ホモトピー法への一次分数変換の適用法について*

1M－1

鈴木秀男† 職業能力開発総合大学校東京校 情報技術科
小林英恒‡ 日本大学理工学部 数学科
三島健稔§ 埼玉大学工学部 情報システム工学科

1. はじめに

連立代数方程式が近接した根を持つ場合に，それら近接した根を分離し精度よく計算するため，筆者らは，座標空間に一次分数変換を適用し，変換された方程式系をホモトピー法により解き，得られた数値解に逆の一次分数変換を適用してもとの座標空間へ戻す方法を提案している[1)~3)]．

近接した根を持つ問題へホモトピー法を適用した場合，近接した根付近でパスを正確にトレースできないことがある．このような問題を解決するには，パラメータを正確に終値へ近づけることが必要になる．そこで，ホモトピー法のパラメータに一次分数変換を適用すればパラメータをより終値に近づけることができ，結果としてパスを正確にトレースでき，近接した根が分離され精度よく計算できることを示す．

2. ホモトピー法

解くべき方程式を

$$F(x)=0 \tag{1}$$

と表す．ただし，$F:R^N\to R^N$は連続写像とする．このときホモトピー$H:R^N\times R\to R^N$を

$$H(x,t)=tF(x)+(1-t)P(x)+t(1-t)Q(x) \tag{2}$$

のように決めれば

$$H(x,1)=F(x), H(x,0)=P(x) \tag{3}$$

を満たす．ここで$P:R^N\to R^N$は連続写像で，既知な根を持つとする．また，$Q:R^N\to R^N$は連続写像であり，$Q\equiv 0$ならばtに関して1次の，$Q\not\equiv 0$ならばtに関して2次のホモトピーとなる．

ある仮定のもとで$H(x_0,0)=P(x_0)=0$を満たすx_0を用い，$(x_0,0)$として式（2）により得られるパス$\varphi(\theta)$を追跡すれば，$t=1$に対応する$\theta_1\in J$における$\varphi(\theta_1)=(x_1,1)$が$H(x_1,1)=F(x_1)$となる[4)]．

3. 近接根を持つ場合のホモトピーパスの問題点

実係数$a_j\in R$の1変数多項式$f(z)$の場合を実例として取り上げる．ある$\alpha\in C$と十分小さなϵに対して$B(\epsilon,\alpha)=\{z|z\in C,||z-\alpha||<\epsilon\}$とし，$\lambda_j\in B(\epsilon,\alpha)$ $(j=1,\cdots,r)$を満たす根を近接根と呼ぶ．以下では，$\alpha=0$の場合を考え，$z=x+iy$としてCとR^2を同一視する．すると

$$f=f_1+if_2\ ,\ p=p_1+ip_2\ ,\ h=h_1+ih_2 \tag{4}$$

を得る．以下，近接根以外の根$\nu_j\in C(j=1,\cdots,s)$は，近接根から十分離れているとする．

[命題 1] 近接根λ_jに対し，次が成り立つ．
1. 単位接線ベクトルのt成分は$O(\epsilon^{r-1})$となる．
2. 単位主法線ベクトルのt成分は$O(\epsilon^{r-1})$となる．■

ϵは十分小さく，$r>1$であるから，$t=1$付近での空間曲線の様子は，それをxy平面に射影したもので議論してよい．空間曲線が$t=1$でxy平面に平行になると言うことは，$\dot{t}(\theta_1)$がϵ^{r-1}の影響で小さな値となることを意味しており，これはtが1に近づくにつれて$t\to 1$への収束が遅くなることを表している．

一方，文献5)より

$$w_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial t}\\ \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial t}\end{vmatrix}, w_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial t}\\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial t}\end{vmatrix} \tag{5}$$

とおけば，$h_1=0,h_2=0,w_1=0$を満たす点で実部が，$h_1=0,h_2=0,w_2=0$を満たす点で虚部が符号を変える．

[命題 2] 占部の定理の条件[6)]が満たされているとき，近接根を中心に展開して高次の項を省略すると，符号を変える点は近接根からx,y成分については$O(\epsilon)$，t成分については$O(\epsilon^r)$となる．■

ϵが十分小さく，$r>1$であるから数値計算によってこのような点までパスを追跡することができなくなる．さらに，最終的にニュートン法によって近似解を高精度化するとすれば，根が紛れる可能性が高くなる．

4. ホモトピー法への一次分数変換の適用

近接根領域を表す$\gamma_j=k_j\epsilon_j$が与えられたとき，次のような一次分数変換を考える．一次分数変換の詳細については，文献1)～3)を参照されたい．

$$x_i=\gamma_j u_i/(1-u_j)\ ,\ u_i=x_i/(\gamma_j+x_j) \tag{6}$$

このような一次分数変換を適用し，新たな連立代数方程式$G(u)=0$を得る．この方程式を解くために

$$H(u,t)=tG(u)+(1-t)P(u) \tag{7}$$

のようなホモトピーを採用する．一次分数変換をしたことにより，近接根は大きさとして$|1/k_j|$程度まで拡

---

*Homotopy method with a linear fractional transformation

†Hideo Suzuki, Institute of Tokyo, Polytechnic University, 2-32-1 Ogawa-nishi Kodaira Tokyo 187-0035 Japan
‡Hidetsune Kobayashi, Nihon University, 1-8-14 Kanda-surugadai Chiyoda Tokyo 101-0062 Japan
§Taketoshi Mishima, Saitama University, 255 Shimo-Okubo Urawa Saitama 338-8570 Japan

大されるが，前節に示したような問題点が近接根の場合には生じる可能性がある．そこで，t に関しての一次分数変換を考える．t は，$t \in [0,1]$ で定義されているため$\varphi(0)=0, \varphi(1)=1$ を満たし，$\varphi(\infty)=-\delta$となる一次分数変換を採用する．具体的には

$$t=\frac{(1+\delta)s}{s+\delta}\ ,\ s=\frac{\delta t}{1-t+\delta} \qquad (8)$$

ここで，δは十分小さな正の数とする．

このような一次分数変換により，先ほどの連立代数方程式を変換する．その結果

$$\tilde{H}(u,s,\delta)=(1+\delta)sG(u)+\delta(1-s)P(u) \qquad (9)$$

となり，$\tilde{H}(u,0,\delta)=0 \Leftrightarrow P(u)=0$, $\tilde{H}(u,1,\delta)=0 \Leftrightarrow G(u)=0$ が成り立つ．一般的に $u=(u_1,\cdots,u_n)\in C^n$に対して

$$\tilde{H}\in C[u_1,\cdots,u_n,\delta,s]\ ,\ \delta\in R\ ,\ s\in[0,1] \qquad (10)$$

より$\tilde{H}=0$ は $C^n\times R\times[0,1]\subset C^{n+2}$内の曲線群を表す．これは形式的には，パラメータ t を s に置き換えたホモトピーの s の部分に $(1+\delta)$ を，$1-s$ の部分にδを掛けた形となる．

次に，一次分数変換による効果を確認するため，二つのホモトピー $H,\tilde{H}$との関係について考察する．

[命題 3] 元の空間で $H=0$ を満たす曲線を追跡して $t=1-\Delta s\,(\Delta s>0$ は十分小) のときの u の近似解の一つをαとし真の値をα_{true}とするとき誤差は

$$\Delta\alpha=|\alpha-\alpha_{true}| \qquad (11)$$

となる．このとき，変換された空間で$\tilde{H}=0$ を $s=1-\Delta s$ まで追跡したときαに対応する近似解の誤差を

$$\Delta\tilde{\alpha}=|\tilde{\alpha}-\alpha_{true}| \qquad (12)$$

とすれば，

$$\Delta\tilde{\alpha}\sim\delta\Delta\alpha \qquad (13)$$

という関係式が成り立つ． ▨

この命題より $H(\alpha,1-\Delta s)=0, \tilde{H}(\tilde{\alpha},1-\Delta s,\delta)=0$ のように同じ精度で t,s が求められているならば，一次分数変換を適用した方が u の誤差はδ倍小さくなる．

次に，t,s の 1 付近での様子を確認しておく．t,s に関して次の等式が成り立つ．

$$\Delta t=1-t=\frac{\delta}{1+\delta-\Delta s}\Delta s \qquad (14)$$

この等式より命題の系として次が成り立つ．

[系 1]

1. $t\sim1, s\sim1$ において$\Delta t\sim\delta\Delta s$ が成り立つ
2. $\tilde{H}(\tilde{\alpha},1-\Delta s,\delta)=0$ ならば $H(\tilde{\alpha},1-\delta\Delta s)=0$ ▨

この系は，変換された空間で s の値が 1 に十分近く，すなわちΔs が十分小さければ，そのときの u の値は元の空間では，$\delta\Delta s$ だけより 1 へ近づいたときの値を意味している．したがって，元の空間で言えば，計算桁数以上の精度で t を 1 へ近づけることが可能であることを表している．これにより，$t\sim1$ の近くでの振る舞いがより正確に把握でき，近接根の場合に数値的な安定性 (精度) を向上させることが出来る．

[系 2] 近接根以外の根は，一次分数変換を適用することにより，急速に 1 へ近づく ▨

これにより，早い時期での近接根と近接根以外の根との分離が可能となり，計算時間の短縮がはかれる．

以上の命題及び系より $\tilde{H}(u,s,\delta)$ の形式は有用であることが分かる．

6. 数値例

$f(x)=x^6-100.00007x^5+0.0070000021x^4-0.000000210000033x^3+3.30000028\times10^{-12}x^2-2.8000001\times10^{-17}x+1.0\times10^{-22}=0$ は近接根を 5 つ持つ．ホモトピー法で直接解くと近接根のため，十分な精度でパスが追跡できない．そこで，$\epsilon=10^{-4}$として座標空間に一次分数変換を適用した後，$\delta=10^{-5}$としてパラメータ t に一次分数変換を適用して解くと，精度良くパスを追跡することができる．表 1 に近接根の一つへ収束するパスの近似値の誤差を示す．これは，実質的に変換されたときの近似値は，元の問題に対しては $|1-t|\sim\delta10^{-14}=10^{-19}$までパスを追跡したことになるため精度が良くなっている．

表 1 一次分数変換による効果 (収束判定 10^{-14})

適用なし	座標	座標+パラメータ
0.422385e-3	0.602097e-10	0.518938e-15

7. おわりに

一次分数変換を適用するには，座標空間のみ，パラメータのみ，その両者の 3 通りがある．それぞれ特徴があり，状況によって使い分ければよい．さらに，2 次のホモトピーに関しても同様な結果が得られる．

参考文献

1) H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : Separation of close roots by linear fraction transformation, Proc. of ASIAN symposium on computer mathematics, pp.1-10 (1995)

2) 鈴木, 小林 : 一次分数変換を利用した近接根の分離方法とその誤差について, 情報処理学会論文誌 vol.38, no.2, pp.180-191 (1997,Feb.)

3) 鈴木, 小林 : 連立代数方程式の近接根の分離と擬局所化の可能性について, 京大数理研講究録 vol.986, pp.136-146 (1997)

4) Eugene L. Allgower, Kurt Gerg: Numerical Continuation Methods, Springer-Verlag (1990).

5) 小島政和: 相補性と不動点, 産業図書 (1981).

6) 篠原能材: 数値解析の基礎, 日新出版 (1987).