平面直線グラフに対する交差なしモーフィング

横須賀 佑介[†] 櫻井 満將[†]
三菱電機 株式会社 情報技術総合研究所[†]

1. はじめに

モーフィングは, ある形状から他の形状へ変換するプロセスであり, コンピュータ・グラフィックスや地理情報システムなどにおいて利用される.

モーフィングに求められる性質の 1 つとして, 変換の間に形状が交差しないことが挙げられる (図 1). 従来, ポリゴン [4] や平面グラフ [3] など, 連結な形状に対して上記性質を満たすアルゴリズムが提案されてきた. しかし, これらは非連結な形状を対象とはしていなかった.

そこで本稿では, 非連結な平面直線グラフに対する交差なしモーフィングアルゴリズムを提案する. 提案アルゴリズムは [4] を基にし, compatible triangulation を求める部分には [2] を利用する. これにより, 平面直線グラフに対するモーフィングを求めることができる. さらに, [2] に対して平面直線グラフを与えた場合の計算量を解析する.

2. ポリゴンに対するモーフィング

提案アルゴリズムで基にする, ポリゴンに対するモーフィングアルゴリズム [4] について説明する. [4] のアルゴリズムは, 各頂点 v_i を重心座標系

$$v_i = \sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} \times v_j,\ \sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} = 1$$

で表現する. ここで, $N(i)$ は頂点 v_i に隣接する頂点の集合, λ_{ij} は v_j における v_i の重心座標である. 重心座標系での線形補間により, 交差なしのモーフィングを求めることができる.

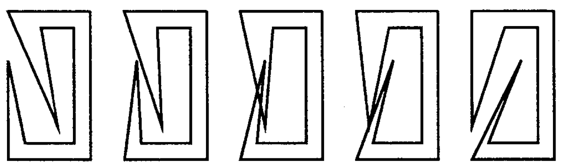

図 1: 交差の例.

頂点を重心座標系で表現するため, [4] ではポリゴンに対する compatible triangulation (図 2) を求める. ここで, compatible triangulation とは, 接続関係の等しい 2 つの三角形分割である. 定義を以下に示す.

定義 1 ([1]) P と Q を平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点集合とし, P の任意の点 p から Q の点 $q = f(p)$ への 1 対 1 写像 f が存在するとする. P と Q の三角形分割 T_P と T_Q は, T_P の全ての三角形 $t_P = (p_1, p_2, p_3)$ が T_Q の三角形 $t_Q = (f(p_1), f(p_2), f(p_3))$ として存在し, T_Q にはその他の三角形が存在しない場合に, compatible triangulation と呼ばれる.

一般に, ポリゴンやグラフの compatible triangulation を求める場合, もともと存在する頂点の他に, 追加の頂点 (Steiner 点) を必要とする.

3. 平面直線グラフに対するモーフィング

[4] のアルゴリズムを改良し, 非連結な平面直線グラフに対するモーフィングアルゴリズムを提案する. [4] では同型なポリゴンを入力として扱っていたが, 提案アルゴリズムでは, 以下に定義する位相的同型な平面直線グラフを入力として扱う.

定義 2 2 つの平面直線グラフ G_p と G_q は, 次の 3 つの条件を満たすとき位相的同型である. (1) 頂点集合 $\{v_1^p, \ldots, v_n^p\} \subseteq G_p$, $\{v_1^q, \ldots, v_n^q\} \subseteq G_q$ を持ち, 任意の $i \in 1, \ldots, n$ に対して, v_i^p から v_i^q への 1 対 1 写像が存在する. (2) 辺集合 $\{e_1^p, \ldots, e_m^p\} \subseteq G_p$, $\{e_1^q, \ldots, e_m^q\} \subseteq G_q$ を持ち, 任意の $i \in 1, \ldots, m$ に対して, e_i^p から e_i^q への 1 対 1 写像が存在する. (3) 面集合 $\{f_1^p, \ldots, f_h^p\} \subseteq G_p$,

図 2: compatible triangulation の例. ここでは, 同じ添え字を持つ点が, それぞれ対応する点である.

Intersection-Free Morphing for Planar Straight Line Graphs

†{Yusuke YOKOSUKA, Mitsumasa SAKURAI} · Mitsubishi Electric Corporation, Information Technology R & D Center

$\{f_1^q, \dots, f_h^q\} \subseteq G_q$ を持ち, 任意の $i \in 1, \dots, h$ に対して, f_i^p から f_i^q への 1 対 1 写像が存在する.

[4] のアルゴリズムは, 連結なポリゴンに対して compatible triangulation を求めるアルゴリズムを利用している. そのため, 非連結な平面直線グラフには適用できない. よって, 提案アルゴリズムではその部分に, [2] のアルゴリズムを利用する.

[2] は, 穴の開いたポリゴンに対して compatible triangulation を求める. 平面直線グラフに [2] のアルゴリズムを適用するために, 提案アルゴリズムでは平面直線グラフをバウンディングボックスで囲む. これにより, 平面直線グラフをポリゴンとみなせる. また, 点や辺だけで表現されたグラフ内の各連結要素は, 各穴が退化したものと判断できる. この操作により, [2] のアルゴリズムを平面直線グラフに適用することができる.

最後に, 2 つの位相的同型な平面直線グラフ G_s, G_d に対するモーフィングアルゴリズムを示す.

Step 1. G_s, G_d をそれぞれバウンディングボックスで囲む. このとき, バウンディングボックスの辺や頂点は G_s, G_d と共通部分を持たない.

Step 2. [2] のアルゴリズムを用いて, G_s, G_d に対する compatible triangulation T_s, T_d を求める.

Step 3. T_s, T_d に対し, [4] のアルゴリズムを利用して, 中間のグラフ G_t を求める. まず T_s, T_d の全ての頂点を, 重心座標系により, $N \times N$ 行列 M_s, M_d で表現する (N は T_s, T_d の頂点数). 次に, M_s と M_d の線形補間により, 中間状態の行列 $M_t = (1-t)M_s + tM_d$ ($t \in [0,1]$) を求める. 最後に, M_t から中間のグラフ G_t を求める.

求められる中間の行列 M_t は, 重心座標系で表現されたものなので, 得られたグラフ G_t は全て平面描画することができ, かつ交差がない.

4. 計算量の解析

平面直線グラフに対する [2] のアルゴリズムの計算量が, $O(n^2)$ になることを示す. この計算量は, 穴の開いたポリゴンの場合と同様である.

定理 1 G_p と G_q を位相的同型な平面直線グラフとする. このとき G_p と G_q の compatible triangulation は, $O(n^2)$ 個の三角形を利用して, $O(n^2)$ 時間で求めることができる.

証明 [2] では, 与えられた平面直線グラフをまず k 個のポリゴンに分割する. ここで k は非連結成分の数である. [2] では, ポリゴンを内部の穴に沿って k 個のポリゴンに分割するので, 各ポリゴンの頂点の数は $O(n)$ であった. しかし, 非連結な平面直線グラフには, k 個存在する各ポリゴンに $O(m)$ 個の頂点を必要とする. これは, ポリゴンならば各頂点に最大 2 本の辺しか接続しないが, 平面直線グラフでは 1 つの頂点に複数の辺が接続するためである. この場合にも, オイラーの公式を利用することで, 各ポリゴンに必要な頂点の数が $O(n)$ となることが示せる. オイラーの公式 $(n - m + h = k + 1)$ より, 平面直線グラフに存在する辺の数は $m \leq 3n - 3(k+1)$ となる. $k \leq O(n)$ なので, $m \leq O(n)$ である.

残りは [2] と同様の結果が成り立つため, compatible triangulation に必要な三角形の数は $O(n^2)$ となり, かつ実行時間も $O(n^2)$ となる. □

さらに, 平面直線グラフに対する compatible triangulation には, 最悪の場合 Steiner 点を $\Omega(n^2)$ 個必要とすることが, [1] より得られる. 上記アルゴリズムは, $O(n^2)$ 個の Steiner 点を必要とするので, 平面直線グラフの compatible triangulation に必要な Steiner 点の数は, 最悪 $\Theta(n^2)$ となる.

5. おわりに

本稿では, 平面直線グラフに対する交差なしモーフィングアルゴリズムを提案した. さらに, 平面直線グラフの compatible triangulation は $O(n^2)$ 時間で求められることを示した.

参考文献

[1] B. Aronov, R. Seidel and D. Souvaine. On Compatible Triangulations of Simple Polygons. *Computational Geometory: Theory and Applications*, 3 (1): 27–35, 1993.

[2] M. Babikov, D. L. Souvaine and R. Wenger. Constructing Piecewise Linear Homeomorphisms of Polygons with Holes. In *Proceedings of 9th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG'97)*, pages 6–10, 1997.

[3] C. Erten, S. G. Kobourov and C. Pitta. Morphing Planar Graphs. In *Proceedings of 20th Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG'04)*, pages 451–452, 2004.

[4] C. Gotsman and V. Surazhsky. Guaranteed Intersection-Free Polygon Morphing. *Computers & Graphics*, 25 (1): 67–75, 2001.