ナンバープレースの問題の難易度に関する考察

芳賀　将至[†]　力武　克彰[†]　佐藤　貴之[‡]
仙台高等専門学校[†]　北九州市立大学[‡]

1. 研究背景と目的

人がパズルの問題を解いた時，「この問題は簡単である」，「この問題は難しい」といった感想を持つ．この感想に対し，「なぜ問題ごとに感じる難易度が異なるのか」，「人の感じる難しいとは何か」という疑問が生じる．本研究では，ペンシルパズル「ナンバープレース」を対象とし，ナンバープレースの各問題がもつ数学的特徴と，人が問題を解く際に感じる難易度との関連性を明らかにすることを目的とする．

2. 研究概要

問題の持つ数学的特徴の解析と，人が問題を解く際の観点を明らかにすることが必要になる．

数学的特徴の解析においては，解に至るまでの過程をグラフとして捉える．グラフに対していくつかの視点から解析を行うことで，問題の難易度と関連すると思われる特徴を提示する．

人が問題を解く際に感じる難易度については，実際に人にナンバープレースを解いてもらう．問題を解く思考過程や動きについて質的解析を行い，人が問題を解く際の観点を明らかにする．

3. 解析する問題について

本稿では，数字が埋められた盤面を「局面」，局面に存在する数字を「ヒント」，ヒントの数を「ヒント数」と呼ぶことにする．また，「問題」は，局面から得られる解局面が一意に定まり，後述する制約条件を満たすものとする．

3.1. 盤面のサイズ

9×9 サイズのナンバープレースでは，解局面のパターンが約 6.67×10^{21} 個存在する[1]．このサイズでは全ての問題に対してのデータ収集および解析が非常に困難である．そこで，本研究では，盤面のサイズが一回り小さい 4×4 サイズを対象とする．この場合，解局面のパターンが 284 個となり，解析が容易になる．4×4 ナンバープレースの制約条件を次に示す．

- 使用する数字は 1～4
- 行に同じ数字が重複しない
- 列に同じ数字が重複しない
- 2×2 のブロックに同じ数字が重複しない

3.2. 極小問題

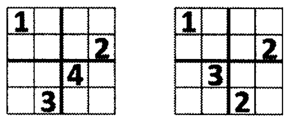
本研究では極小問題[2]を解析対象とする．極小問題とは，そこから数字を取り除くと解局面が一意に定まらなくなる問題である．極小問題の中で最少のヒント数は 4 である．そこで今回は，ヒント数 4 の極小問題を解析対象とする．

3.3. 解析を行う問題の分類

計算機の解析結果より，ヒント数 4 の極小問題が 25728 問存在する．ここでは，同型変換[3]と数字の入れ替えを用いた問題の分類を行った．同型変換とは，制約条件に違反しないようにマス交換を行う変換である．本研究では，以下の変換を 0 回以上適用したものを同型変換とする．

- ブロック内での行，列の交換
- 縦，横のブロック同士の交換
- 右，左への 90° 回転

問題に表れている数字の置換，および同型変換で変換できる問題を同じ問題とみなすことで，25728 問の極小問題を 13 グループに分類した．図 1 が分類した問題の一例である．



(a)　(b)

図 1. 分類した問題の一例

4. 数学的特徴の解析

4.1. ヒント用数字の種類

ヒント数が 4 の極小問題において，図 1(a)のように，初期局面のヒントが 4 種類の問題と，(b)のように 3 種類の問題が存在する．3 種類のヒントを用いた問題は，問題を解く際に未使用の数字を導出する必要がある．

4.2. 探索網

問題 P の探索網を $G(P)$ とした時，$G(P)$ は次の点集合 V と辺集合 E をもつ有向グラフとする．

Research about the difficulty of Number Place
† Masashi Haga, Yoshiaki Rikitake
Sendai National College of Technology
‡ Takayuki Sato
The University of Kitakyushu

$$G(P)=(V,E)$$

$$V=\{v_i \mid v_i \text{ は } P \text{ に制約条件を守るように数字を埋めてできる局面}\}$$

$$E=\{(v_i,v_j) \mid v_j \text{ は } v_i \text{ に数字を 1 つ埋めることで遷移可能}\}$$

また，同じヒント数をもつVの部分集合を階層と定義する．

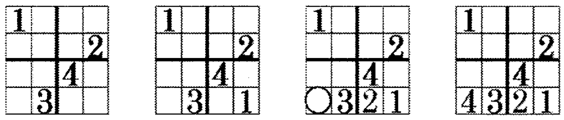
分類した 13 問に対して探索網を生成したところ，初期局面と解局面を除き，全グループの階層ごとの局面数が異なった．

4.3. 推論

推論とは，制約条件やそれぞれの局面から導出できる数字を埋めるために必要な情報である．松原は，様々な推論を提示しており[4]，今回は，その中から以下を本稿の推論と定義する．

i. 制約条件を使用した数字の候補の消去
制約条件を用いて，列・行・ブロックのマスの数字の候補を消去する．図 2(a)の場合，問題の 4 列目，4 行目，右下のブロックに注目し，数字の候補を消去すると 1 という数字が導出できる．なお，列・行・ブロックの推論を別の推論とするので，12 通りの推論が存在する．

ii. 数字の確定
この推論は，手詰まりの局面へ遷移する場合を除き，最後に必ず使用される．図 2 (b)の場合，4 行目の丸の部分は 4 以外入らないので，4 という数字が確定される．



(a) i.の推論と推論結果　(b) ii.の推論と推論結果

図 2. 推論の適用例と推論結果

実際に，分類された 13 グループに対して推論の付加を行い，推論を付加させた探索網を得ることができた．推論についての考察は次章で行った実験を通して行っていく．

5. 人間の問題を解く観点の調査

5.1. 実験目的

今回の実験では，ナンバープレースを解く人はどのように問題を解いているのか，という観点について明らかにすることが目的である．この実験を行うことで，数学的特徴と比較することができるようになる．

5.2. 実験手法

実験では，問題の出題と，インタビューを行った．詳細を次に示す．

- 実験内容：紙に印刷された問題について思考内容を発話しつつ解く
- 出題問題：分類した 13 問からランダムに同型変換した 10 問とする
- 記録方法：ビデオカメラで撮影，被験者の問題を解く過程，発話内容，動きを記録する

解析には，録画した動画を文章に起こし，質的解析を行うプロトコル分析[5]を採用した．被験者に発話してもらうことで，人の思考内容を明示することができる．また，インタビューの内容を以下に示す． こちらは録音した音声を文章に起こし，質的解析を行う．

- 質問項目：
  - どのような作戦で問題を解いたか？
  - 解いている途中で慣れていったか？
  - 4×4 ナンバープレースは難しかったか？
- 記録方法：ビデオカメラ，ボイスレコーダ

5.3. 進捗状況

現在，実験が完了し，発話内容と被験者の動きを文章に起こしている．今後は，文章に起こしたデータから，人の問題を解く観点に関わるキーワードを抜き出し，意味が似ている言葉同士でカテゴリ化する．最終的に，分類したカテゴリが数学的特徴と結び付けられるかどうか考察を行う．

6. おわりに

本研究では，ナンバープレースに対して計算機を用いた様々なアプローチを行った．探索網や推論を定義することで，ナンバープレースの問題の複雑さに関して数学的特徴を得ることができた．また，実験を行い，人が問題を解く際の観点となるデータを得ることができた．今後，このデータに質的解析，プロトコル分析を行い，数学的特徴と人の間にある関連を考察していく．

参考文献

[1] Bertram Felegenhauer and Frazer Jarvis, “Mathematics of Sudoku I”, http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/maths/felgenhauer_jarvis_spec1.pdf, 2006.

[2] Jean-Paul Delahaye, “数独の科学”，日経サイエンス，2006 年 9 月号，pp. 52-60，2006.9.

[3] 戸神聖也，“数独の解生成と解に対する番号付け”，電子情報通信学会技術報告，Vol. 107, pp. 73-78，2007.

[4] 松原康夫，“数独の推論規則と難易度に関する考察”，情報処理学会研究報告，2006(134), pp. 1-6，2006.

[5] 海保博之　原田悦子，プロトコル分析入門，1993，新曜社.