非一様並列機械型スケジューリング問題に対する近似アルゴリズムの実験的評価

山口 基† 浅野 孝夫‡

中央大学大学院 理工学研究科 情報工学専攻†
中央大学 理工学部 情報工学科‡

1 はじめに

非一様並列機械型スケジューリング問題に対して，2005 年に Grigoriev, Sviridenko and Uetz [1] で提案された線形計画法に基づくラウンディングとグリーディ法を組み合わせて得られた初の定数倍近似アルゴリズムについて，計算機実験を通じてその性能を評価する．さらに，アルゴリズムに改善を加えて実験を行う．

2 問題定義

複数の仕事を複数の機械で処理するとき，ある目的関数を最適化（たとえば，最大完了時刻を最小化）するために，各機械に仕事をどのように割り当てるかを決定する問題を機械スケジューリング問題と呼ぶ．本稿で取り上げる非一様並列機械型スケジューリング問題 (unrelated parallel machine scheduling problem) は，n 個の仕事の集合 $V = \{1, 2, ..., n\}$ と処理能力の異なる m 台の機械の集合 $M = \{1, 2, ..., m\}$ が与えられ，全ての仕事を機械に割り当てる問題である．仕事 j を機械 i で処理するときの処理時間を p_{ij} とし，機械 i に割り当てられる仕事の集合を J_i とする．さらに，機械 i の終了時刻を $C_i = \sum_{j\in J_i} p_{ij}$ とする．このとき，最後に処理が終わる機械の終了時刻，すなわち，$C_{\max} = \max_{i=1}^{m}\{C_i\}$ を最大完了時刻という．目的は，最大完了時刻 $C_{\max}$ を最小化することである．

さらに，作業員のような再生可能な資源を投入することにより，機械 i における仕事 j の処理時間 p_{ij} を短縮することができる．すなわち，s 人の再生可能な資源を機械 i における仕事 j の処理に割り当てれば，処理時間は p_{ijs} となるものとする．なお，再生可能な資源には限界があり，どの時刻でも機械全体として最大で k 人であるとする．したがって，機械 i に割り当てられた仕事 j の開始時刻と終了時刻をそれぞれ S_j と C_j としたとき，仕事 j に割り当てられている再生可能な資源が s 人とすると，S_j から C_j の時刻においては，他の機械の仕事全体で再生可能な資源は $k - s$ 人しか利用できない．また，多くの再生可能な資源を投入すれば，処理時間はより短縮できるので単調性が成立し，$p_{ij0} \geq p_{ij1} \geq \cdots \geq p_{ijk}$ であるものとする．

本稿では，以下の問題を取り上げる．n 個の仕事の集合 $V = \{1, 2, ..., n\}$，処理能力の異なる m 台の機械の集合 $M = \{1, 2, ..., m\}$，k 人の再生可能な資源，$\{p_{ijs} \mid i \in M, j \in V, s = 0, 1, ..., k\}$ が与えられる．このとき，各機械 i に割り当てる仕事の集合 J_i と各仕事 $j \in J_i$ に対する再生可能な資源の人数 s_{ij} を決定し，実際に仕事 $j \in J_i$ の開始時刻 S_j（と終了時刻 $C_j = S_j + p_{ijs_{ij}}$）を求める．ただし，どの時刻でも，実際に割り当てられている再生可能な資源の人数は高々 k 人であるという制約を満たすものとする．このような制約のもとで最大完了時刻を最小化したい．

この問題は，以下のように整数計画問題として定式化できる．なお，s 人の作業員が機械 i に割り当てられた仕事 j に割り当てられるとき，x_{ijs} は 1 となり，そうでないときには 0 である．C は最大完了時刻である．

$$
\begin{aligned}
& \min C \\
s.t.\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} x_{ijs} = 1 && \forall j \in V \\
& \sum_{j\in V}\sum_{s=0}^{k} x_{ijs}p_{ijs} \leq C && \forall i \in M \\
& \sum_{j\in V}\sum_{i\in M}\sum_{s=0}^{k} x_{ijs}sp_{ijs} \leq kC \\
& x_{ijs} = 0 && \text{if } p_{ijs} > C \\
& x_{ijs} \in \{0, 1\} && \forall i \in M,\ \forall j \in V,\ s = 0, 1, ..., k
\end{aligned}
$$

3 LP-GREEDY 法 [1]

Grigoriev, Sviridenko and Uetz [1] で提案された LP-GREEDY 法は，上記の整数計画問題を線形計画問題として緩和して解き，その解を利用して 2-フェーズのラウンディングを行い，最後に Graham のスケジューリングアルゴリズムを用いて，全ての仕事をスケジューリングする．以下に LP-GREEDY 法の詳細を示す．

3.1 線形計画緩和

上記の整数計画問題を線形計画問題に緩和する．0-1 の整数変数であった x を

$$x_{ijs} \geq 0 \quad i \in M,\ j \in V,\ s = 0, 1, ..., k$$

に緩和し，この線形計画問題 (以下 LP) を解く．

最初 C は $\sum_{j\in V} \max_{i\in M}\{p_{ijk}\}$ と設定する．この値の C に対しては自明な実行可能解が存在する．したがって，実行可能な C から二分探索をすることにより，C の最小整数値 C^* を多項式時間で求められる．C^* に対する線形計画緩和の最適解の x を x^{LP} とする．

Experimental Estimation of Approximation Algorithms for Unrelated Parallel Machines Scheduling Problem

†Motoshi YAMAGUCHI, Information and System Engineering Course, Graduate School of Science and Engineering, Chuo University

‡Takao ASANO, Department of Information and System Engineering, Faculty of Science and Engineering, Chuo University

3.2 2-フェーズのラウンディング

線形緩和した LP 解 (C^*, x^{LP}) から 2-フェーズのラウンディングを行い，x^{LP} から x^* を求める．

3.2.1 第 1 フェーズのラウンディング

$$\tilde{y}_{ij} = \sum_{s \in S_{ij}} x_{ijs}^{\mathrm{LP}}$$

とする．そして，$0 \le \epsilon \le 1$ である任意の ϵ を決め，

$$\sum_{s=0}^{t_{ij}} x_{ijs}^{\mathrm{LP}} = (1-\epsilon)\tilde{y}_{ij}$$

の特性を持つ $t_{ij} = \{0, \ldots, k\}$ が最小になるように求める．その後，それぞれの仕事と機械に対して，

$$s_{ij} = arg\ \min_{s \ge t_{ij}} sp_{ijs}$$

とする．したがって，$\bar{x}$ は

$$\bar{x}_{ijs} = \begin{cases} \tilde{y}_{ij} & (s = s_{ij}) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

となる．整数となるようにするために，次に Shmoys and Tardos によるラウンディング手続きを行う．

3.2.2 第 2 フェーズのラウンディング

第 2 フェーズのラウンディングは，Shmoys and Tardos[2] のラウンディングに基づいたものである．これによって，x^{LP} から整数解 x^* を得る．

1. 仕事の集合を一方のノード集合，他方のノード集合には機械の集合，$x_{ijs} > 0$ となる辺 (i,j) には $s_{ij}p_{ijs}$ をコストとする二部グラフを作成する．
2. 全ての仕事 $j \in V$ がマッチされるような最小費用マッチングを求める．

3.3 Graham のスケジューリングアルゴリズム

第 1 フェーズのラウンディングでは，全ての仕事に対して割り当てる再生可能な資源の人数が決まり、第 2 フェーズのラウンディングでは，仕事を処理する機械が決まった．2-フェーズのラウンディングが終了したら，Graham のスケジューリングアルゴリズムによって，ランダムに仕事をスケジューリングする．

時刻 0 からスケジューリングを開始し，再生可能な資源（以下，作業員という）の人数制約と仕事がどの機械に割り振られるかに従いながら，各仕事が終了するたびに，新しく仕事をスケジューリングする．これを全ての仕事がスケジューリングされるまで繰り返す．

4 提案手法

スケジューリングをする際，作業員の人数制約と仕事がどの機械で処理されるかが重要視されてくる．ランダムに仕事をスケジューリングをしていくことにより，スケジューリングの終盤で作業員の人数制約が満たされなくなって，処理中でない機械が出てしまう場合がある．これは，作業員が割り当てられている仕事が，スケジューリングの終盤まで残されてしまい，作業員の人数制約が満たされなくなってしまうからである．したがって，仕事に割り当てられている作業員の人数が多い順からスケジューリングしていく．このことにより，機械の空白の時間を出来るだけなくし，最大完了時刻 C を改善する．

5 実験的性能評価

LP-GREEDY 法と改善を加えたものを，近似率の観点から比較した．実験の入力には，仕事数，機械数，作業員の人数，処理時間，ϵ をそれぞれ与えている．また，それぞれの入力に対し，実験を行い，比較を行う．なお，最適解としては整数計画問題を線形計画ソフト NUOPT で解くことにより得られる整数解を用いた．

5.1 実験結果

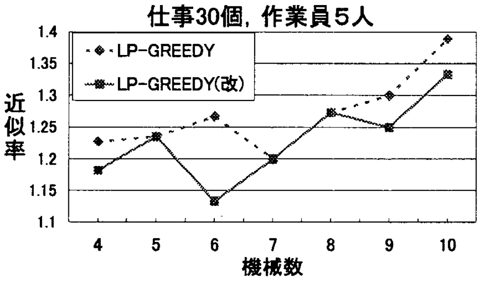

図 1 近似率に対する比較

図 1 が近似率について比較したグラフである．差は余りないが，機械数が大きくなるにつれて，改善した手法がより良い近似率を求めていることがわかる．

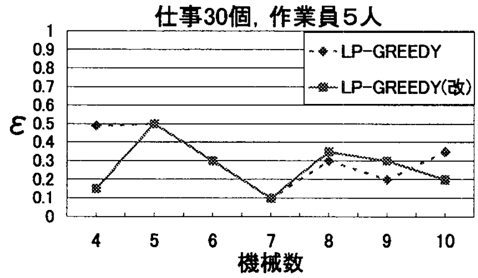

図 2 ϵ に対する比較

図 2 が機械数によって，ϵ の値がどのときに近似解が導かれたかを比較したグラフである．こちらも余り差がなく，ϵ が 0.5 以下のとき平均的に多く近似解を求めていることがわかる．

6 結論

Grigoriev, Sviridenko and Uetz によって提案された LP-GREEDY 法に対する改善では，最大完了時刻を短縮することができた．特に，ϵ が小さいときほど効果的である．以上のことから，LP-GREEDY 法に対する改善は有用であるといえる．

今後の課題としては，大規模なデータでの実装と実験，及びそれを実現するための高速化が挙げられる．

参考文献

[1] A. Grigoriev, M. Sviridenko, M. Uetz: Unrelated Parallel Machine Scheduling with Resource Dependent Processing Times. *Proc. Integer-Programming and Combinatorial Optimization*, 2005, pp. 182–195.

[2] D. Shmoys, E. Tardos: An Approximation Algorithm for the Generalized Assignment Problem. *Mathematical Programming 62*, January 1993, pp. 461–474.