KJ 法を参考とした構造モデリングにおける推移的具象化

加 藤 衛[†] 大 内 東[†]

大規模化かつ複雑化したシステムの解析を行う場合，システムの構成要素集合上の二項関係に注目し解析する構造モデリングが有効である．構造モデリング「FISM」は構成要素集合上の擬順序関係を用い，柔軟，効率的かつ無矛盾なモデリングを行う．一方，発想支援法として知られている「KJ 法」は，人の手で対象をモデル化するものと考えられる．KJ 法におけるカードのグループ化や図解化の関係が同値関係・半順序関係を満たす場合も多い．対象とするシステムを構成要素集合上の同値関係および半順序関係としてとらえ，同値関係行列・半順序行列としてモデル化を行うものが，KJ 法を参考とした構造モデリング「FISM/KJ」である．モデル生成者の対象システムに対する認識は，対象システムの各要素間の関係で示される．その関係を推移的性質を利用して明確にする過程を推移的具象化といい，FISM/KJ の最も重要な部分である．本論文では，推移的具象化を柔軟かつ効率的に実行するために，部分同値関係行列モデル・部分半順序行列モデルおよび含意アルゴリズムを提案する．その成果として，モデル生成者は，KJ 法を参考，柔軟にかつ矛盾なくモデリングを行うことが可能になり，モデリングに対する負担も軽減する．

Transitive Embedding in Structual Modeling Based on KJ Method

MAMORU KATOH[†] and AZUMA OHUCHI[†]

FISM/KJ is an extension of FISM (Flexible Interpretive Structural Modeling) based on KJ method. In this paper, transitive embedding of FISM/KJ is proposed. The transitive embedding is a problem of how efficiently to fill equivalence relation matrix and partial ordering matrix. Partially filled partial ordering matrix is proposed, which has unknown elements and satisfies partial ordering property. This matrix has great utility in the process of developing a partial ordering matrix. An implication algorithm is proposed for the determining all the implied values of unknown elements of the partially filled partial ordering matrix derived from the supplied value. Partially filled equivalence relation matrix and an implication algorithm for the partially filled equivalence relation matrix are also proposed. Use of algorithms make it possible to do a flexible and an efficient modeling of FISM/KJ.

1. はじめに

近年の科学技術の発展にともない，システムは大規模化かつ複雑化している．このようなシステムの解析を行う場合，システムの構成要素集合上の二項関係に注目し解析する構造モデリングが有効である．

その代表的な手法のひとつとして，J.N. Warfield 氏らが提案した ISM（Interpretive Structural Modeling）がある[5]．ISM は，二項関係に反射的かつ推移的，すなわち擬順序関係を仮定して構造化するものである．

大内らは従来の ISM の拡張として,「FISM（Flexible ISM）」を提案している[1),3),4)]．FISM は，擬順序関係行列の拡張である部分擬順序関係行列を用いて柔軟，効率的かつ無矛盾なモデリングを行う．

構造モデリングとは異なるが，良く似た方法論として川喜田二郎氏が開発した発想支援法「KJ 法」がある[2)]．KJ 法では，対象とする問題に対して人間が思い浮かべる事柄をカードに記述して扱う．KJ 法は，大きく以下の 4 つのステップからなる．

(1) ブレーンストーミングにより情報を収集し，その情報を書き込んだカードを生成する．
(2) 類似性を規範としてカードをグループ化する．
(3) グループ集合に対して，対立関係，先行関係，因果関係などの順序関係を規範とした階層構造を構築する（A-type diagram）．
(4) 完成した A-type ダイアグラムに基づいて扱う問題を文書の形にまとめる（B-type 記述）．

KJ 法のステップ（1）は，カードに書かれた事柄を要素とみなすと，カード集合は FISM における要素集合に対応させることができる．ステップ（2）におけ

† 北海道大学工学部システム情報工学専攻
Institute of Systems and Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University

る類似性の規範は，反射性，推移性，対称性が成り立つと仮定することが自然である．したがって，このステップはカード集合上での同値関係の決定と見なすことができる．ステップ（3）では，ステップ（2）によりできた同値類を対象として関係付けを行うことに対応する．このステップでは様々な関係を規範とすることができるが，先行関係や因果関係など半順序関係を満たす場合も多いと考えられる．ゆえに，本論文ではグループ集合の関係付けに半順序関係を仮定する．最後のステップ（4）は，FISM でのドキュメント作成に対応すると考えられる．二項関係に擬順序関係を用いている FISM は，同値関係と半順序関係を独立に求めることができない．すなわち，ステップ（2），(3）に適さない．よって FISM を拡張し同値関係・半順序関係を扱うことが可能になれば，FISM に KJ 法の機能を取り入れることができる．

本論文は，以上のような考えから KJ 法を参考とした構造モデリング「FISM/KJ（FISM Based on KJ method)」を提案する．特に，同値関係・半順序関係を利用して具象化する推移的具象化について考察する．FISM/KJ は，対象とするシステムを構成要素集合上の同値関係および半順序関係としてとらえてモデル化する．

2. FISM/KJ

FISM/KJ による発想支援プロセスの実行を「FISM/KJ セッション」と呼ぶ．FISM/KJ セッションでは，対象を有限集合と対象集合上の同値関係および半順序関係の組としてモデリングする．FISM/KJ セッションは以下のように実行される．

[FISM/KJ セッション]

(1) 問題設定：構造化を行う対象問題を明確にする．

(2) 具象化

(2.1) 要素抽出：扱う問題に対する対象要素集合を抽出する．

(2.2) 同値関係の決定：一対比較により，要素集合上の同値関係を部分同値関係行列としてモデル化する．

(2.3) 縮約：同値類はそれに属する要素のどれかに代表させ，1つの要素として扱う．

(2.4) 半順序関係の決定：一対比較により，同値類の集合上の半順序関係を部分半順序行列としてモデル化する．

(3) 構造化

(3.1) レベル分解

(3.2) 階層構造の抽出：有向グラフ表示のために，パート分割や階層レベル分割等の計算を実行する．

(4) 描画：結果を階層グラフで表現する．この階層グラフを問題の構造モデルと呼ぶ．

(5) ドキュメント作成：結果をまとめてドキュメントを作成する．

3. 諸記号・諸定義

本論文で使用する記号を以下に示す．演算は特に断らない限り二値ブール代数に従う．また，垂直添字集合を V，水平添字集合を H とする行列 M を三つ組 $\langle M, V, H \rangle$ と表す．

- $N = \{1, 2, \cdots, n\}$：システム要素に対応する添字集合．
- R：N 上の二項関係．
- M：$\langle M, N, N \rangle$ の略記形．すなわち，関係 R を表す $n \times n$ の正方二値行列．(i,j) 要素 m_{ij} は 1 または 0 であり，以下のように与えられる．

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 : iRj\text{が成り立つ場合} \\ 0 : iRj\text{が成り立たない場合} \end{cases} \quad (1)$$

- $\bar{M}$：M の否定．
- M^T：M の転置行列．
- I：$n \times n$ の単位行列．
- 演算子 $\odot$： 行列 $A = [\, a_{ij} \,]$，$B = [\, b_{ij} \,]$ に対し，以下の演算を表す．

$$(A \odot B)_{ij} = a_{ij} b_{ij} \quad (2)$$

- δ_{ij}： クロネッカーのデルタ．
- $\rightarrow$： 含意を意味する．

定義 3.1 M に対し，次の添字集合を定義する．

- $L(i) = \{k \mid m_{ik} = 1\}$
- $\bar{L}(i) = \{k \mid m_{ik} = 0\}$
- $\bar{L}'(i) = \{i\} \cup \{k \mid m_{ik} = 0\}$
- $D(i) = \{k \mid m_{ki} = 1\}$
- $\bar{D}(i) = \{k \mid m_{ki} = 0\}$
- $\bar{D}'(i) = \{i\} \cup \{k \mid m_{ki} = 0\}$
- $K1(M) = \{(p,q) \mid m_{pq} = 1\}$
- $K0(M) = \{(p,q) \mid m_{pq} = 0\}$

定義 3.2 M に対し，次の添字集合を定義する．なお，これらは擬順序関係に関する添字集合である．

- $X11(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in D(i),\ q \in L(j)\}$
- $X10(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in L(j),\ q \in \bar{L}(i)$ または $p \in \bar{D}(j),\ q \in D(i)\}$
- $X00(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in L(i),\ q \in D(j)\}$

定義 3.3 M に対し，次の添字集合を定義する．なお，これらは半順序関係に関する添字集合である．

- $Y_P11(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in (D(i) \cap \bar{L}'(i)),$
  $q \in (L(j) \cap \bar{D}'(j))\}$
- $Y_P10_L(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in (L(j) \cap \bar{D}'(j)),$
  $q \in \bar{L}(i)\}$
- $Y_P10_D(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in \bar{D}(j),$
  $q \in (D(i) \cap \bar{L}'(i))\}$
- $Y_P10(m_{ij}) = Y_P10_L(m_{ij}) \cup Y_P10_D(m_{ij})$
- $Y_P00(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in (L(i) \cap \bar{D}'(i)),$
  $q \in (D(j) \cap \bar{L}'(j))\}$

定義 3.4 M に対し，次の添字集合を定義する．なお，これらは同値関係に関する添字集合である．

- $Y_E11(m_{ij}) = Y_E00(m_{ij}) = \{(p,q) \mid$
  $p \in (L(i) \cap D(i)),\ q \in (L(j) \cap D(j))\}$
- $Y_E10_i(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in (L(j) \cap D(j)),$
  $q \in (\bar{L}(i) \cap \bar{D}(i))\}$
- $Y_E10_j(m_{ij}) = \{(p,q) \mid p \in (\bar{L}(j) \cap \bar{D}(j)),$
  $q \in (L(i) \cap D(i))\}$
- $Y_E10(m_{ij}) = Y_E10_i(m_{ij}) \cup Y_E10_j(m_{ij})$

定義 3.5 M に対し，以下のベクトルを定義する．ただし，M の成分を変数 m_{ij} で表現したものを (i,j) セルと呼ぶ．

$c_i = [\ m_{1i}, \cdots, m_{ni}\ ]^T$ ：第 i 列セルベクトル
$r_j = [\ m_{j1}, \cdots, m_{jn}\ ]$ ：第 j 行セルベクトル
$c = c_1 \circ \cdots \circ c_n$ ：$c_1 \sim c_n$ の連接列ベクトル
$r = r_1 \circ \cdots \circ r_n$ ：$r_1 \sim r_n$ の連接行ベクトル

ここで，記号 $\circ$ は，連接

$$[\ i_1, i_2, \cdots, i_n\ ] \circ [\ j_1, j_2, \cdots, j_n\ ] = [\ i_1, i_2, \cdots, i_n, j_1, j_2, \cdots, j_n\ ]$$

を表す．

記号 m_{ij} が c_i，r_j の要素であるセル m_{ij} の場合と M の (i,j) 要素の値 (1 または 0) の場合との区別は文脈上明らかであると思われる．また，m_{ij} の代わりに $\bar{m}_{ij}$ を用いて $\bar{c}_i$，$\bar{r}_j$ も同様に定義する．

定義 3.6 反射的な二値行列とは

$$M + I = M \tag{3}$$

を満たす正方二値行列である．

定義 3.7 推移的な二値行列とは

$$M^2 = M \tag{4}$$

を満たす正方二値行列である．

定義 3.8 反対称的な二値行列とは

$$M \odot M^T = I \tag{5}$$

を満たす正方二値行列である．

定義 3.9 対称的な二値行列とは

$$M^T = M \tag{6}$$

を満たす正方二値行列である．

定義 3.10 擬順序行列とは，式 (3)，(4) を同時に満たす二値行列である．

定義 3.11 半順序行列とは，式 (3)，(4)，(5) を同時に満たす二値行列である．

定義 3.12 同値関係行列とは，式 (3)，(4)，(6) を同時に満たす二値行列である．

4. 半順序関係

推移的具象化で利用する半順序関係の構造を明らかにする．半順序行列 M の各要素は独立に値を持てるわけではない．すなわち，他の要素により値が一意に決まる要素が存在する．本章では，半順序行列 M のそのような構造を導く．なお，R は N 上の半順序関係（反射的，推移的かつ反対称的）とする．また，定理・補助定理の証明は付録に記す．

4.1 基本含意関係

補助定理 4.1 M が半順序行列ならば，すべての i，j，k に対して以下の式が成り立つ．

$$m_{ik} m_{kj} \bar{m}_{ij} = 0 \tag{7}$$

$$m_{ij} = m_{ij} \bar{m}_{ji} + \delta_{ij} \tag{8}$$

$$(m_{ik}\bar{m}_{ki} + \delta_{ik})(m_{kj}\bar{m}_{jk} + \delta_{kj}) \overline{(m_{ij}\bar{m}_{ji} + \delta_{ij})} = 0 \tag{9}$$

一般にブール方程式 $xy = 0$ は $(x = 1) \rightarrow (y = 0)$ と等価である．また，$\overline{m_{ij}\bar{m}_{ji} + \delta_{ij}} = 1$ ならば，$\bar{m}_{ij} = 1$ である．逆に，$\bar{m}_{ij} = 1$ ならば，$\overline{m_{ij}\bar{m}_{ji} + \delta_{ij}} = 1$ である．よって，$\overline{m_{ij}\bar{m}_{ji} + \delta_{ij}} = 1$ と $\bar{m}_{ij} = 1$ は同値である．これらを式 (9) に適用すると，以下の 6 つの含意関係を得る．

$$(m_{ik}\bar{m}_{ki} + \delta_{ik}) \rightarrow \{(m_{kj}\bar{m}_{jk} + \delta_{kj}) \rightarrow (m_{ij}\bar{m}_{ji} + \delta_{ij})\} \tag{10a}$$

$$(m_{kj}\bar{m}_{jk} + \delta_{kj}) \rightarrow \{(m_{ik}\bar{m}_{ki} + \delta_{ik}) \rightarrow (m_{ij}\bar{m}_{ji} + \delta_{ij})\} \tag{10b}$$

$$(m_{ik}\bar{m}_{ki} + \delta_{ik}) \rightarrow (\bar{m}_{ij} \rightarrow \bar{m}_{kj}) \tag{10c}$$

$$(m_{kj}\bar{m}_{jk} + \delta_{kj}) \rightarrow (\bar{m}_{ij} \rightarrow \bar{m}_{ik}) \tag{10d}$$

$$\bar{m}_{ij} \rightarrow \{(m_{ik}\bar{m}_{ki} + \delta_{ik}) \rightarrow \bar{m}_{kj}\} \tag{10e}$$

$$\bar{m}_{ij} \rightarrow \{(m_{kj}\bar{m}_{jk} + \delta_{kj}) \rightarrow \bar{m}_{ik}\} \tag{10f}$$

ここで，$A \rightarrow (B \rightarrow C)$ は，$B = 1$ のとき $A = 1$ が $C = 1$ を含意することを意味する．

式 (10a)〜(10f) の第二項（$A \rightarrow (B \rightarrow C)$ の B に対応する部分）が真である条件から導かれる二項間の含意関係（$(A = 1) \rightarrow (C = 1)$）の全体を基本含意関係と呼ぶ．

4.2 含意行列の導出

本節では，半順序行列 M に対する基本含意関係の二値行列表現である基本含意行列 Φ を求め，Φ の推

移的閉包である完全含意行列 Ψ を求める．

4.2.1　基本含意行列

式 (10a)，(10b) より，

$$(m_{ip}\bar{m}_{pi}+\delta_{ip}) \rightarrow \{(m_{pq}\bar{m}_{qp}+\delta_{pq}) \rightarrow (m_{jq}\bar{m}_{qj}+\delta_{jq})\} \quad (ただし, i=j)$$

$$(m_{ip}\bar{m}_{pi}+\delta_{ip}) \rightarrow \{(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji}) \rightarrow (m_{jq}\bar{m}_{qj}+\delta_{jq})\} \quad (ただし, p=q)$$

これらを合わせると，

$$(m_{ip}\bar{m}_{pi}+\delta_{ip}) \rightarrow \{(\delta_{ij}(m_{pq}\bar{m}_{qp}+\delta_{pq}) \vee \delta_{pq}(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})) \rightarrow (m_{jq}\bar{m}_{qj}+\delta_{jq})\}$$

したがって，

$$\delta_{ij}(m_{pq}\bar{m}_{qp}+\delta_{pq}) + \delta_{pq}(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji}) = 1 \tag{11a}$$

が成立するとき，$(m_{ip}\bar{m}_{pi}+\delta_{ip})=1$ が $(m_{jq}\bar{m}_{qj}+\delta_{qj})=1$ を含意することが示される．これを $1-1$ 基本含意関係と呼ぶ．同様に，式 (10c)，(10d) より，

$$\delta_{ij}\bar{m}_{qp}+\delta_{pq}\bar{m}_{ij}=1 \tag{11b}$$

が成立するとき，$(m_{ip}\bar{m}_{pi}+\delta_{ip})=1$ が $\bar{m}_{qj}=1$ を含意することが示される．これを $1-0$ 基本含意関係と呼ぶ．また，式 (10e)，(10f) より，

$$\delta_{ij}(m_{pq}\bar{m}_{qp}+\delta_{pq}) + \delta_{pq}(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji}) = 1 \tag{11c}$$

が成立するとき，$\bar{m}_{pi}=1$ が $\bar{m}_{qj}=1$ を含意することが示される．これを $0-0$ 基本含意関係と呼ぶ．

式 (11a)~式 (11c) を行列表現したものを基本含意行列と呼ぶと，次の補助定理 4.2 が示される．

補助定理 4.2　M が半順序行列ならば，基本含意行列 Φ は以下で表される．

$$\Phi = \langle\ \Phi,\ \bar{c}\circ(r^T\odot\bar{c}),\ \bar{c}^T\circ(r\odot\bar{c}^T)\ \rangle$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \bar{c}^T & (r\odot\bar{c}^T) \end{array} \\ \begin{array}{c} \bar{c} \\ (r^T\odot\bar{c}) \end{array} & \begin{pmatrix} \Phi_{00} & O \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} \end{pmatrix} \end{array} \tag{12}$$

ただし，$\Phi_{11},\Phi_{10},\Phi_{00}$ の (i,j) ブロック小行列は次のように与えられる．

$$\Phi_{11}^{ij} = \langle\ \Phi_{11}^{ij},\ ({r_i}^T\odot\bar{c}_i),\ (r_j\odot\bar{c}_j^T)\ \rangle = \delta_{ij}(M\odot\bar{M}^T+I) + (m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})I \tag{13a}$$

$$\Phi_{10}^{ij} = \langle\ \Phi_{10}^{ij},\ ({r_i}^T\odot\bar{c}_i),\ \bar{c}_j^T\ \rangle = \delta_{ij}\bar{M}^T+\bar{m}_{ij}I \tag{13b}$$

$$\Phi_{00}^{ij} = \langle\ \Phi_{00}^{ij},\ \bar{c}_i,\ \bar{c}_j^T\ \rangle = \delta_{ij}(M\odot\bar{M}^T+I) + (m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})I \tag{13c}$$

4.2.2　完全含意行列

含意は推移性（$((A\rightarrow B$かつ$B\rightarrow C)$ ならば $A\rightarrow C$）を満たす二項関係である．したがって，基本含意関係の推移的閉包からすべての含意が求められ，それを完全含意関係と呼ぶ．また，完全含意関係の行列表現が完全含意行列 Ψ である．

Ψ は Φ の推移的閉包を計算することにより求めることができる．すなわち，

$$\Psi = I+\Phi+\Phi^2+\cdots$$

Φ は推移的であるから，$I\leq\Phi\leq\Phi^2\leq\cdots$ である．よって，この級数の第 k 項までの部分和は

$$I+\Phi+\Phi^2+\cdots+\Phi^k=\Phi^k$$

となる．したがって，$\Phi^k=\Phi^{k+1}$ を満たす整数 k を求めれば，$\Psi=\Phi^k$ を得る．任意の基本含意行列 Φ に対して，整数 k の値は 2 であることが次の定理により示される．

定理 4.1　式 (12)，(13a)~(13c) を満たす Φ に対して，

$$\Psi = \Phi^2 = \langle\ \Psi,\ \bar{c}\circ(r^T\odot\bar{c}),\ \bar{c}^T\circ(r\odot\bar{c}^T)\ \rangle$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \bar{c}^T & (r\odot\bar{c}^T) \end{array} \\ \begin{array}{c} \bar{c} \\ (r^T\odot\bar{c}) \end{array} & \begin{pmatrix} \Psi_{00} & O \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} \end{pmatrix} \end{array} \tag{14}$$

ただし，$\Psi_{11},\Psi_{10},\Psi_{00}$ の (i,j) ブロック小行列は次のように与えられる．

$$\Psi_{11}^{ij} = \langle\ \Psi_{11}^{ij},\ ({r_i}^T\odot\bar{c}_i),\ (r_j\odot\bar{c}_j^T)\ \rangle = (m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})(M\odot\bar{M}^T+I) \tag{15a}$$

$$\Psi_{10}^{ij} = \langle\ \Psi_{10}^{ij},\ ({r_i}^T\odot\bar{c}_i),\ \bar{c}_j^T\ \rangle = (m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})\bar{M}^T + \bar{m}_{ij}(M\odot\bar{M}^T+I) \tag{15b}$$

$$\Psi_{00}^{ij} = \langle\ \Psi_{00}^{ij},\ \bar{c}_i,\ \bar{c}_j^T\ \rangle = (m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})(M\odot\bar{M}^T+I) \tag{15c}$$

4.3　含 意 集 合

定義 4.1　m_{ij} の $1-1$ 含意集合は m_{ij} から $1-1$ 含意により含意されるセルの集合である．同様に，1−0 含意集合，$0-0$ 含意集合は m_{ij} からそれぞれ $1-0$ 含意，$0-0$ 含意により含意されるセルの集合である．

式 (15a) より，

$$(m_{pi}\bar{m}_{ip}+\delta_{pi})(m_{jq}\bar{m}_{qj}+\delta_{jq})=1 \tag{16a}$$

ならば，$(m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta_{ij})=1$ は $(m_{pq}\bar{m}_{qp}+\delta_{pq})=1$ を含意する．式 (16a) が成り立つためには，添字対 (p,q) は

$$(p,q)\in Y_P11(m_{ij}) \tag{17a}$$

でなければならない．同様に，式 (15b) より，

$$(m_{qi}\bar{m}_{iq}+\delta_{qi})\bar{m}_{pj} + \bar{m}_{iq}(m_{jp}\bar{m}_{pj}+\delta_{jp})=1 \tag{16b}$$

ならば，$(m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta_{ij})=1$ は $\bar{m}_{pq}=1$ を含意する．式 (16b) が成り立つためには，添字対 (p,q) は

$$(p,q)\in Y_P10(m_{ij}) \tag{17b}$$

でなければならない．また，式 (15c) より，

$$(m_{qj}\bar{m}_{jq}+\delta_{qj})(m_{ip}\bar{m}_{pi}+\delta_{ip})=1 \tag{16c}$$

ならば，$\bar{m}_{ij}=1$ は $\bar{m}_{pq}=1$ を含意する．式 (16c) が成り立つためには，添字対 (p,q) は

$$(p,q)\in Y_P00(m_{ij}) \tag{17c}$$

でなければならない．

以上をまとめて，次の補助定理を得る．

補助定理 4.3 半順序行列 M に対して，m_{ij} の 1−1 含意集合は添字対 $(p,q)\in Y_P11(m_{ij})$ を持つセル集合である．また，1−0 含意集合，0−0 含意集合はそれぞれ添字対 $(p,q)\in Y_P10(m_{ij}),(p,q)\in Y_P00(m_{ij})$ を持つセル集合である．

5. 部分半順序行列

前章までは要素の値が既知（1 または 0）である行列について述べてきた．本章以降は，要素の値が未知である場合を含む行列について述べる．未知要素を含む行列を以下のように定義する．

- 部分二値行列 M: (i,j) 要素は，以下のように与えられる．

$$m_{ij}=\begin{cases}1: iRj\text{が成り立つ場合}\\ 0: iRj\text{が成り立たない場合}\\ x: iRj\text{の成否が不明}\end{cases} \tag{18}$$

ただし，x は未知数（ブール変数）である．

第 3 章で定義した諸記号・諸定義は，M を部分二値行列として拡張する．

次に，部分二値行列 M が半順序行列になるための条件を示す．なお，簡略化のため以後 $m_{ij}=x$ を x_{ij}，$\bar{m}_{ij}=\bar{x}$ を $\bar{x}_{ij}$ と記す．

定義 5.1 部分半順序行列 M とは，次の無矛盾性・極大性を満たす部分二値行列である．

(1) M が無矛盾である：任意の既知要素 m_{ij} に対して，以下の条件を満たす三つ組 (i,j,k) が存在しない．
  (a) $m_{ij}=m_{ji}=1$ $(i\neq j)$
  (b) $m_{ij}=0,\ m_{ik}=m_{kj}=1$

(2) M が極大である：任意の未知要素 x_{ij} に対して，以下の条件を満たす三つ組 (i,j,k) が存在しない．
  (a) $m_{ji}=1$
  (b) $m_{kj}=0,\ m_{ki}=1$
  (c) $m_{ik}=0,\ m_{jk}=1$
  (d) $m_{ik}=m_{kj}=1$

6. 含意アルゴリズム

半順序関係を添字対集合を用いた含意アルゴリズムを示し，擬順序関係の含意アルゴリズムとの対応を考察する．

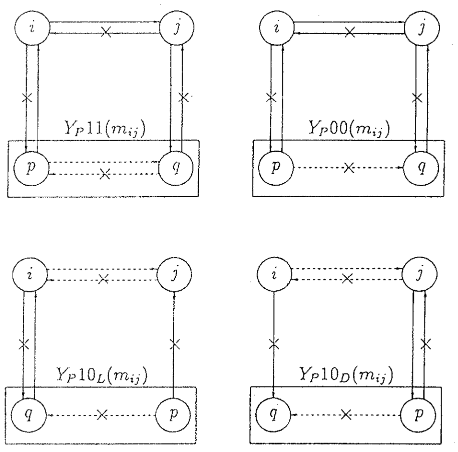
6.1 含意アルゴリズム

第 4.3 節より，部分半順序行列 M の未知要素 x_{ij} に 1 を与えると， 添字対 $(p,q)\in Y_P11(m_{ij})$ である $(m_{pq}\bar{m}_{qp}+\delta_{pq})$ が 1，$(p,q)\in Y_P10(m_{ij})$ である $\bar{m}_{pq}$ が 0 と決まる．同様に，x_{ij} に 0 を与えると，$(p,q)\in Y_P00(m_{ij})$ である $\bar{m}_{pq}$ が 0 と決まる．この結果より，部分半順序行列 M の含意を求めるアルゴリズムは以下のようになる（**図 1**）．

[含意アルゴリズム A] m_{ij} による含意

```
未知要素である m_ij に値 1 または 0 を与える．
If（与えられた値が 1）
  Set m_ij = 1, m_ji = 0
  Set m_pq = 1, m_qp = 0 for all (p,q) ∈ Y_P11(m_ij)
  Set m_pq = 0 for all (p,q) ∈ Y_P10(m_ij)
Else
  Set m_ij = 0
  Set m_pq = 0 for all (p,q) ∈ Y_P00(m_ij)
```

このアルゴリズムの正当性は，次の定理を証明することにより示される．



: 1 − 1 含意により決定した 1
: 1 − 0 または 0 − 0 含意により決定した 0

図 1 含意アルゴリズムのグラフ表現
Fig. 1 A digraph for the implication algorithm.

定理 6.1 部分半順序行列に対して含意アルゴリズムを適用した結果，以下の 2 点が保証される．

(a) 既知要素の値が書き換えられない．

(b) アルゴリズム適用後もまた部分半順序行列になる．

したがって，部分半順序行列に含意アルゴリズムを繰り返し用いると，最終的にはすべての要素が既知である半順序行列を得ることができる．なお，初期行列には対角要素がすべて 1 でほかはすべて未知要素である行列を用いるとができ，この行列は明らかに部分半順序行列である．

6.2 擬順序関係の含意アルゴリズムとの対応

本節では，文献 3) の擬順序関係の含意アルゴリズムとの対応を示し，その正当性を述べる．

含意アルゴリズム B は擬順序関係のそれにステップ 3 の $m_{ji}=0$ を加えたものである．

[含意アルゴリズム B] m_{ij} による含意

1: 未知要素である m_{ij} に値 1 または 0 を与える．
2: If (与えられた値が 1)
3: Set $m_{ij}=1, m_{ji}=0$
4: Set $m_{pq}=1$ for all $(p,q)\in X11(m_{ij})$
5: Set $m_{pq}=0$ for all $(p,q)\in X10(m_{ij})$
6: Else
7: Set $m_{ij}=0$
8: Set $m_{pq}=0$ for all $(p,q)\in X00(m_{ij})$

含意アルゴリズムにおける変更は次の 2 点である．

(i) $Y_P11(m_{ij})$, $Y_P10(m_{ij})$, $Y_P00(m_{ij})$ がそれぞれ $X11(m_{ij})$, $X10(m_{ij})$, $X00(m_{ij})$ に変更されている．

(ii) ステップ 4 の $m_{qp}=0$ が削除されている．

これらの変更の正当性を示すために，式 (8) より得られる式 (19) を利用する．

$$m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta_{ij}=1\Leftrightarrow m_{ij}=1 \tag{19}$$

まず，変更点 (i) の正当性を示す．式 (19) より式 (16a) は，

$$m_{pi}m_{jq}=1 \tag{20a}$$

と同値であり，式 (17a) は，

$$(p,q)\in X11(m_{ij}) \tag{21a}$$

と同値となる．

同様に，式 (16b)，(17b) はそれぞれ

$$m_{qi}\bar{m}_{pj}+\bar{m}_{iq}m_{jp}=1 \tag{20b}$$

$$(p,q)\in X10(m_{ij}) \tag{21b}$$

と同値となる．

また，式 (16c)，(17c) はそれぞれ

$$m_{qj}m_{ip}=1 \tag{20c}$$

$$(p,q)\in X00(m_{ij}) \tag{21c}$$

と同値となる．

以上より，変更点 (i) の正当性は示された．次に，変更点 (ii) の正当性を示す．$Y_P11(m_{ij})$ と $X10(m_{ij})$ の関係を考える．式 (20b) の添字 p, q を入れ換えると，

$$m_{pi}\bar{m}_{qj}+\bar{m}_{ip}m_{jq}=1 \tag{22}$$

となり，このとき $(m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta_{ij})=1$ は $\bar{m}_{qp}=1$ を含意する．

一方，式 (16a) が成り立つ場合は，

(a) $\delta_{pi}=1 \ \wedge\ \delta_{jq}=1$
(b) $\delta_{pi}=1 \ \wedge\ m_{jq}\bar{m}_{qj}=1$
(c) $m_{pi}\bar{m}_{ip}=1 \ \wedge\ \delta_{jq}=1$
(d) $m_{pi}\bar{m}_{ip}=1 \ \wedge\ m_{jq}\bar{m}_{qj}=1$

の 4 通りである．

(a) の場合は $p=i\wedge q=j$ であるから，$\bar{m}_{ip}=\bar{m}_{qj}=0$ となり，式 (22) は成り立たない．よって，$(m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta_{ij})=1$ は $\bar{m}_{qp}=\bar{m}_{ji}=1$ を含意しない．

(b), (c), (d) の場合，$(m_{pi}=1\ \wedge\ \bar{m}_{ip}=1)$ か $(m_{jq}=1\wedge\bar{m}_{qj}=1)$ の少なくとも一方が成立し，式 (22) が成り立つ．すなわち，$Y11(m_{ij})$ により 0 と決まる要素 m_{qp}(m_{ji}は除く) は $X10(m_{ij})$ によっても決定する．よって，ステップ 4 の $m_{qp}=0$ は削除してもよい．m_{ji} には，強制的に 0 を与える．

7. 同値関係

本章では，R は N 上の同値関係（反射的，推移的かつ対称的）とする．半順序関係の場合と同様にして，同値関係の完全含意行列 Ψ と含意アルゴリズムを求めることができ，それらを以下に示す．

[完全含意行列 Ψ]

$$\begin{aligned}\Psi &= \langle\ \Psi,\ (\bar{c}\odot\bar{r}^T)\circ(r^T\odot c),\\ &\qquad (\bar{c}^T\odot\bar{r})\circ(r\odot c^T)\ \rangle\\ &= \begin{array}{c|cc} & (\bar{c}^T\odot\bar{r}) & (r\odot c^T)\\ \hline (\bar{c}\odot\bar{r}^T) & \Psi_{00} & O\\ (r^T\odot c) & \Psi_{10} & \Psi_{11}\end{array}\end{aligned} \tag{23}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\Psi_{11}^{ij} &= \langle\ \Psi_{11}^{ij},\ ({r_i}^T\odot c_i),\ (r_j\odot {c_j}^T)\ \rangle\\ &= (m_{ji}m_{ij})(M\odot M^T)\end{aligned} \tag{24a}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{10}^{ij} &= \langle\ \Psi_{10}^{ij},\ ({r_i}^T\odot c_i),\ (\bar{c}_j^T\odot\bar{r}_j)\ \rangle\\ &= (m_{ji}m_{ij})(\bar{M}\odot\bar{M}^T)\\ &\quad+(\bar{m}_{ij}\bar{m}_{ji})(M\odot M^T)\end{aligned} \tag{24b}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{00}^{ij} &= \langle\ \Psi_{00}^{ij},\ (\bar{c}_i\odot\bar{r}_i^T),\ (\bar{c}_j^T\odot\bar{r}_j)\ \rangle\\ &= (m_{ji}m_{ij})(M\odot M^T)\end{aligned} \tag{24c}$$

[含意アルゴリズム] m_{ij} による含意

1: 未知要素である m_{ij} に値 1 または 0 を与える．

$$
M_1 = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & x & x & 1 & x & x & x & x & x & 1 \\
x & 1 & x & x & x & x & x & x & 1 & x \\
x & x & 1 & x & x & x & x & x & x & x \\
1 & x & x & 1 & x & x & x & x & x & 1 \\
x & x & x & x & 1 & x & 1 & x & x & x \\
x & x & x & x & x & 1 & x & x & x & x \\
x & x & x & x & 1 & x & 1 & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x & x & 1 & x & x \\
x & 1 & x & x & x & x & x & x & 1 & x \\
1 & x & x & 1 & x & x & x & x & x & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

図 2 部分同値関係行列 M_1

Fig. 2 Partially filled equivalence relation matrix M_1.

$$
M_1' = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & x & x & 1 & x & x & x & x & x & 1 \\
x & 1 & x & x & 1 & x & 1 & x & 1 & x \\
x & x & 1 & x & x & x & x & x & x & x \\
1 & x & x & 1 & x & x & x & x & x & 1 \\
x & 1 & x & x & 1 & x & 1 & x & 1 & x \\
x & x & x & x & x & 1 & x & x & x & x \\
x & 1 & x & x & 1 & x & 1 & x & 1 & x \\
x & x & x & x & x & x & x & 1 & x & x \\
x & 1 & x & x & 1 & x & 1 & x & 1 & x \\
1 & x & x & 1 & x & x & x & x & x & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

図 3 部分同値関係行列 M_1'

Fig. 3 Partially filled equivalence relation matrix M_1'.

2: **If** (与えられた値が 1)
3: Set $m_{ij} = m_{ji} = 1$
4: Set $m_{pq} = m_{qp} = 1$ for all $(p, q) \in X11(m_{ij})$
5: Set $m_{pq} = m_{qp} = 0$ for all $(p, q) \in X10(m_{ij})$
6: **Else**
7: Set $m_{ij} = m_{ji} = 0$
8: Set $m_{pq} = m_{qp} = 0$ for all $(p, q) \in X00(m_{ij})$

8. 例 題

本章では，FISM/KJ の具象化の例を示す．10 個の要素を考え，何回かの一対比較の後，部分同値関係行列 M_1（**図 2**）を得る．

[含意アルゴリズム]

1: 未知要素 x_{59} に 1 を与える．
2: **If** $x_{59} = 1$
3: $m_{59} = m_{95} = 1$
4: $D(5) = \{5,7\}$，$L(9) = \{2,9\}$ より，$X11(x_{59}) = \{(5,2),(5,9),(7,2),(7,9)\}$．よって，$m_{52} = m_{25} = m_{59} = m_{95} = m_{72} = m_{27} = m_{79} = m_{97} = 1$.
5: $L(9) = \bar{L}(5) = \emptyset$．また，$\bar{D}(9) = D(5) = \emptyset$．よって，$X10(x_{59}) = \emptyset$．

同値関係による関係付けはこれで終了とする．M_1 は M_1'（**図 3**）に更新される．この結果，要素 *1, 4, 10* と *2, 5, 7, 9* がそれぞれ同値類となり，縮約され，要素 *1, 2* をそれぞれ代表とする．次に，何回かの一対比較の後，部分半順序行列 M_2（**図 4**）を得る．

[含意アルゴリズム]

1: 未知要素 x_{61} に 1 を与える．
2: **If** $x_{61} = 1$
3: $m_{61} = 1$，$m_{16} = 0$
4: $D(6) = \{3,6\}$，$L(1) = \{1,8\}$ より，
$X11(x_{61}) = \{(3,1),(3,8),(6,1),(6,8)\}$．
ゆえに，$m_{31} = m_{38} = m_{61} = m_{68} = 1$．
5: $L(1) = \{1,8\}, \bar{L}(6) = \{2,3\}$ より，

$$
M_2 = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & x & x & 1 \\
1 & 1 & x & x & 1 \\
x & x & 1 & 1 & x \\
x & 0 & 0 & 1 & x \\
0 & 0 & x & x & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

図 4 部分半順序行列 M_2

Fig. 4 Partially filled partial ordering matrix M_2.

$$
M_2' = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & x & x & 1 \\
1 & x & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

図 5 部分半順序行列 M_2'

Fig. 5 Partially filled partial ordering matrix M_2'.

$X10_L(m_{61}) = \{(1,2),(1,3),(8,2),(8,3)\}$．
また，$\bar{D}(1) = \{8\}$，$D(6) = \{3,4\}$．
$X10_D(m_{61}) = \{(8,3),(8,4)\}$．
ゆえに，$m_{12} = m_{13} = m_{82} = m_{83} = m_{84} = 0$．

M_2 は M_2'（**図 5**）に更新される．以後，未知要素がなくなるまで一対比較を繰り返し，半順序行列を得る．

9. おわりに

本論文では，KJ 法を参考とし従来の FISM を拡張した「FISM/KJ」を提案し，その理論的背景である半順序関係・同値関係の推移的具象化を提案した．FISM/KJ は，KJ 法の特徴であるカードをながめて分類・整理する機能を取り入れることが可能となる．現在マルチメディア・カード・インターフェイスを利用した FISM/KJ システムを開発中である．今後の課題としては，人間の判断の曖昧さを考慮するために，要素間の関係を二値からファジィへ拡張することなどが考えられる．

付　録

A.1 補助定理 4.1 の証明

式 (7) は，文献 4) を参照．また式 (8) は，式 (5) を (i,j) 成分で表した次の式より導かれる．

$$m_{ij}m_{ji}=\delta_{ij}$$
$$\Leftrightarrow m_{ij}(\bar{m}_{ji}+m_{ji})=m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta_{ij}$$
$$\Leftrightarrow m_{ij}=m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta_{ij}$$

式 (9) は，式 (8) を式 (7) に代入して得られる．

（証明終）

A.2 定理 4.1 の証明

定理 4.1 を証明するために，以下の補助定理を利用する．

［補助定理］ M が半順序行列ならば，すべての i，j に対して以下の式が成り立つ．

$$\sum_k \bar{m}_{ki}(m_{kj}\bar{m}_{jk}+\delta_{kj})=\bar{m}_{ji} \tag{25}$$

$$\sum_k (m_{ik}\bar{m}_{ki}+\delta_{ik})\bar{m}_{jk}=\bar{m}_{ji} \tag{26}$$

$$\sum_k (m_{ik}\bar{m}_{ki}+\delta_{ik})(m_{kj}\bar{m}_{jk}+\delta_{kj}) = m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta_{ij} \tag{27}$$

すなわち，

$$\bar{M}^T(M\odot\bar{M}^T+I)=(M\odot\bar{M}^T+I)\bar{M}^T = \bar{M}^T \tag{28}$$

$$(M\odot\bar{M}^T+I)^2=M\odot\bar{M}^T+I \tag{29}$$

［証　明］

一般に，ブール方程式 $xy=0$ と $x\le\bar{y}$ は同値である．補助定理 4.1 の式 (9) より，

$$(m_{kj}\bar{m}_{jk}+\delta_{kj})(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})\overline{(m_{ki}\bar{m}_{ik}+\delta_{ki})}=0$$
$$\Leftrightarrow \overline{(m_{ki}\bar{m}_{ik}+\delta_{ki})}(m_{kj}\bar{m}_{jk}+\delta_{kj})\le\overline{(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})}$$
$$\Leftrightarrow \bar{m}_{ki}(m_{kj}\bar{m}_{jk}+\delta_{kj})\le\bar{m}_{ji}$$
$$\Leftrightarrow \sum_k \bar{m}_{ki}(m_{kj}\bar{m}_{jk}+\delta_{kj})\le\sum_k \bar{m}_{ji}=\bar{m}_{ji}$$

また，

$$\sum_k \bar{m}_{ki}(m_{kj}\bar{m}_{jk}+\delta_{kj})\ \ge\ \bar{m}_{ji}$$

したがって，式 (25) を得る．

同様にして，式 (26)，(27) も証明できる．また，これらを行列の式に直すと，式 (28)，(29) を得る．

（証明終）

式 (12) は下三角ブロック行列であるから，Φ^2 と Φ^3 はそれぞれ以下のように書くことができる．

$$\Phi^2=\begin{pmatrix}{\Phi_{00}}^2 & O\\ \Lambda^2 & {\Phi_{11}}^2\end{pmatrix}$$

$$\Phi^3=\begin{pmatrix}{\Phi_{00}}^3 & O\\ \Lambda^3 & {\Phi_{11}}^3\end{pmatrix}$$

ただし，

$$\Lambda^2=\Phi_{10}\Phi_{00}+\Phi_{11}\Phi_{10}$$
$$\Lambda^3=\Lambda^2\Phi_{00}+{\Phi_{11}}^2\Phi_{10}$$

詳細な計算は次のとおりである．

(1) ${\Phi_{11}}^2$，${\Phi_{00}}^2$ の計算

$$\begin{aligned}
&({\Phi_{11}}^2)^{ij}\\
&=({\Phi_{00}}^2)^{ij}\\
&=\sum_k \Phi_{11}^{ik}\Phi_{11}^{kj}\\
&=\sum_k\{\ \delta_{ik}(M\odot\bar{M}^T+I)\\
&\qquad+(m_{ki}\bar{m}_{ik}+\delta_{ki})I\ \}\\
&\qquad\{\delta_{kj}(M\odot\bar{M}^T+I)+(m_{jk}\bar{m}_{kj}+\delta_{jk})I\}\\
&=\sum_k\{\delta_{ik}\delta_{kj}(M\odot\bar{M}^T+I)^2\\
&\qquad+\delta_{ik}(m_{jk}\bar{m}_{kj}+\delta_{jk})(M\odot\bar{M}^T+I)I\\
&\qquad+\delta_{kj}(m_{ki}\bar{m}_{ik}+\delta_{ki})I(M\odot\bar{M}^T+I)\\
&\qquad+(m_{ki}\bar{m}_{ik}+\delta_{ki})(m_{jk}\bar{m}_{kj}+\delta_{jk})I^2\ \}\\
&=\delta_{ij}(M\odot\bar{M}^T+I)\\
&\qquad+(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})(M\odot\bar{M}^T+I)\\
&\qquad+(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})(M\odot\bar{M}^T+I)\\
&\qquad+(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})I
\end{aligned}$$

したがって，

$$({\Phi_{11}}^2)^{ij}=({\Phi_{00}}^2)^{ij} =(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})(M\odot\bar{M}^T+I) \tag{30}$$

(2) Λ^2 の計算

$$(\Lambda^2)^{ij}=\sum_k(\Phi_{10}^{ik}\Phi_{00}^{kj}+\Phi_{11}^{ik}\Phi_{10}^{kj})$$

$$\begin{aligned}
&\sum_k\Phi_{10}^{ik}\Phi_{00}^{kj}\\
&=\sum_k(\delta_{ik}\bar{M}^T+\bar{m}_{ik}I)\\
&\qquad\{\delta_{kj}(M\odot\bar{M}^T+I)+(m_{jk}\bar{m}_{kj}+\delta_{jk})I\}\\
&=\sum_k\{\delta_{ik}\delta_{kj}\bar{M}^T(M\odot\bar{M}^T+I)\\
&\qquad+\delta_{ik}(m_{jk}\bar{m}_{kj}+\delta_{jk})\bar{M}^TI\\
&\qquad+\delta_{kj}\bar{m}_{ik}I(M\odot\bar{M}^T+I)\\
&\qquad+\bar{m}_{ik}(m_{jk}\bar{m}_{kj}+\delta_{jk})I^2\}\\
&=\delta_{ij}\bar{M}^T+(m_{ji}\bar{m}_{ij}+\delta_{ji})\bar{M}^T\\
&\qquad+\bar{m}_{ij}(M\odot\bar{M}^T+I)+\bar{m}_{ij}I
\end{aligned}$$

$$\sum_k \Phi_{11}^{ik}\Phi_{10}^{kj}$$
$$= \sum_k \{\delta_{ik}(M \odot \bar{M}^T + I)$$
$$+ (m_{ki}\bar{m}_{ik} + \delta_{ki})I\} (\delta_{kj}\bar{M}^T + \bar{m}_{kj}I)$$
$$= \sum_k \{\delta_{ik}\delta_{kj}(M \odot \bar{M}^T + I)\bar{M}^T$$
$$+ \delta_{ik}\bar{m}_{kj}(M \odot \bar{M}^T + I)I$$
$$+ \delta_{kj}(m_{ki}\bar{m}_{ik} + \delta_{ki})I\bar{M}^T$$
$$+ (m_{ki}\bar{m}_{ik} + \delta_{ki})\bar{m}_{kj}I^2\}$$
$$= \delta_{ij}\bar{M}^T + \bar{m}_{ij}(M \odot \bar{M}^T + I)$$
$$+ (m_{ji}\bar{m}_{ij} + \delta_{ji})\bar{M}^T + \bar{m}_{ij}I$$

したがって，

$$(\Lambda^2)^{ij} = (m_{ji}\bar{m}_{ij} + \delta_{ji})\bar{M}^T + \bar{m}_{ij}(M \odot \bar{M}^T + I) \quad (31)$$

(3) $\Phi_{11}{}^3, \Phi_{00}{}^3$ の計算

$$(\Phi_{11}{}^3)^{ij} = (\Phi_{00}{}^3)^{ij} = \sum_k (\Phi_{11}^2)^{ik}\Phi_{11}^{kj}$$

であり, (1) の結果を用いて

$$(\Phi_{11}{}^3)^{ij} = (\Phi_{00}{}^3)^{ij} = (m_{ji}\bar{m}_{ij} + \delta_{ji})(M \odot \bar{M}^T + I) \quad (32)$$

(4) Λ^3 の計算

$$(\Lambda^3)^{ij} = \sum_k \{(\Lambda^2)^{ik}\Phi_{00}^{kj} + (\Phi_{11}{}^2)^{ik}\Phi_{10}^{kj}\}$$

であり, (1), (2) の結果を用いて

$$(\Lambda^3)^{ij} = (m_{ji}\bar{m}_{ij} + \delta_{ji})\bar{M}^T + \bar{m}_{ij}(M \odot \bar{M}^T + I) \quad (33)$$

ゆえに，式 (30) と式 (32)，式 (31) と式 (33) をそれぞれ比較して，$\Phi^2 = \Phi^3$ という結論を得る．

（証明終）

A.3 定理 6.1 の証明

(1) x_{ij} により含意される要素を m_{pq} とする．$(p,q) \in Y_P11(m_{ij})$ の場合，アルゴリズム適用前に $m_{pq} = 0$ と仮定する．$(i,j) \in Y_P10(m_{pq})$ であるので，適用前に $m_{ij} = 0$ となっている．これは x_{ij} の仮定に反する．同様に，$(p,q) \in Y_P10(m_{ij})$ と $(p,q) \in Y_P00(m_{ij})$ の場合も，適用前に $m_{ij} = 0$ となっている．よって，含意アルゴリズムにより既知要素の値が書き換わることはない．

(2) 証明は以下のとおりである．

(I) x_{ij} に 0 を与えた場合

- 無矛盾性

(a) 明らかに満たされている．

(b) 適用後に矛盾があるとすると，$(p,q) \in (K0(M) \cup Y_P00(m_{ij})) \wedge (p,r),(r,q) \in K1(M)$ である (p,q,r) が存在する．$(p,q) \in K0(M)$ の場合，x_{ij} に 0s を与える前に (p,q,r) が無矛盾でない．$(p,q) \in Y_P00(m_{ij})$ の場合，$m_{ir} = m_{rj} = 1, x_{ij}$ であるので，x_{ij} に 0 を与える前に (i,j,r) が極大でない．

いずれの場合も部分半順序行列の条件に反することから，無矛盾性は保証される．

- 極大性

ここで，次の集合を定義する．

$Kx(M) = \{(p,q) \mid m_{pq} = x\}$

(a) 明らかに満たされている．

(b) 適用後に矛盾があるとすると，$(p,q) \in (K0(M) \cup Y_P00(m_{ij})) \wedge (p,r) \in K1(M) \wedge (r,q) \in Kx(M)$ である (p,q,r) が存在する．$(p,q) \in K0(M)$ の場合，x_{ij} に 0 を与える前に (p,q,r) が極大でない．$(p,q) \in Y_P00(m_{ij})$ の場合，$m_{ir} = 1$，$m_{ri} = 0$ である．よって，$(r,q) \in Y_P00(m_{ij})$ であり，x_{ij} に 0 を与えると (r,q) は 0 となっている必要がある．これは $(r,q) \in Kx(M)$ に反する．(c) は同様に証明できる．(d) は明らかに満たされている．

以上より，x_{ij} に 0 を与えたとき，含意アルゴリズムにより生成される行列も部分半順序行列である．

(II) x_{ij} に 1 を与えた場合

- 無矛盾性

(a) 適用後に矛盾があるとすると，$(p,q) \in (K1(M) \cup Y_P11(m_{ij})) \wedge (q,p) \in (K1(M) \cup Y_P11(m_{ij}))$ である (p,q) が存在する．**表 1** より，このような (p,q) が存在しない．

(b) 適用後に矛盾があるとすると，$(p,q) \in (K0(M) \cup Y_P10(m_{ij})) \wedge (p,r)$，$(r,q) \in (K1(M) \cup Y_P11(m_{ij}))$ である (p,q,r) が存在する．(a) の場合と同様に，$(p,q) \in K0(M) \wedge (p,r)$，$(q,p) \in K1(M)$ の場合，

表 1 $x_{ij} = 1$ のときの無矛盾性 (a)
Table 1 Proof of the consistency property when $x_{ij} = 1$.

場合	(p,q)	(q,p)	理由
1	$K1$	$K1$	適用前に (p,q) が無矛盾でない．
2	$K1$	Y_P11	$m_{pq} = 1 \wedge (i,j) \in Y_P10(m_{pq})$ より，適用前に $m_{ij} = 1$ となり，x_{ij} に矛盾する．
3	Y_P11	$K1$	$m_{pq} = 1 \wedge (i,j) \in Y_P10(m_{qp})$ より，適用前に $m_{ij} = 1$ となり，x_{ij} に矛盾する．
4	Y_P11	Y_P11	2, 3 の場合と同様.

表 2　$x_{ij}=1$ のときの極大性 (a)

Table 2　Proof of the maximality property when $x_{ij}=1$.

場合	(p,q)	(q,p)	理由
1	$K1$	Kx	適用前に (p,q) が極大でない.
2	Y_P11	Kx	適用後は $m_{qp}=0$ となり, $(p,q)\in Kx(M)$ に矛盾する.

適用前に (p,q) が無矛盾でない. それ以外の場合は, 適用前に $m_{ij}=1$ となっている.

- 極大性

(a) 適用後に矛盾があるとすると, $(p,q)\in(K1(M)\cup Y_P11(m_{ij}))\wedge(q,p)\in Kx(M)$ である (p,q) が存在する. **表 2** より, このような (p,q) が存在しない.

(b) 適用後に矛盾があるとすると, $(p,q)\in(K0(M)\cup Y_P10(m_{ij}))\wedge(p,r)\in(K1(M)\cup Y_P11(m_{ij}))\wedge(r,q)\in Kx(M)$ である (p,q,r) が存在する. 適用後に $m_{rq}=0$ となっている. (c) も同様. (d) は適用前に $m_{ij}=0$ となっている.

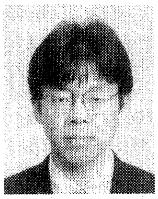
以上より, x_{ij} に 1 を与えたときも, 含意アルゴリズムにより生成される行列も部分半順序行列である.

(証明終)

参考文献

1) 遠藤聡志, 大内　東：統合型発想支援システム：FISM, 人工知能学会誌, Vol.8, No.5, pp.612–618 (1993).
2) 川喜田二郎：発想法, 中公新書 (1967).
3) 大内　東, 加地郁夫：擬順序関係の含意を求める効率的アルゴリズム, 電気学会論文誌 (C), Vol.106, No.6, pp.16–22 (1986).
4) Ohuchi, A., Kurihara, M. and Kaji, I.: Implication Theory and Algorithm for Reachability Matrix Model, *IEEE Trans. SMC*, Vol.16, No.4, pp. 610–616 (1986).
5) Warfield, J.: *Societal Systems – Planning, Policy and Complexity*, John Wiley & Sons (1976).

(平成 7 年 3 月 29 日受付)
(平成 7 年 11 月 2 日採録)



加藤　衛（正会員）

1968 年生. 1993 年北海道大学工学部情報工学科卒業. 1995 年北海道大学大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了. 同年松下電器産業（株）入社. 現在, 松下通信工業（株）情報システム事業部勤務. システム工学に興味を持つ.

大内　東（正会員）

1945 年生. 1974 年北海道大学大学院工学研究科博士課程修了. 現在, 北海道大学工学部システム情報工学専攻教授. 工学博士. システム情報工学, 応用人工知能システム, 医療システムなどの研究に従事. 電子情報通信学会, 日本ファジィ学会, 計測自動制御学会, 人工知能学会, 電気学会, 日本 OR 学会, 医療情報学会, 病院管理学会, IEEE-SMC 各会員.