ← y = 0 を部分解に加えた部分問題([定理 5]);
S15:       Q_2 ← y = 1 を部分解に加えた部分問題([定理 5]);
S16:       Q_1 および Q_2 より削除可能な制約式をそれぞれ削除する([定理 6]);
S17:       P ← P ∪ {Q_1} ∪ {Q_2}
S18:     end;
S19:   if (P ≠ φ) then begin
S20:     k ← k + 1;
S21:     P より部分問題 P_k を 1 つ選択し，P ← P − {P_k} とする
S22:   end else
S23:     S は充足不能と判定され終了
S24: end;
S25: S は充足可能と判定され終了
```

図 1 陰的列挙法に基づく SAT アルゴリズム．
Fig. 1 A SAT algorithm based on Implicit Enumeration Method.

3.4 例　　題

IEMSAT による充足可能性判定の例を示す．例として，(2)式の基礎節集合を考える．

まずアルゴリズムの S 1 により，この問題を 0-1 整数計画問題として定式化すると(4)式となる (P_1)．そして S 5 で，定理 6 に基づき制約式の削除を試みるが，削除可能な制約式は存在しないので P_1 は(4)式のままとなる．以下 S 6〜S 24 で $x_0=0$ なる実行可能解の探索を行う．その探索の過程を以下に示す．

(1) $k=1$ のとき：

$\boldsymbol{b}^1=(b_1^1, b_2^1, b_3^1, b_4^1, b_5^1, b_6^1)^t=(1, 0, 0, -1, -1, 0)^t$ であるから，定理 1 より 0-完備解は実行可能解ではないことになる．そこで $s_i, \forall i \in M^1$ を調べると，$\boldsymbol{s}=(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)=(0, 3, 2, 3, 2, 2)$ となり，$s_i \geq 0, \forall i \in M^1$ であるから，定理 2 よりこの部分問題に実行可能解が存在する可能性があることが判明する．またこの結果 $s_1=0$ であることから $R=\{1\}$ となり，定理 3 より x_1 の値を 1 に固定しなければならないことになる．そこで，$x_1=1$ とし，それ以外は変数のままである部分解に対応する部分問題を生成する．このとき，定理 5 より P_1 中の第 1, 2, 3 制約式が削除可能となり (S 9)，また削除後の問題において，定理 6 より自由変数 x_5 を含む第 4 制約式が削除可能となる (S 10)．このとき x_5 の値は 1 に固定される．この結果生成される部分問題は，

$$\begin{aligned} \min \quad & x_0 \\ \text{sub.to} \quad & x_0 - x_2 + x_4 - x_6 \geq -1, \\ & x_0 + x_2 - x_4 + x_6 \geq 0, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \ \forall j \in \{0, 2, 4, 6\}, \end{aligned} \tag{11}$$

となり，この問題をPに加える (S 11)．

次に，$\mathrm{P} \neq \phi$ であるから新しい部分問題を 1 つ選択する．ここでは部分問題として選択可能なものは 1 つであるから P_2 として(11)式の問題を選択し，Pからこの問題を取り除く (S 21)．なお，P_1 から P_2 を生成する際に制約式を除去したので $M^2=\{5, 6\}$ である．

(2) $k=2$ のとき：

P_2 において $\boldsymbol{b}^2=(b_5^2, b_6^2)=(-1, 0)^t$ で，$b_i^2 \leq 0, \forall i \in M^2$ より 0-完備解 $\boldsymbol{x}=(1, 0, 0, 0, 1, 0)^t$ は実行可能解となる．したがって，(4)式の SAT は充足可能と決定され，その際の原子論理式への真偽の割り当ては，$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)=$ (真, 偽, 偽, 偽, 真, 偽) となる．

4. IEMSAT と Davis-Putnam の関係

Davis-Putnam の方法は，トートロジー規則，1-リテラル規則，純-リテラル規則，分割規則，の 4 つの規則から構成されている[2]．これら 4 つの規則による処理と IEMSAT の処理の間には，**図 2** に示すように，

1. 定理 1 に基づく 0-完備解の処理は，IEMSAT に

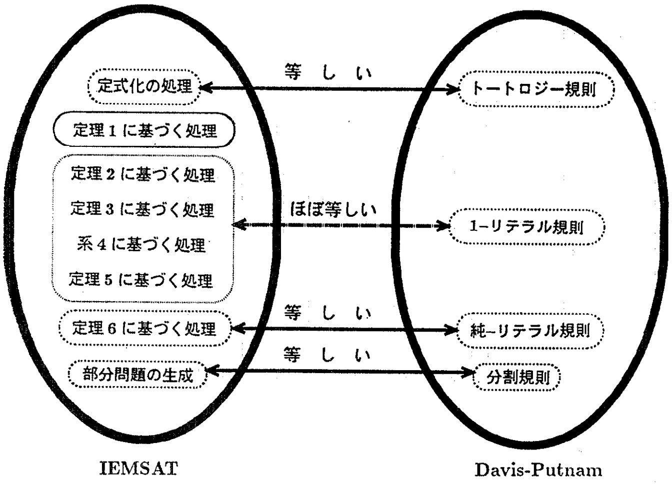


図 2　IEMSAT と Davis-Putnam の関係
Fig. 2　Some relations between IEMSAT and Davis-Putnam.

特有である，

2. IEMSAT は，Davis-Putnam のトートロジー規則を含む，
3. IEMSAT の定理6に基づく処理（図1の S5, S10, S16）は，Davis-Putnam の純-リテラル規則と等しい．
4. IEMSAT の定理2，3，系4および定理5に基づく処理は，Davis-Putnam の 1-リテラル規則とほぼ等しい，
5. IEMSAT における部分問題の生成（図1の S14 と S15）は，Davis-Putnam の分割規則と等しい，

という関係がある．以下，これらの関係について詳細に述べる．

4.1　関係 1. について

IEMSAT では具体的な実行可能解を求めることで与えられた SAT の充足可能性を判定しており，実行可能解の1つとして定理1に基づく 0-完備解を考えている．

これに対して Davis-Putnam では，SAT の充足可能性を決定することに重点が置かれており，具体的な解は4つの規則の適用による副産物として求めることができる．このため，0-完備解に準ずる処理は Davis-Putnam には含まれていない．

しかし，次の規則により，0-完備解と同様の処理を Davis-Putnam に加えることは可能である．

負のリテラル規則：S 中のすべての基礎節に少なくとも1つ負のリテラルが存在すれば，S は充足可能である．

この規則は，P. Purdom のアルゴリズムの Probe 規則を特殊化したものである[16]．

4.2　関係 2. について

Davis-Putnam のトートロジー規則では，SAT を節形式に限定しているので，$L \vee \neg L$ の形式のトートロジーを扱うことになる．

一方，IEMSAT では，3.4 節でも述べたように，(4)式の問題の形式より，1つの制約式に同じ変数で符号の違うものを同時に含めることはできない．したがって，$L \vee \neg L$ の形式のトートロジーを含んだ基礎節を制約式として扱うことはできない．

そこで問題の定式化の際に，$L \vee \neg L$ の形式を含んだ基礎節を除去している．このように前処理として，$L \vee \neg L$ の形式のトートロジーを含んだ基礎節を除去しておくと，探索の途中で新たにこの形式のトートロジーが現れることはない．

4.3　関係 3. について

純-リテラル規則では，純-リテラルを含む節を基礎節集合から取り除く処理を行う．

一方，IEMSAT では，定理6により，非0の係数がすべて同一の符号である自由変数の値を固定し，その変数を含む制約式を定理5に基づいて削除する．この処理は，明らかに純-リテラル規則と等しい．

4.4　関係 4. について

IEMSAT の定理2, 3, 系4および定理5に基づく処理は，各制約式に対する(6)式の s_i の値に基づくもので，特に $s_i=0$ となっている制約式に着目した処理が中心である．

$s_i=0$ となるのは，$\sum_{j \in N-J^k} \max\{0, a_{ij}\} \geq 0$ かつ $b_i^k \leq 1$ より

1. $\sum_{j \in N-J^k} \max\{0, a_{ij}\} = 1$ かつ $b_i^k = 1$,
2. $\sum_{j \in N-J^k} \max\{0, a_{ij}\} = 0$ かつ $b_i^k = 0$,

のいずれかの場合である．

まず 1. の場合，$\sum_{j \in N-J^k} \max\{0, a_{ij}\} = 1$ より正のリテラルが1つ存在し，$b_i^k = 1$ より負のリテラルが存在しないことになる．つまりこの制約式に対応する基礎節は，正のリテラル1つからなる単位基礎節である．

また 2. の場合，$\sum_{j\in N-J^k}\max\{0, a_{ij}\}=0$ より正のリテラルが存在しないことになる．一方負のリテラルは，存在する場合としない場合があり得る．負のリテラルが存在する場合，$b_i^k=0$ よりその数は1個となり，この制約式は，負のリテラル1つからなる単位基礎節に対応していることになる．

また負のリテラルが存在しない場合，この基礎節は正のリテラルも負のリテラルも存在しないことから空節であることになる．しかし，$b_i^k=0$ よりこの制約式はすでに満足されていることになる．

以上の $s_i=0$ となる制約式と単位基礎節の対応より，IEMSAT の定理2，3，系4および定理5に基づく処理と Davis-Putnam の1-リテラル規則による処理とは，次のような関連があることになる．

(1) IEMSAT で定理3と系4により求める集合 Q_+^k および Q_-^k は，正および負のリテラルからなる単位基礎節集合を求めることに対応している．そして Q_+^k と Q_-^k に共通の要素があれば実行可能が存在しないと結論することは，Davis-Putnam において単位基礎節 L と $\neg L$ から空節が導かれ充足不能となることに対応している．

(2) IEMSAT において，Q_+^k および Q_-^k に含まれる添え字番号に対応する自由変数をそれぞれ1および0に固定し，さらに定理5に基づき制約式を削除することは，Davis-Putnam において単位基礎節 L を含むすべての基礎節を S から取り除いて S' を作る処理を S 中のすべての単位基礎節に対してまとめて行うことに対応している．

また，Davis-Putnam において単位基礎節Lが存在するときに $\neg L$ を消去することは，IEMSAT では，単位基礎節に対応する自由変数の値を固定することにより行っている．

(3) IEMSAT において，定理2により $s_i<0$ となって実行可能解が存在しないと結論することは，Davis-Putnam の 1-リテラル規則を何度か適用して上述の空節が導かれることに対応している．

この対応を例を用いて説明する．基礎節集合が

$$S=\{\neg p_1, p_2, p_1\vee\neg p_2\}, \tag{12}$$

の場合，対応する制約式集合は，

$$\{x_0-x_1\geq 0, x_0+x_2\geq 1, x_0+x_1-x_2\geq 0\}, \tag{13}$$

となる．IEMSAT では，1番目と2番目の制約式において s_1 と s_2 が0となり，x_1, x_2 の値をそれぞれ0および1に固定することになる．このため3番目の制約式が $x_0\geq 1$ となり，この制約式では $s_3=-1$ となって $x_0=0$ となる実行可能解が存在しないと結論される．

これに対して Davis-Putnam では，S に 1-リテラル規則を2度適用すると空節が導かれ，S は充足不可能と結論される．

以上のような関連より，IEMSAT の定理2，3，系4および定理5に基づく処理は，Davis-Putnam の 1-リテラル規則による処理とほぼ等しいことがわかる．両者の違いは，IEMSAT では，『単位基礎節の処理をまとめて行う』，ことである．

4.5 関係 5. について

Davis-Putnam の分割規則は以下のとおりである．

分割規則：A_i, B_i, R が L, $\neg L$ を含まないで，基礎節集合 S が $S=(A_1\vee L)\wedge\cdots\wedge(A_m\vee L)\wedge(B_1\vee\neg L)\wedge\cdots\wedge(B_n\vee\neg L)\wedge R$ の形式でかけるとき，$S_1=A_1\wedge\cdots\wedge A_m\wedge R$ と $S_2=B_1\wedge\cdots\wedge B_n\wedge R$ に分ける．すると，S が充足不可能であることと S_1 と S_2 がともに充足不可能であることが同値となるので，S_1 と S_2 それぞれに Davis-Putnam の各規則を再度適用する．

IEMSAT の部分問題の生成（図1の S13〜S17）において上記の分割規則の L に対応する変数を y とすると，$y=0$ とした部分問題および $y=1$ とした部分問題がそれぞれ Davis-Putnam の S_1 および S_2 に対応する．

例として以下の基礎節集合 S の充足可能性を調べる場合を考える．

$$S=\{p_1\vee p_2\vee p_3, \neg p_1\vee p_2\vee\neg p_3, \neg p_2\vee\neg p_3\}. \tag{14}$$

このとき，トートロジー，1-リテラル，純-リテラルが存在しないので，Davis-Putnam では分割規則を適用することになる．$L=p_1$ として Davis-Putnam の分割規則を適用すると，

$$\begin{aligned} S_1&=\{p_2\vee p_3, \neg p_2\vee\neg p_3\},\\ S_2&=\{p_2\vee\neg p_3, \neg p_2\vee\neg p_3\}, \end{aligned} \tag{15}$$

となる．

一方，S に対応する 0-1 整数計画問題は，

$$\begin{array}{ll} \min & x_0 \\ \text{sub.to} & x_0+x_1+x_2+x_3\geq 1, \\ & x_0-x_1+x_2-x_3\geq -1, \\ & x_0-x_2-x_3\geq -1, \\ & x_j\in\{0,1\},\ \forall j\in\{0,1,2,3\}, \end{array} \tag{16}$$

となり，図1のアルゴリズムの処理を進めると，$y=x_1$ として部分問題を生成することになる．$y=0$ とした部分問題が，

$$\begin{aligned}&\min && x_0 \\ &\text{sub.to} && x_0 + x_2 + x_3 \geq 1, && (17)\\ &&& x_0 - x_2 - x_3 \geq -1, \\ &&& x_j \in \{0,1\},\ \forall j \in \{0,2,3\},\end{aligned}$$

$y=1$ とした部分問題が,

$$\begin{aligned}&\min && x_0 \\ &\text{sub.to} && x_0 + x_2 - x_3 \geq 0, \\ &&& x_0 - x_2 - x_3 \geq -1, && (18)\\ &&& x_j \in \{0,1\},\ \forall j \in \{0,2,3\},\end{aligned}$$

となる.

4.6 関係の総括

4.1節～4.5節で述べたIEMSATとDavis-Putnamの関係をまとめると

IEMSAT≈Davis-Putnam＋負のリテラル規則

となる．このことは，一般の0-1整数計画問題に対する方法として提案された陰的列挙法を，SATを0-1整数計画問題として定式化した場合の特徴を利用してアルゴリズムを特殊化することで,SATのアルゴリズムとして提案された記号的方法であるDavis-Putnamの方法とほぼ同じものが導けたことを示すものである.

5. 計算機実験

5.1 実験方法

IEMSATの有効性を検証するために計算機実験を行った．実験では,IEMSATならびにDavis-Putnamのプログラムを Sun SPARC Station ELC (主記憶: 16 MB, 性能: 21 MIPS) 上で以下のように開発した.

- IEMSATにおける探索戦略は，使用メモリーを少なく押さえることができかつプログラム記述が比較的容易な縦型探索とした.
- IEMSATのインプリメンテーションは記号処理の必要がないことからC言語で行った.
- Davis-Putnamのインプリメンテーションは記号処理が中心であることから Common Lisp 言語で行った.

実験では，文献12)のランダムSATと同じ問題を用い，サイズの小さな問題に対しては各サイズ5題をIEMSATおよびDavis-Putnamで解き，またサイズの大きな問題に対しては各サイズ20題をIEMSATで解きそれぞれ計算時間を測定した.

5.2 結果と考察

実験結果を**表1**と**表2**に示す．表1はサイズの小さな問題の実験結果で，Tの欄は各サイズ5題の問題を解いた結果充足可能であった問題数，時間の欄は計算時間の平均値（単位は秒）である．また表2はサイズの大きな問題の実験結果で，IEMSATで解いた場合の計算時間の平均値（単位は秒）とKamathらによる同様の実験の結果[9]を示す．Kamathらの実験は，並列/ベクトル計算機KORBX（性能：ベクトル化により1 MFlopsから32 MFlops),OSはUNIXの変種であるKORBX OS上で，KORBX FORTRANおよびKORBX C言語を用いて行っている．なお，Kamathらが用いた問題は，今回の実験で用いた問題とサイズおよび作成方法はほとんど同じであるが,

表1 数値実験結果1
Table 1 Computational results 1.

問題 リテラル数	節数	T*	時間(s) IEMSAT	Davis-Putnam
30	50	5	0.003	0.012
	100	5	0.001	0.028
	150	0	0.093	0.610
	200	0	0.063	0.492
50	100	5	0.017	0.042
	150	5	0.017	0.168
	200	5	0.190	1.072
	250	0	0.603	5.380
70	150	5	0.017	0.090
	200	5	0.077	1.452
	250	5	0.337	0.952
	300	2	9.290	55.070

* T は，5題の問題の中で充足可能であった問題数を示す.

表2 数値実験結果2
Table 2 Computational results 2.

問題 リテラル数	節数	L*	時間(s) IEMSAT	Kamath
200	400	7	0.04	3.5
400	800	10	0.04	5.6
400	800	7	0.14	7.8
500	1000	10	0.06	7.4
1000	2000	10	0.43	18.5
		7	0.81	21.5
		3	0.97	50.4
1000	4000	10	1.33	25.1
1000	8000	10	3.09	38.0
1000	16000	10	6.78	66.4
1000	32000	10	14.14	232.4

* L は，1つの節中のリテラル数を示す.

問題の作成で用いた乱数が異なると考えられるため，まったく同一の問題ではないと考えられる．

実験結果より，サイズの小さい問題に対して IEMSAT は Davis-Putnam に比べてすべての問題を高速に解いており，大部分の問題に対して 10 倍以上高速であることがわかる．IEMSAT では，1）実行可能解を積極的に求める，2）単位基礎節の処理をまとめて行う，ことにより，Davis-Putnam に対するこのような高速性を達成したと考えられる．

また，サイズの大きな問題に対しては，Kamath らが行った実験とは実験環境およびテスト問題が異なるため絶対的な評価を行うことはできないが，すべての問題を 10 倍以上高速に解いていることがわかる．この 10 倍以上という値は，Kamath らの方法が上述の並列／ベクトル計算機上でその計算機の性能を十分に生かすような特殊なコードの開発が行われていると考えられることと，IEMSAT が一般的なワークステーション上で開発されていることを考え合わせると，実験で用いた問題は異なるが十分評価できる値と考えられる．

以上の結果より，今回提案した IEMSAT は SAT に対して問題のサイズによらず有効な方法と考えられる．

6. おわりに

本論文では，陰的列挙法に基づく新しい SAT アルゴリズムとして IEMSAT を提案した．

そして，SAT に対する記号的方法である Davis-Putnam の方法との関係を詳細に調べ，IEMSAT で行われる処理と Davis-Putnam の 4 つの規則の対応付けを行った．この結果は，一般の 0-1 整数計画問題に対する陰的列挙法を SAT 向きに特殊化することで，Davis-Putnam の方法とほぼ同じものが導けたことを示すものである．IEMSAT と Davis-Putnam では，

1. 単位基礎節をまとめて処理するか 1 つずつ処理するか，
2. 実行可能解を積極的に求めるか否か，

の 2 つの点が異なる．

また，提案アルゴリズムの有効性を検証するための計算機実験を行い，IEMSAT が SAT に対して有効な方法であることを示した．

今後の検討課題として，

- 自由変数の選択方法の検討，
- 探索における枝刈りを行うための代理制約式の作成方法の検討，

等がある．

参考文献

1) Davis, M. and Putnam, H.: A Computing Procedure for Quantification Theories, *J. ACM*, Vol. 7, pp. 201-215 (1960).

2) Chang, C. and Lee, R. C.: *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, Orland (1973). 長尾, 辻井訳：コンピュータによる定理の証明，日本コンピュータ協会，東京 (1983).

3) Hooker, J. N.: A Quantitative Approach to Logical Inference, *Decision Support Systems*, Vol. 4, pp. 45-69 (1988).

4) Jeroslow, R. G.: *Logic-Based Decision Support: Mixed Integer Model Formulation*, North-Holland, Amsterdam (1989).

5) Hooker, J. N.: Resolution vs. Cutting Plane Solution of Integer Problems: Some Computational Experience, *Operations Research Letters*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-7 (1988).

6) Hooker, J. N.: Generalized Resolution and Cutting Planes, *Ann. of Oper. Res.*, Vol. 12, pp. 217-239 (1988).

7) Hooker, J. N.: Input Proofs and Rank One Cutting Planes, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 1, No. 3, pp. 137-145 (1989).

8) Hooker, J. N. and Fedjki, C.: Branch-and-Cut Solution of Inference Problems in Propositional Logic, *Ann. of Mathematics and Artificial Intelligence*, Vol. 1, pp. 123-139 (1990).

9) Kamath, A. P., Karmarkar, N. K., Ramakrishman, K. G. and Resende, M. G. C.: Computational Experience with an Interior Point Algorithm on Satisfiability Problem, *Ann. of Oper. Res.*, Vol. 25, pp. 43-58 (1990).

10) 今井 浩，大前剛志：0-1 整数計画問題における実数ベクトルの整数ベクトルへの丸め，情報処理学会研究会資料，92-AL-27-4 (1992).

11) Balas, E.: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables, *Oper. Res.*, Vol. 13, pp. 517-546 (1965).

12) 大柳俊夫，大内 東：論理的推論問題に対する数理計画法の適用，第 4 回 RAMP シンポジウム論文集，pp. 175-183 (1992).

13) Blair, C. E., Jeroslow, R. G. and Lowe, J. K.: Some Results and Experiments in Programming Techniques for Propositional Logic, *Comput. and Oper. Res.*, Vol. 13, No. 5, pp. 633-645 (1986).

14) Jeroslow, R. G.: Computation-oriented Reductions of Predicate to Propositional Logic, *Deci-*

sion Support Systems, Vol. 4, pp. 183-197 (1988).
15) Selman, B., Levesque, H. and Mitchell, D.: Solving Hard Satisfiability Problems, *Proc. of AAAI-92*, pp. 440-446 (1992).
16) Buro, M. and Büning, H. K.: Report on a SAT Competition, *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, No. 49, pp. 143-151 (1993).

付 録

［定理 1 の証明］

部分問題 P_k の制約条件は（5）式のとおりで，$\boldsymbol{x}^k$ の 0-完備解に対し，$x_0+\sum_{j\in N-J^k} a_{ij}x_j=x_0\geq 0, \forall i\in M^k$, である．したがって，$b_i^k\leq 0, \forall i\in M^k$ であればすべての制約式を満足する．つまり，$\boldsymbol{x}^k$ の 0-完備解は $x_0=0$ となる P_k の実行可能解となる．また $M^k=\phi$ のときは，制約式は存在しないので自明である（証明終）．

［定理 2 の証明］

$\boldsymbol{x}^k$ の完備解の中に実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{x}}^k$ が存在するとする．すると，元問題（3）式の制約条件は，

$$\begin{aligned} x_0+\sum_{j\in N} a_{ij}\tilde{x}_j^k &= x_0+\sum_{j\in J^k} a_{ij}\tilde{x}_j^k+\sum_{j\in N-J^k} a_{ij}\tilde{x}_j^k \\ &= x_0+b_i+\sum_{j\in N-J^k} a_{ij}\tilde{x}_j^k-b_i^k \\ &\leq x_0+b_i+s_i, \end{aligned} \tag{19}$$

となる．ここで，$x_0=0$ とすると，$s_i<0$ なる制約に対して

$$x_0+\sum_{j\in N} a_{ij}\tilde{x}_j^k\leq x_0+b_i+s_i<b_i, \tag{20}$$

となり，$\tilde{\boldsymbol{x}}^k$ が実行可能解であることと矛盾する（証明終）．

［定理 3 の証明］

$\tilde{\boldsymbol{x}}^k$ に対して，元問題（3）式の制約条件は，

$$\begin{aligned} x_0+\sum_{j\in N} a_{ij}\tilde{x}_j &= x_0+\sum_{j\in J^k} a_{ij}\tilde{x}_j^k \\ &\quad +\sum_{j\in N-J^k-\{h\}} a_{ij}\tilde{x}_j^k+a_{ih}\tilde{x}_h^k \\ &\leq x_0+b_i-b_i^k \\ &\quad +\sum_{N-J^k-\{h\}} \max(0, a_{ij})+a_{ih}\tilde{x}_h^k \\ &= x_0+b_i+s_i-\max(0, a_{ih})+a_{ih}\tilde{x}_h^k, \\ &= b_i+a_{ih}\tilde{x}_h^k-\max(0, a_{ih}), \end{aligned} \tag{21}$$

となる．したがって，$\tilde{\boldsymbol{x}}^k$ が実行可能解であるためには，$a_{ih}\tilde{x}_h^k-\max(0, a_{ih})\geq 0$ となる必要がある．よって，$a_{ih}=1$ ならば $\tilde{x}_h^k=1$，$a_{ih}=-1$ ならば $\tilde{x}_h^k=0$, でなくてはならない（証明終）．

［系 4 の証明］

定理 3 より自明である（証明終）．

［定理 5 の証明］

部分問題 P_k の制約式は，一般に，

$$x_0+\sum_{j\in N_+^k} x_j-\sum_{j\in N_-^k} x_j\geq 1-|N_-^k| \tag{22}$$

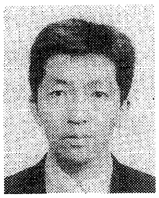
という形式となっている．ここで，N_+^k および N_-^k は係数がそれぞれ 1 および -1 である自由変数の添え字集合である．まず，係数が 1 の自由変数（添え字を k とする）の値を 1 に固定する場合を考えると，(22)式の左辺は，$x_0=0$, $x_j=0$ $(\forall j\in N_+^k-\{k\})$, $x_k=1$, $x_j=1$ $(\forall j\in N_-^k)$, のとき最小値 $1-|N_-^k|$ となり，この値は右辺と一致する．また，係数が -1 の自由変数（添え字を k とする）の値を 0 に固定する場合を考えると，(22)式の左辺は，$x_0=0, x_j=0$ $(\forall j\in N_+^k)$, $x_k=0$, $x_j=1$ $(\forall j\in N_-^k-\{k\})$, のとき最小値 $-(|N_-^k-\{k\}|)=1-|N_-^k|$ となり，この値は右辺と一致する．

このことから，値の固定後その制約式は他の自由変数の値によらず常に成り立つことになり，新しい部分問題において取り除くことができる（証明終）．

［定理 6 の証明］

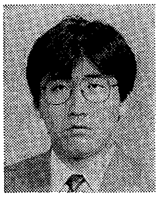
（9）式が成り立つ場合，すべての制約式で自由変数 x_k は正のリテラルに対し，(10)式が成り立つ場合は負のリテラルに対応していることになる．したがって，x_k の値を正のリテラルに対応するとき 1，負のリテラルに対応するとき 0 とすると，定理 5 より x_k を含む制約式は除去することが可能となる（証明終）．

（平成 5 年 5 月 24 日受付）
（平成 5 年 9 月 8 日採録）



大柳 俊夫（正会員）

昭和 37 年生．昭和 60 年北海道大学工学部電気工学科卒業．同年，北海道大学工学部電気工学科助手．昭和 62 年同情報工学科助手．平成 5 年札幌医科大学保健医療学部講師，現在に至る．システム工学の研究に従事．日本 OR 学会，ACM 各会員．



山本 雅人（正会員）

昭和 43 年生．平成 3 年北海道大学工学部情報工学科卒業．平成 5 年北海道大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．現在，同博士課程在学中．システム工学の研究に従事．人工知能学会会員．

大内　東（正会員）

昭和20年生．昭和49年北海道大学大学院工学研究科博士課程修了．工学博士．北海道大学工学部情報工学科教授．システム情報工学，応用人工知能システム，医療システムの研究に従事．人工知能学会，電子情報通信学会，計測自動制御学会，日本OR学会，医療情報学会，病院管理学会，IEEE-SMC 各会員．