連立一次方程式の真の解の下界と上界の精度保証付き数値計算法について

南畑 淳史 [1], 荻田 武史 [2,4], 大石 進一 [3,4]
[1] 早稲田大学 基幹理工学部, [2] 東京女子大学 現代教養学部，[3] 早稲田大学 理工学術院, [4]JST, CREST
e-mail : aminamihata@moegi.waseda.jp

1 概要

連立一次方程式

$$Ax = b$$

の数値解 $\tilde{x}$ と真の解 x^* との誤差をコンピュータを用いて厳密に評価することが本論文の目的である。連立一次方程式の数値解に対する誤差評価手法は

$$||x - \tilde{x}||_\infty < \epsilon. \tag{1}$$

もしくは、

$$|x_i - \tilde{x_i}| \le \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

のように評価されることが多い。もし、可能であるならば

$$\epsilon_{Li} \le x_i - \tilde{x_i} \le \epsilon_{Ui}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

と評価出来る事が望ましい。しかしながら、連立一次方程式の誤差評価手法は (2) の手法が主に開発されている。本論文では (3) の下界と上界を高速に求める方法を提案する。

2 H 行列の性質を用いた誤差評価法

近似逆行列を R として、$RAx = Rb$ と置き換えれば、$RA \approx I$ より RA が H 行列になることが期待できる。そのため、H 行列の性質を用いた誤差評価法は A が特別な性質を持たない場合にも応用が可能という側面を持っている。この章ではまず S.M.Rump により提案された定理 [1] を紹介する。

定理 1 (Rump [1]) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と $b, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ が与えられているとする。$\langle A\rangle$ を A の比較行列とする。$v \in \mathbb{R}^n$ が $v > \mathbf{0}$ かつ $u := \langle A\rangle v > \mathbf{0}$ を満たしていると仮定する。$\langle A\rangle$ の対角行列を D、非対角行列を $-E$ とし、$w \in \mathbb{R}^n$ を $w_k := \max_{1\le i\le n} \frac{G_{ik}}{u_i}$ for $1 \le k \le n$, とする。ただし、$G := I - \langle A\rangle D^{-1} = ED^{-1} \ge O$ とする。このとき、A は正則で、

$$|A^{-1}| \le (D^{-1} + vw^T), \tag{4}$$

$$|A^{-1}\tilde{x} - b| \le (D^{-1} + vw^T)|b - A\tilde{x}|. \tag{5}$$

定理 1 は M 行列の性質を用いて、(4) を導き、誤差評価式を構築している。次に、提案する定理を紹介する。

定理 2 $b, \tilde{x}, v, w$ を定理 *1* で定義したものと同じとする。A を対角成分が正である H 行列と仮定する。$\hat{u} := Av$、$\Delta := \hat{u}w^T - (I - AD^{-1})$、$c := (D^{-1} + vw^T)\hat{u} - v$ と定義する。このとき、

$$(D^{-1} + vw^T)(b - A\tilde{x}) - \alpha_L c \le x^* - \tilde{x},$$

$$x^* - \tilde{x} \le (D^{-1} + vw^T)(b - A\tilde{x}) - \alpha_U c,$$

ただし、$\alpha_L = \max(\max(0, (b-A\tilde{x}))./\hat{u})$, $\alpha_U = \min(\min(0, (b - A\tilde{x}))./\hat{u})$ とする。

定理 2 は $A^{-1}\Delta$ が正であるという性質を用いて、誤差評価式を構築している。

定理 3 $A, b, \tilde{x}, v, w, \hat{u}, \Delta$ を定理 *2* で定義したものと同じとする。このとき、$m \in \mathbf{N}$ として、$x^* - \tilde{x}$ の下界は、

$$(D^{-1}+vw^T)((b-A\tilde{x})+ \sum_{i=1}^{2m-1} (-1)^i\Delta^i \max(0, (b-A\tilde{x}))),$$

であり、$x^* - \tilde{x}$ の上界は、

$$(D^{-1}+vw^T)((b-A\tilde{x})+ \sum_{i=1}^{2m-1} (-1)^i\Delta^i \min(0, (b-A\tilde{x}))).$$

定理 3 は与えられた行列 (H 行列) の逆行列の下界を求める方法を導きだし、$A^{-1}\Delta$ が正であるという性質を用いて、誤差評価式を構築している。ポスターでは詳しい証明とどのような条件下で定理 1 よりも提案手法が効果的なのかを詳しく解説する予定である。

参考文献

[1] S. M. Rump, Accurate solution of dense linear systems, Part II: Algorithms using directed rounding, *J. Comp. Appl. Math.*, 242:185-212, 2013