3ZC－1

単位4元数積分曲面における曲率の解析*

北野 宏哉，神野 元紀，三浦 憲二郎，金子 透
静岡大学工学部機械工学科計測情報講座

1 序論

“美しい”曲面の生成は，工業デザインの分野で重要であり，製品の善し悪しを決定する要因の一つとなっている．ただし，美しい曲面とはどのようなものなのかという具体的な尺度は存在しない．

しかし，美しさを決定する要因の一つとして曲率や曲率の変化率が重要であることは共通の認識である．そのため，美しい曲面を生成する上で曲面の曲率を解析することは重要となる．

より美しさを追求した新しいタイプの自由曲面：単位4元数積分曲面 (unit quaternion integral : QI surface) は，これまでの自由曲面とは異なり，曲面の制御接線を用いてその形状を表現する．制御接線を操作することにより，曲率やその変化率をより直接的に変更できる．本研究では，QI曲面の曲率を解析的に算出する．

2 微分幾何学

曲面は次のパラメトリックフォームで与えられる

$$S(u) = S(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

ただし

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in (a,b) \subset R^2.$$

第一基本量 (first fundamental quantity) は，

$$\begin{aligned} E &= E(u,v) = \frac{\partial S(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial S(u,v)}{\partial u}, \\ F &= F(u,v) = \frac{\partial S(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial S(u,v)}{\partial v}, \\ G &= G(u,v) = \frac{\partial S(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial S(u,v)}{\partial v}, \end{aligned} \tag{2}$$

と表され，同様に第二基本量 (second fundamental quantity) は，

$$\begin{aligned} L &= L(u,v) = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 S(u,v)}{\partial u^2}, \\ M &= M(u,v) = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 S(u,v)}{\partial u \partial v}, \\ N &= N(u,v) = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 S(u,v)}{\partial v^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

と表すことができる．

ここで $\boldsymbol{n}$ は，単位法線より，次式で定義される．

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial S(u,v)}{\partial u}\times\dfrac{\partial S(u,v)}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial S(u,v)}{\partial u}\times\dfrac{\partial S(u,v)}{\partial v}\right|}. \tag{4}$$

これより，曲率の最大値 κ_1 及び 最小値 κ_2 は，以下のような関係がある．

$$\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{5}$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{NE - 2MF + LG}{EG - F^2}. \tag{6}$$

ここで，$K = \kappa_1\kappa_2$ をガウス曲率 (Gaussian curvature)，$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ を平均曲率 (mean curvature) と呼ぶ．

3 システム概要

曲面を厳密に解析し，ガウス曲率及び平均曲率が表示できるシステムを作成した．ガウス曲率，平均曲率は図1の一次関数的カラーインデックス (linear color index : LCI) と図2の二次関数的カラーインデックス (quadratic color index : QCI) を用いて表示させた．LCIは，図1の下部のグラフのように，赤，緑，青を一次関数的に混ぜ合わせたものである．QCIは，同様に，図2の下部のグラフのように二次関数的に色を混ぜ合わせたものである．なお，各図の下部のグラフの縦軸は，各色の混ぜ合わせの割合を示し，横軸は，曲率の大きさを示す．

また，曲率の最大値と最小値から以下に述べる相対値表示，絶対値表示という2つの方法で表示させた．これにより色の違いで曲率の変化を判定することができる．

*Curvature analysis of unit quaternion integral surface, Hiroya Kitano, Motoki Kohno, Kenjiro T. Miura, Toru Kaneko, Shizuoka University, 3-5-1 Johoku, Hamamatsu 432, Japan

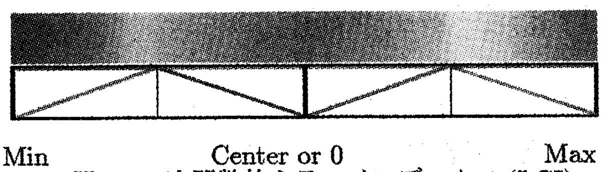


図 1: 一次関数的カラーインデックス (LCI)

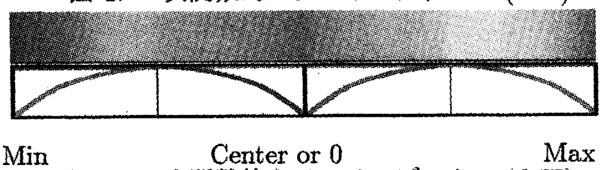


図 2: 二次関数的カラーインデックス (QCI)

3.1 相対値表示

相対値表示とは，最大値と最小値の間を均等に分割して各曲率にあわせた色を表示させる方法である．具体的には，最大値には赤 (RGB{1.0, 0.0, 0.0})，最小値には青 (RGB{0.0, 0.0, 1.0})，その中心値には緑 (RBG{0.0, 1.0, 0.0}) を与え，それぞれの間の値は，その大きさに合わせ，最大値に近づくほど赤く，最小値に近づくほど青く，中心値に近づくほど緑になるように色を与える．

これにより，全体的な曲率の変化率が見て取れるような表示ができる．

3.2 絶対値表示

絶対値表示とは，曲率が 0 の所に緑 (RGB{0.0, 1.0, 0.0}) を与え，曲率が正の領域は 0 と最大値で，負の領域は 0 と最小値で均等に分割して各曲率にあわせた色を表示させる方法である．

これにより，曲率の正負が色により判定でき，そこの曲率が正か負か，つまり，その曲面が凸面，凹面，あるいは平面なのか等が判定できるようになる．

3.3 B-spline 近似

CG において，一般的に用いられる曲面は B-spline 曲面である．このシステムでは，文献 [2] の方法で，QI 曲面を B-spline 曲面に近似してその曲率を求められるようにした (図 3(b) の白点は制御点)．近似に用いた B-spline 曲面は，双 3 次であり $6 \times 6 = 36$ 点の制御点を持つ．

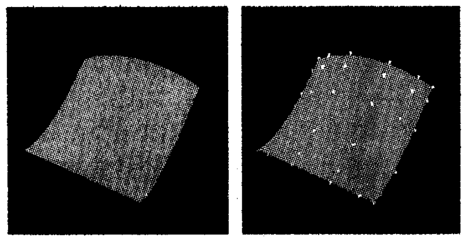
曲率の表示方法は，QI 曲面の曲率の表示と同じにし，両者の間の曲率を比較した．

4 結論

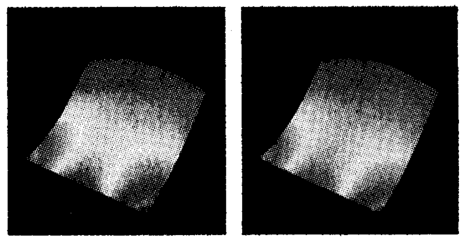
本研究では，QI 曲面の曲率を解析的に算出した．曲率を色を用いて表示させることにより，曲率の分布が把握できるようになった．

また，QI 曲面での曲率とそれを B-spline 近似した曲面の曲率分布は，ほとんど等しい (図 4, 5)．このことから，文献 [2] の方法で QI 曲面を B-spline 曲面に近似した時，位置だけでなく，曲率特性も十分に近似されていることが確認された．

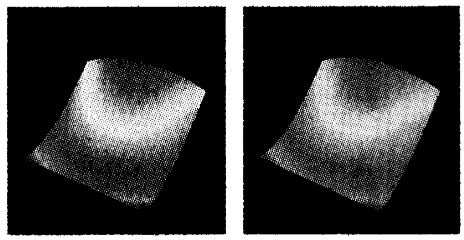
今後の課題として，QI 曲面の積分長を変えた場合の曲率を解析する．



(a)QI 曲面　(b)B-spline 近似
図 3: 生成した曲面



(a)QI 曲面　(b)B-spline 近似
図 4: ガウス曲率 (相対値表示・LCI)



(a)QI 曲面　(b)B-spline 近似
図 5: 平均曲率 (相対値表示・LCI)

参考文献

[1] 三浦　憲二郎，単位 4 元数積分曲線，情報処理学会論文誌，1997.

[2] Naoki Sakiyama, Kenjiro T.Miura, Takanori Takahashi, Toru Kaneko, Takahiro Kubo,"Fair Curve and Surface Design System Using Tangent Control" *Pacific Graphics '98*, pp.27-36, 1998.