随伴関手を用いた圏論的結合子の導出

森 彰[†,☆] 松本吉弘[††]

圏論的結合子（categorical combinator）はラムダ計算の変数を含まない翻訳であることから，圏論的解釈を利用した関数型言語の実装に用いられている．本稿では圏の構造を随伴関手（adjoint functor）で定義することで，圏論的結合子とその等式が圏論の基本概念から天下り的に導かれることを示す．圏論的結合子は随伴関手に付随する自然変換である単因子（unit）と余単因子（counit）として得られ，その等式は圏，関手，自然変換の定義，および随伴関手の三角可換図（triangular identity）から直接導かれる．まず最初にカルテシアン閉圏（cartesian closed category）のための圏論的結合子の導出について述べ，これを用いた自由圏の構成を示す．そして次に圏論的結合子の非外延的（non-extensional）な等式が半随伴関手（semi-adjoint functor）から導かれることを示す．最後に一般の極限対象（limit object）や再帰的対象（recursive object）について考察し，その際に右随伴関手と左随伴関手の双対性（duality）がどのように作用するかをみる．

Deriving Categorical Combinators from Adjoint Functors

AKIRA MORI[†,☆] and YOSHIHIRO MATSUMOTO[††]

Categorical combinators can be seen as variable-free translations of lambda-calculus and have been used in the implementation of functional languages based on their categorical interpretations. In this paper, we show that, if we define categorical structures by adjoint functors, we can derive categorical combinators and their equations uniformly from the basic concepts of category theory. Categorical combinators appear as the units and counits of adjoint functors, and their equations directly come from the definitions of categories, functors and natural transformations, and from the triangular identities of adjoint functors. We first show the derivation for cartesian closed categories and illustrate the construction of free categories in terms of categorical combinators. We next discuss the derivation of non-extensional categorical combinators from semi-adjoint functors. Finally we consider general limit objects and recursive objects with view to the duality between left and right adjoint functors.

1. はじめに

圏論はもともと抽象数学から派生した代数的手法であるが，構文と意味の関係を明確に定義できることから，プログラミング言語の表示的意味論の研究において盛んに応用されている．中でもカルテシアン閉圏（cartesian closed category，以下 CCC と略す）は，積の構造を持った型付きラムダ計算と同等であることが知られており[1),2)]，関数型言語のモデルとして大きな注目を集めてきた．

こうしたなか Curien は，意味モデルとしてだけでなく計算モデルとして CCC をとらえることを試みた[3)]．彼は CCC の定義における普遍写像性（universal mapping property）を圏論的結合子（categorical combinator）と呼ばれる特別な射に関する等式に翻訳し，この等式を書き換え規則とみなすことで，関数型言語の操作的意味が圏論を通じて与えられることを示唆した．特に CCC の圏論的結合子から型，すなわち定義域（domain）と値域（codomain）に関する情報と，終対象（terminal object）に関する結合子を取り除いた代数系（C-モノイドと呼ばれる）を用いれば，型なしのラムダ計算を従来の項書換え系として扱うことができる．横内も独立して，型なしの場合に圏論的結合子の等式を書き換え規則として扱うことを提唱した[4)]．

圏論的結合子はラムダ計算の変数を用いない同等な翻訳ととらえられるので，Curry によって発展させられた結合子論理（combinatory logic）[5)]を用いた関数型言語の実装[6)]と同様の応用が期待される．Cousineau らは

† 京都大学工学部
Faculty of Engineering, Kyoto University
☆ 現在，オックスフォード大学計算研究所
Presently with Oxford University Computing Laboratory
†† 大阪工業大学
Osaka Institute of Technology

Curienの結果をもとに圏論的抽象機械（Categorical Abstract Machine, 以下 CAM と略す）を提案した[7),8)]. CAMは圏論的結合子の書き換えを機械命令の実行という形で実現する抽象機械であり，関数型言語Standard ML[9)]の方言であるCAML[10)]の処理系の基盤となっている[11)]. 同様に井田はCOMMON LISP処理系の実装について研究を行った[12)].

しかしながら圏の射は $f : A \to B$ のように定義域 A と値域 B によって型付けられた存在であって，射の合成は一方の値域と他方の定義域が一致するような射の対に対してのみ定義される．このような部分的定義は通常の等式論理では扱うことができず，項の形成規則と代入規則自体を変更する必要が生じる．また個々の圏論的結合子を取り上げてみても，一つの結合子がいくつもの対象の上で作用し得るという多相的な性質を持っており，結合子自体を定数項として扱うことはできない．以上の点から，通常の等式論理にもとづく項書換え系を圏論的結合子による関数型言語の実装の操作的意味とすることには，特に型の取り扱いに関して曖昧な点が多い．

たとえ型なしのC–モノイドを考えるとしても，もともとは型付きのCCCの圏論的結合子から得られたものであるから，同様の問題を内在していると考えられる．実際 $U \simeq U \times U \simeq U \supset U$ なる同型射が存在するようなCCCの対象 U（反射対象と呼ばれる）がある時，U 上の自己射 $U \to U$ 全体のなす圏はC–モノイドである．よってC–モノイド自体も上述の同型射を加えた型付きの体系とみなす方が，表示的意味論の点から自然である[13)].

他方，普遍写像性による定義を逐一翻訳し圏論的結合子が導かれているため，圏論的結合子に関する個々の等式がどのような計算的・意味論的性質に連係しているのかが明らかでないという問題がある．例えば η–簡約を省いた非外延的体系に対応した結合子系はどんなものであるのかといったことや，圏論的結合子の多相的な振舞いはどこからくるのかといったことを，具体的な圏と独立した一般的な圏論の概念で説明することができない．このことはCCCについて圏論的結合子を得たのと同じような手法が，他の構造を持つ圏についても利用できるのかという疑問にもつながる．どういった結合子が必要でどのような等式が成り立つべきなのかを一般的に論じるのが困難であり，CCC以外の圏構造への応用が明らかではない．

本稿ではこれらの問題に対処するため，随伴関手（adjoint functor）を用いて圏論的結合子とその等式を導き出す方法について論じる．まず最初にCCCを例に取り，圏の構造を普遍写像性と同等な随伴関手を用いて定義することで，圏論的結合子とその等式が圏論の基本概念から天下り的に導かれることを示す．圏論的結合子は随伴関手に付随した自然変換である単因子（unit），余単因子（counit）として得られ，その等式は圏，関手，自然変換の定義，および随伴関手の三角可換図（triangular identity）から直接導かれる．この導出は特定の圏の構成によらず，関手，自然変換，随伴関手といった基本的な圏論的構成にのみ依存しているので，CCCに限らない一般的な圏に応用できる．前述の問題についても，結合子の多相性は自然変換によって，非外延性（non-extensionality）は半随伴関手（semi-adjoint functor）[14),15)]によってというように抽象的な説明が得られる．また同じ対角関手（diagonal functor）の右随伴関手と左随伴関手により直積（product）と直和（coproduct）が定義されるというように，圏構造の双対性（duality）を簡潔に利用できるようになる．

そして次に，圏論的結合子を用いて自由圏を構成する方法を，自由CCCを例に取って説明する．圏論的結合子から射の合成，圏構造を定義する随伴関手を通じて生成される式表現（射表現と呼ぶ）に，圏論的結合子の等式と定義域と値域を考慮した等式推論によって帰納的に定義される最小の同値関係を課すことで，自由圏の射（正準な射と呼ばれる）が同値類として得られる．これは常に射表現の型を意識して構成されるので，圏論的結合子に対する操作的意味を考える手がかりになるものと考えられる．

以下2章で圏論の基本的な概念から射に関する等式がどのように得られるかを説明し，射に関する等式推論における注意点について述べる．次に3章でCCCを定義する随伴関手からCCCのための圏論的結合子が得られ，その等式は2章の方法に従って自動的に導出されることを示す．そして4章で圏論的結合子を用いた自由CCCの構成を説明し，これが圏論的結合子の表示的意味を与えるものであることを説明する．5章で圏論的結合子の非外延的な等式が半随伴関手から得られることを示した後，6章で一般の極限対象（limit object）や自然数対象（natural numbers object）などの再帰対象（recursive object）について考察し，その際に右随伴関手と左随伴関手の双対性がどのように機能するかをみる．最後に7章でまとめと今後の課題について述べることにする．

2. 圏論の基本概念と射の等式による表現

この章では，圏公理，関手，自然変換，随伴関手と

いった圏論の基本概念から，圏を定義する射の等式がいかにして導かれるかを説明する．圏論の詳細については他の文献16)〜20)を参照されたい．

1章で触れたように圏の射の間に成り立つ等式は，

- 射は定義域と値域という対象の組によって型付けられた存在である．
- 射の等式は同じ定義域と値域を持つ射の間にのみ成立する．
- 射の合成は一方の値域と他方の定義域が同じであるような射の対にのみ定義される．

という点で代数系などにみられる通常の等式とは異なる．このような部分的定義を等式論理として扱うには，依存型 (dependent type)[21),22)] を導入し項の形成規則と代入規則を変更するか，条件付き等式を用いるかのどちらかが必要である．しかしながら本稿ではあくまでも射の可換図式を用い，等式は型の情報を省略した略記法として併用するにとどめる．つまり等式は対象と射に関する完全な情報を盛り込んだ可換図式と同一視されるものとする．例えば

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & C \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}
$$

のような状況で $h, k : B \to C$ が可換ならば，$f\,;h = f\,;k$ および $h\,;g = k\,;g$ などと書く．なお本稿では射の合成の演算子についてのみ，通常の "$\circ$" とは逆順で図的順序に従う "$;$" を用いることにする．

以下，圏論的結合子の等式の導出に用いられる圏の基本概念について見ていくことにする．

圏公理　圏の基本公理は射の合成の結合則と恒等射の公理である．これらは以下の等式で表される．

$$f\,;(g\,;h) = (f\,;g)\,;h, \tag{1}$$

$$\mathbf{id}\,;f = f, \tag{2}$$

$$f\,;\mathbf{id} = f. \tag{3}$$

関手　圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ は，$\mathbf{C}$ の対象 A を $\mathbf{D}$ の対象 $F(A)$ に，$\mathbf{C}$ の射 $f : A \to B$ を $\mathbf{D}$ の射 $F(f) : F(A) \to F(B)$ にそれぞれ写し，かつ恒等射と射の合成を保つような写像である．このことは次のような等式で表される．

$$F(\mathbf{id}_A) = \mathbf{id}_{F(A)}, \tag{4}$$

$$F(f\,;g) = F(f)\,;F(g). \tag{5}$$

自然変換　圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への関手 $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ があるとき，F から G への自然変換 τ とは，$\mathbf{C}$ の対象 A に対して $\mathbf{D}$ の射 $\tau_A : F(A) \to G(A)$ が一つずつ割り当てられた $\mathbf{D}$ の射の族で，$\mathbf{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ に対し次の図が可換になるもののことをいう．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
B & F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B).
\end{tikzcd}
$$

したがって自然変換 τ に対して次の等式が得られる．

$$\tau_A\,;G(f) = F(f)\,;\tau_B. \tag{6}$$

随伴　随伴関手は次の随伴と呼ばれる状況で定義される．随伴とは，1) 圏の対 $\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$，2) 関手の対 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ と $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$，そして 3) 自然変換の対 $\eta : I_{\mathrm{C}} \to GF$ と $\epsilon : FG \to I_{\mathrm{D}}$ があって，次の自然変換の図が可換になる状況を言う．I_{C}，I_{D} はそれぞれ圏 $\mathbf{C}$，$\mathbf{D}$ 上の恒等な関手である．

$$
\begin{tikzcd}
 & GFG \arrow[dr, "G\epsilon"] & \\
G \arrow[ur, "\eta G"] \arrow[rr, "\mathbf{id}_G"'] & & G,
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & FGF \arrow[dr, "\epsilon F"] & \\
F \arrow[ur, "F\eta"] \arrow[rr, "\mathbf{id}_F"'] & & F.
\end{tikzcd}
$$

この自然変換の可換図は“三角可換図”と呼ばれる．なお $\mathbf{id}_F$，$\mathbf{id}_G$ はそれぞれ関手 F，G 上での恒等な自然変換のことである．

関手 F は関手 G の左随伴関手と呼ばれ，逆に関手 G は関手 F の右随伴関手と呼ばれる．また自然変換 η と ϵ のことをこの随伴の単因子，余単因子とそれぞれ呼ぶ．ここで自然変換 $\eta G : G \to GFG$ は圏 $\mathbf{D}$ の対象 B に対して，自然変換 η のうち対象 $G(B)$ に割り当てられた射 $\eta_{G(B)} : G(B) \to GF(G(B))$ を割り当てるような自然変換のことである．自然変換 $G\epsilon : GFG \to G$ は圏 $\mathbf{D}$ の対象 B に対して，自然変換 ϵ のうち対象 B に割り当てられた射 $\epsilon_B : FG(B) \to B$ を関手 G で写した像 $G(\epsilon_B) : G(FG(B)) \to G(B)$ を割り当てるような自然変換のことである．両者が自然変換になることは容易に確かめられる．$\epsilon F : FGF \to F$ と $F\eta : F \to FGF$ についても同様である．

よって上の随伴関手の組 F と G から次の等式が得られることになる．しかしながら実際の状況は等式で示されるよりはるかに複雑であることに注意されたい．

$$\eta_{G(B)}\,;G(\epsilon_B) = \mathbf{id}_{G(B)}, \tag{7}$$

$$F(\eta_A)\,;\epsilon_{F(A)} = \mathbf{id}_{F(A)}. \tag{8}$$

この随伴関手の定義は，従来の普遍写像性を用いた定

義と違って自然変換の可換図のみによっているので，射の等式によって圏の構造を定義するという目的に適している．両者の定義が同値であることは容易に証明可能である[19]．

以上で圏公理，関手，自然変換，随伴関手といった圏論の基本概念から，圏を定義する射の等式を導く一般的な処方が与えられた．

3. CCC のための圏論的結合子

この章では CCC を随伴関手によって定義することで，圏論的結合子が随伴の単因子と余単因子として得られ，同時にその等式も 2 章の等式 (1)〜(8) に従って天下り的に導かれることを示す．

CCC は特定の終対象 1 と直積 $\times$ を持ち，さらに直積に関して巾乗（exponentiation）$\supset$ を持つような圏のことである．これらの構造が以下の右随伴関手によって定義できることは良く知られている[19]．

定義 3.1 (CCC を定義する随伴関手) 圏 $\mathbf{C}$ が CCC であることは，以下の（右）随伴関手が存在することと同値である．

- 直積関手 $(-)\times(-):\mathbf{C}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$．これは対角関手 $\Delta:\mathbf{C}\to\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ の右随伴関手として定義される．ここで圏 $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ は $\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$ の積の圏を表し，これは $\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$ の対象の対と射の対をそれぞれ自身の対象および射として持つような圏のことである．また対角関手 Δ は，圏 $\mathbf{C}$ の対象 C を (C,C) に，射 $f:A\to B$ を $(f,f):(A,A)\to(B,B)$ に写すような関手である．以上を 2 章の定義に当てはめると，単因子は $\mathbf{C}$ の射の族 $\eta^P_A:A\to A\times A$ であり，余単因子は $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ の射，すなわち $\mathbf{C}$ の射の対の族 $\epsilon^P_{(A,B)}:(A\times B,A\times B)\to(A,B)$ である．
- 巾乗関手 $C\supset(-):\mathbf{C}\to\mathbf{C}$（$C$ は圏 $\mathbf{C}$ の任意の対象）．これは積関手が存在するときに定義できる右積関手 $(-)\times C:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ の右随伴関手として定義される．関手 $(-)\times C$ は，圏 $\mathbf{C}$ の対象 A を $A\times C$ に，射 $f:A\to B$ を $f\times\mathbf{id}_C:A\times C\to B\times C$ に写すような関手である．

  $\mathbf{C}$ の対象 A および射 $f:A\to B$ の $C\supset(-)$ による像を，それぞれ $C\supset A$，$\mathbf{id}_C\supset f:C\supset A\to C\supset B$ と書くことにする．これは，巾乗を二項関手 $(-)\supset(-)$ として考えた場合との整合性のためであって，単なる記法上の問題であることに注意されたい．

  2 章の定義より，単因子は $\mathbf{C}$ の射の族 $\eta^E_A:A\to C\supset(A\times C)$ であり，余単因子は $\mathbf{C}$ の射の族 $\epsilon^E_A:(C\supset A)\times C\to A$ となる．
- 終対象関手 $!:\mathbf{1}\to\mathbf{C}$．これは定関手 $S:\mathbf{C}\to\mathbf{1}$ の右随伴関手として定義される．圏 $\mathbf{1}$ は唯一の対象 T と唯一の恒等射 $\mathbf{id}_T$ を持つ圏である．2 章の定義より，単因子は $\mathbf{C}$ の射の族 $\eta^T_A:A\to!(T)$ であり，余単因子は $\mathbf{1}$ の射 $\mathbf{id}_T:T\to T$ である．ここで圏 $\mathbf{C}$ の対象 $!(T)$ が $\mathbf{C}$ の終対象 1 と定義されていることに注意されたい．

□

この定義が，従来の普遍写像性による終対象，直積，巾乗の定義と同等であることは容易に確かめられる．

ここで重要なのは，上記の定義中の随伴における単因子，余単因子を，そのまま圏論的結合子として用いることができる点である．単因子，余単因子は随伴関手に付随した自然変換であるので，これにより同じ結合子が異なった対象の上で同様の働きをするという多相性が体現されているといえる．

以下，演算子の優先順位は $(-)\times(-)$，$(-)\supset(-)$，$(-)\,;(-)$ の順に結合力が強いものとする．

定義 3.2 (CCC のための圏論的結合子) CCC のための圏論的結合子は以下のとおりである．すなわち，定義 3.1 中の随伴における単因子，余単因子のうち，直積関手に付随したものを $\mathbf{dupl}_A$，および $\mathbf{fst}_{A,B}$ と $\mathbf{snd}_{A,B}$ の対で表し，巾乗関手に付随したものを $\mathbf{mark}_{A,C}$，および $\mathbf{app}_{A,C}$ でそれぞれ表す．そして，終対象関手の単因子を $\mathbf{kill}_A$ で表し，以上が圏論的結合子であると定義する．なお恒等射も圏論的結合子に含めてある．

- $\mathbf{id}_A:A\to A$ (identity),
- $\mathbf{dupl}_A:A\to A\times A$ (duplicator),
- $\mathbf{fst}_{A,B}:A\times B\to A$ (first projection),
- $\mathbf{snd}_{A,B}:A\times B\to B$ (second projection),
- $\mathbf{mark}_{A,C}:A\to C\supset A\times C$ (place-marker),
- $\mathbf{app}_{A,C}:(C\supset A)\times C\to A$ (application),
- $\mathbf{kill}_A:A\to 1$ (killer).

□

これらの記号の命名の由来は，以下に説明する等式などから明らかになると思われるが，$\mathbf{mark}_{A,C}$（place-marker）についてのみ若干の説明を加えておく．つまり，$\mathbf{mark}_{A,C}$ は多引数の関数をカリー化する際に，カリー化されない引数の部分をつなぎ止める作用を持つのでこのような名前がついているのである．例えば関数 $f:A\times C\to B$ に対し，そのカリー化された関数 $\mathbf{mark}_{A,C}\,;\mathbf{id}_C\supset f:A\to C\supset B$ を考えてみるとよい．

$$A \xrightarrow{\mathbf{mark}_{A,C}} C \supset A \times C \xrightarrow{\mathbf{id}_C \supset f} C \supset B.$$

さて，積の圏 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ は単に圏 $\mathbf{C}$ の対象の対と射の対をそれぞれ自身の対象および射として持つだけであるので，2 章の等式 (1)～(8) に従って圏論的結合子の等式を自動的に得ることができる．このとき考慮しなければならない事項は，1) 圏の基本公理，2) 随伴関手が関手であること，3) 単因子，余単因子が自然変換であること，4) 随伴の三角可換図が成立することであり，これらが圏論的結合子に要求されるすべてである．

1) 以外はそれぞれの圏構造に依存しているが，ここでは直積の結合子 $\mathbf{dupl}_A$，および $\mathbf{fst}_{A,B}$ と $\mathbf{snd}_{A,B}$ に対する等式の導出について説明する．

まず，対角関手が関手であるという事実は積の圏の定義に含まれているので，何の情報ももたらさないことに注意しておく．積関手が関手であることから，2 章の等式 (4), (5) を参考にして以下の等式が得られる．

$$\times(\mathbf{id}_{(A,B)}) = \mathbf{id}_{\times(A,B)},$$
$$\times((f,h)\,;(g,k)) = \times(f,h)\,;\times(g,k).$$

なお，中置記号 $(-)\times(-)$ を前置記法に援用した．ここで，積の圏 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ における恒等射と射の合成は，$\mathbf{id}_{(A,B)} = (\mathbf{id}_A, \mathbf{id}_B)$，$(f,h)\,;(g,k) = (f\,;g, h\,;k)$ という風に，それぞれ圏 $\mathbf{C}$ における恒等射と射の合成を用いて定義されていることに注意すると，以下の等式が得られることが分かる．

$$\mathbf{id}_A \times \mathbf{id}_B = \mathbf{id}_{A\times B},$$
$$(f\,;g) \times (h\,;k) = (f \times h)\,;(g \times k).$$

次に，2 章の等式 (6) を参考にして，単因子 $\mathbf{dupl}_A$ が恒等関手 I_{C} から $\times\Delta$ への自然変換であることから，任意の $\mathbf{C}$ の射 $f : A \to B$ に対し

$$\mathbf{dupl}_A\,;\times(\Delta(f)) = f\,;\mathbf{dupl}_B$$

が成り立つことが分かる．これから以下の等式が導かれる．

$$\mathbf{dupl}_A\,;(f \times f) = f\,;\mathbf{dupl}_B.$$

結合子の名前 duplicator はこの等式に起因していることが分かるであろう．

同様に，余単因子 $(\mathbf{fst}_{A,B}, \mathbf{snd}_{A,B})$ が $\Delta\times$ から恒等関手 $I_{\mathrm{C}\times\mathrm{C}}$ への自然変換であることを，積の圏 $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ で考えることにより，任意の $\mathbf{C}$ の射の対 $f : A \to C$ と $g : B \to D$ に対し

$$(\mathbf{fst}_{A,B}, \mathbf{snd}_{A,B})\,;(f,g) = \Delta(\times(f,g))\,;(\mathbf{fst}_{C,D}, \mathbf{snd}_{C,D})$$

が成り立ち，これから次の等式の対を得ることができる．

$$\mathbf{fst}_{A,B}\,;f = (f \times g)\,;\mathbf{fst}_{C,D},$$
$$\mathbf{snd}_{A,B}\,;g = (f \times g)\,;\mathbf{snd}_{C,D}.$$

最後に，2 章の等式 (7) と (8) を参考にして，$(-)\times(-)$ と Δ が随伴を成すことから，任意の $\mathbf{C}$ の対象 A と B に対して等式

$$\mathbf{dupl}_{\times(A,B)}\,;\times(\mathbf{fst}_{A,B}, \mathbf{snd}_{A,B}) = \mathbf{id}_{\times(A,B)}$$

と，任意の $\mathbf{C}$ の対象 A に対して等式

$$\Delta(\mathbf{dupl}_A)\,;(\mathbf{fst}_{A,A}, \mathbf{snd}_{A,A}) = \mathbf{id}_{\Delta(A)}$$

を得ることができる．そして，これらの等式から等式

$$\mathbf{dupl}_{A\times B}\,;(\mathbf{fst}_{A,B} \times \mathbf{snd}_{A,B}) = \mathbf{id}_{A\times B}$$

と，等式の対

$$\mathbf{dupl}_A\,;\mathbf{fst}_{A,A} = \mathbf{id}_A,$$
$$\mathbf{dupl}_A\,;\mathbf{snd}_{A,A} = \mathbf{id}_A$$

をそれぞれ得る．

以上が直積の結合子に対する等式の導出の説明であるが，巾乗および終対象についても同様である．ただし終対象の場合，無意味な等式を除くと意味のある等式は二つしか得られないことを注意しておく．

得られるすべての等式をまとめると以下のようになる．

定義 3.3 (CCC のための圏論的結合子)　CCC のための圏論的結合子の等式は以下のとおりである．

圏公理

$$f\,;(g\,;h) = (f\,;g)\,;h,$$
$$\mathbf{id}\,;f = f,$$
$$f\,;\mathbf{id} = f.$$

関手

$$(f\,;h) \times (g\,;k) = f \times g\,;h \times k,$$
$$\mathbf{id} \times \mathbf{id} = \mathbf{id},$$
$$\mathbf{id} \supset (f\,;g) = \mathbf{id} \supset f\,;\mathbf{id} \supset g,$$
$$\mathbf{id} \supset \mathbf{id} = \mathbf{id}.$$

自然変換

$$f\,;\mathbf{dupl} = \mathbf{dupl}\,;f \times f,$$
$$f \times g\,;\mathbf{fst} = \mathbf{fst}\,;f,$$
$$f \times g\,;\mathbf{snd} = \mathbf{snd}\,;g,$$
$$f\,;\mathbf{mark} = \mathbf{mark}\,;\mathbf{id} \supset f \times \mathbf{id},$$
$$(\mathbf{id} \supset f) \times \mathbf{id}\,;\mathbf{app} = \mathbf{app}\,;f,$$
$$f\,;\mathbf{kill} = \mathbf{kill}.$$

随伴

$$\mathbf{dupl}\,;\mathbf{fst} \times \mathbf{snd} = \mathbf{id},$$
$$\mathbf{dupl}\,;\mathbf{fst} = \mathbf{id},$$
$$\mathbf{dupl}\,;\mathbf{snd} = \mathbf{id},$$
$$\mathbf{mark}\,;\mathbf{id} \supset \mathbf{app} = \mathbf{id},$$
$$\mathbf{mark} \times \mathbf{id}\,;\mathbf{app} = \mathbf{id},$$
$$\mathbf{kill} = \mathbf{id}.$$

□

結合子の型が省略されていることと，一つの等式が多

相的に複数の等式を表現していることに注意されたい．例えば最後から三番目の等式は，実際には任意の対象 A, B について $\mathbf{mark}_{A\supset B,A} ; \mathbf{id}_A \supset \mathbf{app}_{A,B} = \mathbf{id}_{A\supset B}$ という等式が成立することを表しており，最後の等式は，終対象 1 について $\mathbf{kill}_1 = \mathbf{id}_1$ という一個の等式が成立することを表している．

それぞれの等式がどのような圏論の概念に関連したものであるかが明確に現れていることに注意されたい．

ここに挙げられた圏論的結合子は，Curien が普遍写像性を翻訳して得たもの[3]と比較した場合，結合子の構成子（constructor）である $\langle(-),(-)\rangle$ と $\Lambda(-)$ がないという点で異なっている．しかし $\langle f,g\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{dupl};f\times g$，$\Lambda(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{mark} ; \mathbf{id} \supset f$，逆方向には $\mathbf{dupl}_A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \mathbf{id}_A, \mathbf{id}_A\rangle$，$\mathbf{mark}_{A,B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Lambda(\mathbf{id}_{A\times B})$ と定義することで，両者が同等であることを容易に確かめることができる．

4. 自由生成された CCC

ある対象の集合を生成元とし，CCC であるという条件を満たすように自由生成される圏のことを自由 CCC と呼ぶ．**Set** を集合を対象，関数を射とする圏とし，**CCC** を CCC を対象，CCC の構造を保存する関手を射とする圏とする．このとき集合 A から自由生成される自由 CCC は，個々の CCC を自身の対象の集合（今は小さい圏，すなわち対象の集まりも射の集まりも集合であるような圏を考えているとする）へと写す忘却関手 $U : \mathbf{CCC} \to \mathbf{Set}$ の左随伴関手 $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{CCC}$ を用いて $F(A)$ であると抽象的に定義される．自由 CCC の存在は理論的に保証されており，これを圏論的結合子を用いて構成することで，圏論的結合子による関数型プログラムの構文と意味が定義できることになる．

ここでは前章までで得られた CCC のための圏論的結合子とその等式を用いて，自由 CCC の構成を明示的に与えることにする．なお Jay[23]，Mints[2] らの論文も参考にされたい．

定義 4.1 (関手による自由生成) 生成元の集合 A から自由生成される自由 CCC $F(A)$ は次のように定義される．$UF(A)$ で $F(A)$ の対象の集合を表すことにする．

まず $UF(A)$ は次のように帰納的に定義される．

(1) A の要素（原子と呼ばれる）は $UF(A)$ に属する．

(2) 終対象 1 は $UF(A)$ に属する．

(3) $X, Y \in UF(A)$ ならば $X \times Y$ と $X \supset Y$ はともに $UF(A)$ に属する．

次に $F(A)$ の射表現は次のように帰納的に定義される．

(1) その定義域と値域が $UF(A)$ に属しているような圏論的結合子はすべて $F(A)$ の射表現である．

(2) $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ がともに射表現であれば $f ; g : X \to Z$ も射表現である．

(3) $f : X \to Y$ と $g : S \to T$ がともに射表現であれば $f \times g : X \times S \to Y \times T$ も射表現である．

(4) 対象 A が $UF(A)$ に属していてかつ $f : X \to Y$ が射表現であれば $\mathbf{id}_A \supset f : A \supset X \to A \supset Y$ も射表現である．

定義 3.3 の圏論的結合子の等式（$=$ を $\equiv$ とみなす）と $f \equiv f$ を公理とし，以下に示される推論規則で帰納的に定義される最小の同値関係 $\equiv$ を課すことで，$F(A)$ の射表現を $F(A)$ の射（正準な射と呼ぶ）とすることができる．

$$\frac{f \equiv g}{g \equiv f,} \qquad \frac{f \equiv g \quad f \equiv h}{g \equiv h,} \qquad \frac{f \equiv g \quad h \equiv k}{f ; h \equiv g ; k,}$$

$$\frac{f \equiv g \quad h \equiv k}{f \times h \equiv g \times k,} \qquad \frac{f \equiv g}{\mathbf{id} \supset f \equiv \mathbf{id} \supset g.}$$

□

同値式 $f \equiv g$ は同じ値域と定義域を持つ射表現 f, g に対してのみ有効であり，射表現の合成は共通の定義域と値域を要求していることを繰り返し注意しておく．厳密には射の間の同値関係によって分割される商集合として定義する必要がある．Barr と Wells による教科書[17]の p.72 を参照されたい．以降では記法的に射表現と正準な射を区別せず混同して用い，常に $\equiv$ による同値類が取られているものと仮定する．

ここで射表現 $f : X \to Y$ と $g : S \to T$ に対して $f \supset g : Y \supset S \to X \supset T$ を射表現として含めなかったことは，共変（covariant）な関手と反変（contravariant）な関手の合成を定義する際の困難を避けているという点で重要である．つまり$\supset$ は二項関手として定義されてはおらず，単に第一引数に関してパラメータ化されているだけである．しかしながら $f \supset g \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{mark} ; \mathbf{id} \supset (\mathbf{id} \times f ; \mathbf{app} ; g)$ と定義することで，$(-) \supset (-)$ は実際に第一引数について反変な二項関手 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ になることが確かめられる．

圏論的結合子で表現された射表現をプログラムの構文要素，自由圏の正準な射がその表示であると考えることで，圏論的結合子に対する操作的意味を考える手がかりが与えられると考えられる．

5. 非外延的な圏論的結合子

本章ではラムダ計算における η–簡約を除いた体系，すなわち非外延的な体系に対応した圏論的結合子とそ

の等式について考える．このため，圏の構造を随伴関手ではなく半随伴関手で定義する[14]．

まず半関手と半随伴関手について Hoofman[15] に従って説明する．

定義 5.1 (半関手) 圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への半関手 $F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ とは，$\mathbf{C}$ の対象 A を $\mathbf{D}$ の対象 $F(A)$ に，$\mathbf{C}$ の射 $f:A\to B$ を $\mathbf{D}$ の射 $F(f):F(A)\to F(B)$ にそれぞれ写し，射の合成を保つような写像のことである． □

恒等射が保たれない点のみ関手と異なるので，得られる等式は 2 章の等式 (5) のみである．

半関手の間の自然変換は関手の間の自然変換と全く同じように定義でき，両者の間の差異は全くないことを注意した上で，次の半随伴の定義を与える．これは Hoofman[15] の定理 3.10 によるものである．

定義 5.2 (半随伴) 半関手の対 $F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ と $G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$ が半随伴をなすとは，(半関手の間の) 自然変換の対 $\eta:I_C\to GF$ と $\epsilon:FG\to I_D$ があって，次の等式が成立することをいう．

$$\eta_{G(B)}\,;G(\epsilon_B)=G(\mathbf{id}_B), \tag{9}$$

$$F(\eta_A)\,;\epsilon_{F(A)}=F(\mathbf{id}_A). \tag{10}$$

すなわち随伴のような自然変換の三角可換図は成り立たない．また，F,G はそれぞれ左半随伴関手，右半随伴関手と呼ばれる． □

F,G がともに関手であれば随伴の定義と同じであることに注意されたい．

さて林に従えば非外延的な定義を得るには，圏の構造が随伴関手によって与えられるとする代わりに，半随伴関手によって与えられるとすればよい[14]．つまり単因子と余単因子から得られる圏論的結合子はそのままにして，その等式に関手から半関手，随伴から半随伴へという変化を反映させればよい．例えば仮に G が圏の構造を与える右半随伴関手であるならば，G は恒等射を保つとは限らないので

$$G(\mathbf{id}_A)=\mathbf{id}_{G(A)}$$

に相当する等式を除く．同時に G は半随伴をなすだけであるので，

$$\eta_{G(B)}\,;G(\epsilon_B)=G(\mathbf{id}_B)$$

のように右辺が $\mathbf{id}_{G(B)}$ でなく $G(\mathbf{id}_B)$ に相当するように変更すればよい．左半随伴関手 F についても同様で，等式

$$F(\mathbf{id}_A)=\mathbf{id}_{F(A)}$$

に相当するものを除き，

$$F(\eta_A)\,;\epsilon_{F(A)}=F(\mathbf{id}_A)$$

に相当した変更を加えればよい．

直積の場合には対角関手 Δ を半関手とみなして直積半関手 $(-)\times(-)$ をその右半随伴関手で定義すればよく，このことは終対象，巾乗についても同様である．以下に CCC のための圏論的結合子とその等式のうち非外延性の影響を受ける部分を示す．この圏を半 CCC と呼ぶことにする．

定義 5.3 (半 CCC のための圏論的結合子) 半 CCC のための圏論的結合子は定義 3.2 にあるものと同じであり，その等式は関手に関わるものを以下の半関手のものに，随伴に関わるものを以下の半随伴のものに置き換えたものである．

半関手

$$(f\,;h)\times(g\,;k)=f\times g\,;h\times k,$$
$$\mathbf{id}\supset(f\,;g)=\mathbf{id}\supset f\,;\mathbf{id}\supset g.$$

半随伴

$$\mathbf{dupl}\,;\mathbf{fst}\times\mathbf{snd}=\mathbf{id}\times\mathbf{id},$$
$$\mathbf{dupl}\,;\mathbf{fst}=\mathbf{id},$$
$$\mathbf{dupl}\,;\mathbf{snd}=\mathbf{id},$$
$$\mathbf{mark}\,;\mathbf{id}\supset\mathbf{app}=\mathbf{id}\supset\mathbf{id},$$
$$\mathbf{mark}\times\mathbf{id}\,;\mathbf{app}=\mathbf{id}.$$

□

個々の圏の構造に依存しない一般的な概念から圏論的結合子が導かれているので，非外延性のように操作的意味と表示的意味の両面にまたがる概念が簡潔に定義でき，同時に圏論的結合子の等式へと反映することが可能になっている．随伴や半随伴といった概念を用いることによる理論的透明さの一端が現れていると言える．

6. 双対性，(余) 極限対象，再帰対象に関する考察

この章ではまず右随伴関手と左随伴関手の双対性がどのように機能するかをみるため，直積と双対な概念である直和を対角関手の左随伴関手で定義し，圏論的結合子とその等式を導出する．さらにこの対応の一般の場合として，圏における極限と余極限に対する随伴と圏論的結合子について考察する．次に再帰的に定義される対象を定義する随伴の例として，CCC における自然数対象を取り上げる．CCC における自然数対象は自己射のなす圏からの忘却関手に対する左随伴関手として定義されるので，そこから導かれる圏論的結合子とその等式がどのようなものになるかを考察する．なお本章の内容は考察にとどまり，具体的な応用との関係は今後の課題として残されていることを断っておく．

直和のための圏論的結合子とその等式を定義する．

定義 6.1 直和関手 $(-)+(-):\mathbf{C}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ は

対角関手 $\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ の左随伴関手として定義される．単因子は $\mathbf{left}_{A,B} : A \to A + B$ と $\mathbf{right}_{A,B} : B \to A + B$ の対であり，余単因子は $\mathbf{coll}_A : A + A \to A$ となる．よって直和のための圏論的結合子とその等式は以下のとおりである．

- $\mathbf{coll}_A : A + A \to A$ (collector),
- $\mathbf{left}_{A,B} : A \to A + B$ (left injection),
- $\mathbf{right}_{A,B} : B \to A + B$ (right injection).

関手

$(f\,;h) + (g\,;k) = f + g\,;h + k,$

$\mathbf{id} + \mathbf{id} = \mathbf{id}.$

自然変換

$\mathbf{coll}\,; f = f + f\,; \mathbf{coll},$

$\mathbf{left}\,; f + g = f\,; \mathbf{left},$

$\mathbf{right}\,; f + g = g\,; \mathbf{right}.$

随伴

$\mathbf{left} + \mathbf{right}\,; \mathbf{coll} = \mathbf{id},$

$\mathbf{left}\,; \mathbf{coll} = \mathbf{id},$

$\mathbf{right}\,; \mathbf{coll} = \mathbf{id}.$

□

直積と双対な直和のための圏論的結合子とその等式が，対角関手に関して右随伴関手と双対な左随伴関手によって得られていることが分かる．

一般に，圏における極限は対角関手の右随伴関手によって，また余極限は対角関手の左随伴関手によって定義できる[19]．これにはまず圏 $\mathbf{C}$ に対してある小さい圏 $\mathbf{J}$ を取り，$\mathbf{J}$ から $\mathbf{C}$ への関手を対象とし，その関手の間の自然変換を射とするような圏 $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ を考える．$\mathbf{J}$ は $\mathbf{C}$ の中のある特定の対象と射の配置を取り出すために用いられ，$\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ の対象を「圏 $\mathbf{C}$ の中の $\mathbf{J}$ の形をした図」と呼ぶ．

このとき $\Delta_{\mathbf{J}}(C)$ を $\mathbf{J}$ のすべての対象を C に，すべての射を C 上の恒等射に写す関手と取ることで対角関手 $\Delta_{\mathbf{J}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ が定義できる．直積，直和の例から推測できるように，この対角関手 $\Delta_{\mathbf{J}}$ の右随伴関手

$$\lim_{\leftarrow \mathbf{J}} : \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \to \mathbf{C}$$

と左随伴関手

$$\lim_{\to \mathbf{J}} : \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \to \mathbf{C}$$

が圏 $\mathbf{C}$ の中の $\mathbf{J}$ の形をした図上の極限対象と余極限対象をそれぞれ与える．例えば圏 $\mathbf{J}$ を二つの対象と恒等射のみからなる圏とすれば，直積，直和の場合が得られることになる．

したがってある特定の極限あるいは余極限を持つような圏 $\mathbf{C}$ に対し，それらに対応した圏論的結合子とその等式が今までと同様に得られるはずである．しかしながら随伴を構成する圏の対が今までのように単に圏 $\mathbf{C}$ と積の圏 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ではないので，単因子あるいは余単因子を圏 $\mathbf{C}$ の射として取り出すことができない．

極限の例としてプルバックを考えてみる．この場合，圏 $\mathbf{J}$ として $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ のように三つの対象 A，B，C と恒等射，および二つの射 $f : A \to C$，$g : B \to C$ からなる圏を取る．前述の随伴を考えてみると，圏 $\mathbf{C}$ の対象 C 上の単因子

$$\eta_C : C \to \lim_{\leftarrow \mathbf{J}}(\Delta_{\mathbf{J}}(C))$$

は単に恒等射 $\mathbf{id}_C$ であり，圏 $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ の対象すなわち圏 $\mathbf{C}$ 中の $\mathbf{J}$ の形をした図 D 上の余単因子

$$\epsilon_D : \Delta_{\mathbf{J}}(\lim_{\leftarrow \mathbf{J}}(D)) \to D$$

は次のプルバックを表す図である．

$$\begin{tikzcd}
\lim_{\leftarrow \mathbf{J}}(D) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & D(B) \arrow[d, "D(g)"] \\
D(A) \arrow[r, "D(f)"'] & D(C).
\end{tikzcd}$$

この単因子，余単因子から得られる圏論的結合子とその等式を用いて，任意のプルバックを持つような圏に対し計算の概念を与えることができるはずであるが，随伴に圏 $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ が関わってくるので，どういった計算規則を与えるべきかは今のところ分かっていない．

次に再帰的な対象を定義する随伴関手の例として，CCC における自然数対象について調べてみる．一般に，自然数対象とは次のように定義されるものである．

定義 6.2 (自然数対象) ある対象 N と射 $zero : 1 \to N$, $succ : N \to N$ があるとき，どんな対象 A と射 $a : 1 \to A$, $h : A \to A$ に対しても次の図を可換にする射 $It(a,h) : N \to A$ が一意に存在する時，N, $zero$, $succ$ は自然数対象と呼ばれる．

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "succ"] \arrow[d, "{It(a,h)}"] & N \arrow[d, "{It(a,h)}"] \\
1 \arrow[ur, "zero"] \arrow[r, "a"'] & A \arrow[r, "h"] & A.
\end{tikzcd}$$

□

圏 $\mathbf{C}$ があるとき，その自己射全体を対象とするような圏 $\mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ を考える．自己射 $f : A \to A$ から自己射 $g : B \to B$ への射は，次の図が可換になるような

$\mathbf{C}$ の射 $h: A \to B$ であるとする.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{h} & B. \end{array}$$

$\mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ の対象 $f: A \to A$ を A に写し, $\mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ の射を $\mathbf{C}$ の射とみなすことで $\mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ から $\mathbf{C}$ への忘却関手 $U: \mathbf{C}^{\mathrm{loop}} \to \mathbf{C}$ が定義できる. このとき Lawvere による次の定理がいえる[24).

定理 6.1 (Lawvere) 圏 $\mathbf{C}$ が CCC であるならば, $\mathbf{C}$ が自然数対象を持つことと, U が右随伴関手 $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ を持つことは同値である. □

対象を一つだけ, 恒等射以外の自明でない射を一つだけ持つような圏 $\mathbf{J}$ を考えると, 圏 $\mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ は圏 $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ と同じである. 極限, 余極限を定義する際に用いた対角関手とは逆向きの忘却関手に対する随伴により, 再帰的な対象が定義されるとみることができる.

さて自然数対象が随伴関手によって定義されるならば, この随伴関手から圏論的結合子とその等式をこれまでのやり方で得られるはずである. しかし極限, 余極限の場合と同様, 随伴を構成する圏の一方が単なる積の圏でないのに加えて, $\mathbf{C}$ が CCC であるという条件付きであるため, 定義 6.2 にある普遍写像性による定義との対応は明らかではない.

まず $F(1)$ は自己射であるので, これを $succ: N \to N$ とし, さらに 1 上の単因子 $\eta_1: 1 \to UF(1)$ を $zero: 1 \to N$ とすることができる. 次に対象 A と射 $a: 1 \to A$, $h: A \to A$ があるということは, $h: A \to A$ を $\mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ の対象 X とみなせば, $\mathbf{C}$ の射 $a: 1 \to U(X)$ があるというのと同じことである. これを関手 F により $\mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ へ写して, 余単因子 $\epsilon_X: FU(X) \to X$ と合成させることで $\mathbf{C}^{\mathrm{loop}}$ の射 $F(1) \to X$ が得られる. これをさらに忘却関手 U で写すことで $\mathbf{C}$ の射 $It(a,h): N \to A$ を $G(F(a);\epsilon_X)$ として得ることができる. 可換性と普遍写像性は η が自然変換であることと随伴の定義からすぐに導かれる.

上から分かるように普遍写像性に現れる射(の族)(定義 6.2 における *zero*, *succ* など)と随伴における単因子, 余単因子は一致しない. このため萩野の CPL[25),26)] や Cockett らの Charity[27)] といったプログラミング言語にあるように, 随伴による定義から計算に必要な構成子を取り出した上で, その構成子に対する適当な計算規則を与える必要が生じる.

ここでは左随伴関手によって定義される自然数対象を取り上げたが, ストリームのようなデータ型は右随伴関手によって定義できることが知られている. また Cockett は自然数対象の定義を一般化し, 定値関手, 直積関手, 直和関手から構成される任意の多項式関手による代数の圏からの忘却関手に対する左随伴関手によって, その多項式関手の最小不動点となる対象を定義できるような圏構成を提案している[28)].

(余) 極限対象, 再帰対象いずれの場合でも随伴による定義は可能であるが, どのようにプログラミングの概念に対応させるかは今のところ定かではない. 本章ではこれらの対象を定義する随伴についての考察を行ったが, 応用については今後の研究課題である.

7. おわりに

随伴関手によって圏の構造を定義することにより, 圏論的結合子とその等式が圏論の基本概念から自動的に導出できることを示した. 関数型プログラミングの観点からみれば, データ型を随伴関手によって定義すれば, プログラム実行のための操作的意味の基盤となる圏論的結合子とその等式については労力を費やさずに済むといえる. つまり

(1) 随伴をデータ型の定義とし,
(2) 随伴の単因子と余単因子を圏論的結合子とし,
(3) 圏論的結合子に関する等式を操作的意味の基盤とする

ことで圏論にもとづくプログラミング言語の枠組が与えられると考えられる.

このような考え方はすでに萩野の CPL[25),26)] や Cockett らの Charity[27)] といったプログラミング言語のなかに見受けられるが, 操作的意味に関する問題を随伴関手の持つ性質に帰着させることで, 表示的にも操作的にも見通しの良いプログラミング言語の実現へつながることが期待される. 典型的な例として非外延性が半随伴によって与えられることを 5 章で示した.

今後の課題としては,

- 6 章にある (余) 極限対象や再帰対象に対する随伴から得られる圏論的結合子とその等式をどのように用いれば適切な計算が行えるかを調べること.
- すべての随伴関手が計算上の意味を持つわけではないので, 実際のプログラミングにおいて有用な随伴関手のクラスを圏の立場から明らかにすること.
- パラメータ化された定義に対応した随伴について考えること.
- 巾乗関手と整合的に定義できる随伴関手の定義を与えること.

- 以上の項目を考慮した圏論的結合子の操作的意味を与え，停止性や合流性といった性質を調べること．

などがある．最後のものに関しては，構成的論理の圏論的解釈にもとづいて，カット除去を操作的意味として採用することを提案し研究を進めている[29]．これによって，圏論を用いるという意味論上の簡潔さを損なうことなく，結合子の型や射の合成における部分的定義を正しく取り扱うことが可能になると期待される．

また本稿ではCCC，直和，自然数対象，(余) 極限対象，再帰対象についての随伴のみ考えてきたが，構成的論理や型理論における限量子 (quantifier) なども随伴で解釈できることが知られており，このような随伴に対する圏論的結合子について研究することは興味深いと考えられる．実際Ritterは，CoquandとHuetが提唱した高階の型理論であるCalculus of Constructions[30),31)]のための圏論的結合子とCAMにならった抽象機械について考えている[32)]．彼は普遍写像性による定義からの導出を試みているが，随伴による定義を用いればより簡潔な体系が得られるものと期待される．

圏論は難解であって，関数型言語の意味モデルの分析に役立つだけであるという批判は少なくないが，本稿によって圏論的結合子のような表示的意味を見据えた操作的意味の研究にも有効であることが認識されれば幸いである．

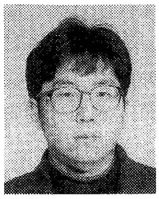
謝辞 第一著者は日本学術振興会特別研究員制度の補助を受けている．また，本研究の一部は，文部省科学研究費補助金 (特別研究員奨励費) の援助のもとに行われたものである．

参考文献

1) Lambek, J. and Scott, P.: *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, Cambridge University Press (1986).
2) Mints, G.E.: Proof Theory and Category Theory, *Selected Papers in Proof Theory*, chapter 10, pp. 183–212, Bibliopolis/North-Holland (1992).
3) Curien, P.-L.: *Categorical Combinators, Sequential Algorithms and Functional Programming*, Research Notes in Theoretical Computer Science, Pitman (1986). The revised edition is published from Birkhäuser, in the series of *Progress in Theoretical Computer Science* (1993).
4) Yokouchi, H.: Relationship between λ-Calculus and Rewriting Systems for Categorical Combinators, *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 65, pp. 271–290 (1989).
5) Hindley, J. R. and Seldin, J. P.: *Introduction to Combinators and λ-Calculus*, London Mathematical Society, Student Texts, Vol. 1, Cambridge University Press (1986).
6) Peyton-Jones, S. L.: *The Implementation of Functional Languages*, Prentice Hall (1987).
7) Cousineau, G., Curien, P.-L. and Mauny, M.: The Categorical Abstract Machines, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 201, pp. 50–64 (1985).
8) Cousineau, G.: The Categorical Abstract Machine, *Logical Foundations of Functional Programming* (Huet, G.(ed.)), pp. 25–45, Addison-Wesley (1990).
9) Milner, R., Tofte, M. and Harper, R.: *The Definition of Standard ML*, MIT Press (1990).
10) Cousineau, G. and Huet, G.: *The CAML Primer* (1987). Technical Report, Project FORMEL, INRIA-ENS, version 2.5.
11) Ascánder Suárez: Compiling ML into CAM, *Logical Foundations of Functional Programming* (Huet, G.(ed.)), pp. 47–73, Addison-Wesley (1990).
12) 井田哲雄: ラムダ計算とそのモデル「カルテシアン閉カテゴリ」によるCOMMON LISPの解釈と新しい処理系, コンピュータソフトウェア, Vol. 4, No. 4, pp. 33–44 (1987).
13) Smyth, M. and Plotkin, G.: The Category-Theoretic Solution of Recursive Domain Equations, *SIAM J. Comput.*, Vol. 11, pp. 761–783 (1983).
14) Hayashi, S.: Adjunction of Semifunctors: Categorical Structures in Non-Extensional Lambda-Calculus, *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 41, pp. 95–104 (1985).
15) Hoofman, R.: The Theory of Semi-Functors, *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 3, pp. 93–128 (1993).
16) Asperti, A. and Longo, G.: *Categories, Types, and Structures*, MIT Press (1991).
17) Barr, M. and Wells, C.: *Category Theory for Computing Science*, International Series in Computer Science, Prentice Hall (1990).
18) Poigné, A.: Basic Category Theory, *Handbook of Logic in Computer Science Volume 1, Backgrounds: Mathematical Structures* (Abramsky, S., Gabbay, D.M. and Maibaum, T. S.E.(eds.)), pp. 413–640, Oxford University Press (1992).
19) Mac Lane, S.: *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5, Springer-Verlag (1971).
20) McLarty, C.: *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Oxford Logic Guides, Vol.21, Ox-

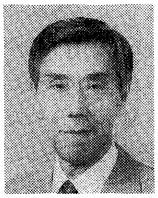
ford University Press (1992).
21) Martin-Löf, P.: *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis (1984).
22) 龍田 真: 型理論II, コンピュータソフトウェア, Vol. 8, No. 3, pp. 40–46 (1991).
23) Jay, C. B.: The Structure of Free Closed Categories, *J. Pure and Applied Algebra*, Vol. 66, pp. 271–285 (1990).
24) Goldblatt, R.: *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, North-Holland (1979).
25) Hagino, T.: A Categorical Programming Language, Technical Report CST-47-87, also as ECS-LFCS-87-38, Computer Science Department, University of Edinburgh (1987). Ph.D. Thesis.
26) 萩野達也: カテゴリー理論的関数型プログラミング言語, コンピュータソフトウェア, Vol. 7, No. 1, pp. 16–32 (1990).
27) Cockett, J. R. B. and Spencer, D.: Strong Categorical Datatypes I, *Canadian Mathematical Society Proceedings (Category Theory 1991, Montreal)* (1992).
28) Cockett, J.: List-Arithmetic Distributive Categories: Locoi, *J. Pure and Applied Algebra*, Vol. 66, pp. 1–29 (1990).
29) 森 彰, 松本吉弘: 自由圏の構成と構成的論理における推論の並べ替えについて, 関数プログラミング II: JSSST'94 (竹市正人 (編)), pp. 47–62, 近代科学社 (1994).
30) Coquand, T. and Huet, G.: The Calculus of Constructions, *Information and Computation*, Vol. 76, pp. 95–120 (1988).
31) 龍田 真: 型理論 IV, コンピュータソフトウェア, Vol. 8, No. 4, pp. 56–68 (1991).
32) Ritter, E.: *Categorical Abstract Machines for Higher-order Typed Lambda Calculi*, Ph.D. Thesis, University of Cambridge (1992).

(平成6年7月20日受付)
(平成7年7月 7 日採録)



森 彰（正会員）

昭和41年生．平成3年京都大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．平成7年同大学院同専攻博士課程修了．工学博士．現在，日本学術振興会特別研究員としてオックスフォード大学にて研究に従事．圏論および証明論の計算機科学への応用に興味を持つ．日本ソフトウェア科学会会員．



松本 吉弘（正会員）

昭和7年生．昭和29年東京大学工学部電気工学科卒業．同年（株）東芝入社．昭和49年東京大学より工学博士の学位受領．昭和60年東芝・理事．平成元年京都大学大学院工学研究科教授（情報システム工学講座担任）．平成6年財団法人京都高度技術研究所所長を兼務．平成7年大阪工業大学教授，現在に至る．この間，工業用計算機制御システムの開発，ソフトウェア生産技術の開発，ソフトウェア開発支援環境の研究などに従事．日本電機工業会進歩賞，発明協会全国発明表彰発明賞，科学技術庁研究功績者表彰，アメリカ電気電子技術協会（IEEE）フェロー表彰を受賞.「ソフトウェア工学」など著書18点．電気学会終身員，IEEEフェロー，日本ソフトウェア科学会各会員．