

1 次元セルオートマトンにおける同期現象の解析  
 Analysis of Synchronization in One-dimensional Cellular Automata

蛭川 繁

金沢工業大学 工学部 情報工学科

〒 921-8501 石川県石川郡野々市町扇が丘 7-1

e-mail: ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp

## 1 はじめに

ホタルの群れにおいて各個体が一斉に発光する現象が知られているが、このように多くの同一の要素からなるシステムにおいて、個々の要素の状態遷移のタイミングが一致する現象を同期 (synchronization) とよぶ [1].

蛭川ら [2] は、単純セルオートマトン (elementary cellular automaton, ECA) とよばれる 1 次元 2 状態 3 近傍セルオートマトンのルール 60 とよばれるルールにおいて、両端のセル同士が繋がった周期境界条件 (periodic boundary conditions) 下で、セル数が  $2^n, n \in \mathbb{N}^+$  のときに、初期様相によらず  $2^n$  ステップまでには全セルの状態がゼロになることを報告した。本論文ではこれをセルオートマトンにおける同期とよぶことにする。

ECA のルール 60 および 90 の時空間パターンを図 1 に示す。初期様相は、状態 0, 1 が等確率で出現するようにランダムに生成し、周期境界条件 (periodic boundary conditions) を用いている。この場合、初期様相を 0 ステップとすると、ルール 60 では 127 ステップ目で、ルール 90 では 64 ステップ目でそれぞれ全セルが 0 になっている。

土屋ら [3, 4] は、ルール 60 およびルール 90 の 2 つのルールについて詳細な計算機実験により同期現象を確認し、これを「sudden death (急死)」と名づけ、同期現象を応用してパリティチェックが行えることを指摘した。蛭川 [5] は Martin ら [6] によって提案されたセルオートマトンの様相を特性多項式で表現する方法を用いて、ルール 60 およびルール 90 における同期現象の数学的な証明を与え、さらに 1 次元 2 状態 5 近傍 CA の場合、および 1 次元 2 状態  $2r+1$  近傍 ( $r = 2^k, k \in \mathbb{N}$ ) における同期現象についても証明した。

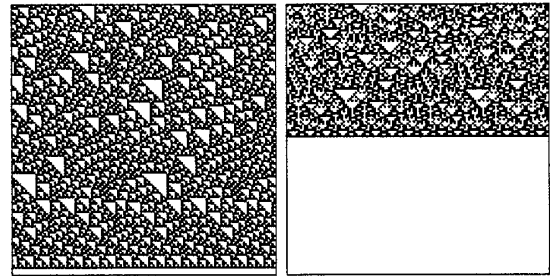


図 1: 単純セルオートマトンルール 60 (左) とルール 90 (右) の時空間パターン。セル数は 128。

## 2 同期への過渡状態の解析

本研究では、ECA において同期現象にいたる様相の変化を相互情報量を用いて解析を行う。セルの状態を  $X$ , 同じ時刻での右隣のセルの状態を  $Y$  とした場合の、世代ごとの相互情報量をルール 60 (図 2) とルール 90 (図 3) の場合について示す。

[5] で示されたように、ルール 60 において、セル数が  $2^n = 1024, (n = 10)$  の奇パリティの初期様相の場合  $t = 2^n - 1 = 1023$  で全セルが 1,  $t = 2^n$  で全セルが 0 となることから、 $t = 1023$  以降は相互情報量が 0 となっていることが図 2 (上) で確認できる。いっぽう、初期様相が偶パリティの場合、 $t = 1023$  で全セルが 0 となることから、 $t = 1023$  以降は相互情報量が 0 となっていることが図 2 (下) から確認できる。それ以外にも、 $t = 1000$  以降、相互情報量の値が大きくなる場合が見られる。これは同期が発生する以前に、部分的に様相が周期的になる現象がおきているためだと思われる。

またルール 90 において奇パリティの初期様相の場合、 $t = 2^{n-1} - 1 = 511$  で状態 0 と 1 が交互に並ぶことから相互情報量が 1 となり、偶パリティの初期様相

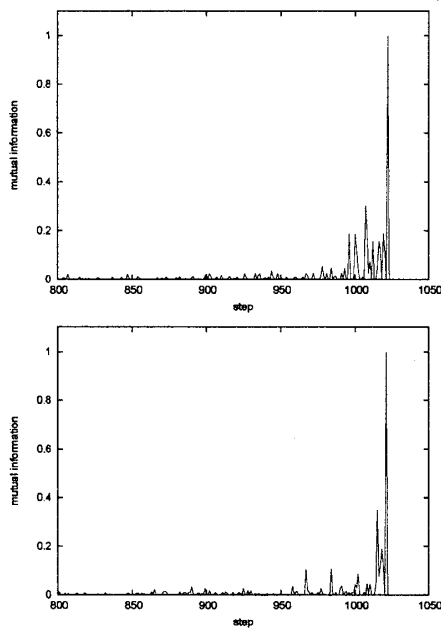


図 2: ルール 60 における同じ時刻での隣接したセルに関する相互情報量のステップごとの変化. 初期様相のパリティが奇の場合 (上) と偶の場合 (下). セル数は 1024.

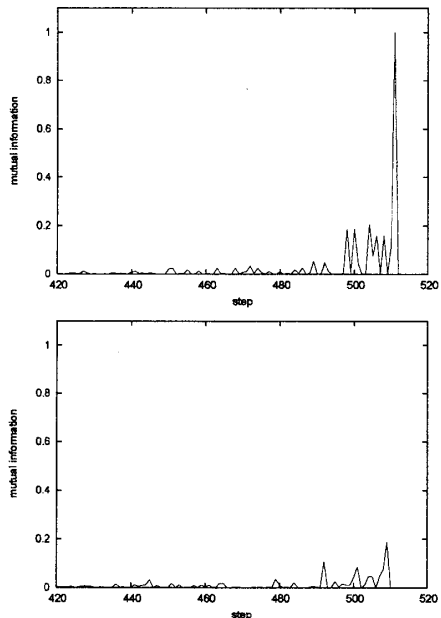


図 3: ルール 90 における同じ時刻での隣接したセルに関する相互情報量のステップごとの変化. 初期様相のパリティが奇の場合 (上) と偶の場合 (下). セル数は 1024.

の場合,  $t = 2^n - 1$  で全セルが 0 または 1 となることから相互情報量が 0 となることが図 3 から確認できる. さらにルール 60 と同様,  $t = 500$  以降, 相互情報量の値が大きくなる場合が見られる.

### 3 おわりに

本研究では同期にいたる ECA のルール 60 および 90 の直前の様相の様子を相互情報量を用いて調べた. その結果, 同期の発生に先立って相互情報量の値が大きくなる傾向が見られた. これは同期が突然, 発生するのではなく, 徐々に様相が組織化, 具体的には周期的な様相になっていくことがおきていることがわかった. 今後は様相の周期化を調べるために, 様相のスペクトル解析を行う予定である.

### 参考文献

- [1] スティーヴン・ストロガッツ: SYNC, 早川書房, 東京, 2005
- [2] 蜷川繁, 米田政明, 広瀬貞樹: 散逸境界条件下でのセルオートマトンについて, 情報処理学会論文誌, **38**, 927-930 (1997)
- [3] 土屋尚: 私信
- [4] Y. Komito, and T. Tsuchiya: Homogeneous One-dimensional cellular automata that calculate the parity of initial configurations, 明星大学研究紀要情報学部, 第 15 号, 1-9 (2007)
- [5] 蜷川繁: 1次元セルオートマトンにおける同期現象, 電子情報通信学会技術研究報告, **107**, 390, 17-21 (2007)
- [6] O. Martin, A. M. Odlyzko, and S. Wolfram: Algebraic properties of cellular automata, Communications in Mathematical Physics, **93** 219-258 (1984)