5U－2

複素力学系から生成される図形の性質

青山智夫(宮崎大学工学部)

1.はじめに

種々の表現形の複素力学系が知られている。中でも漸化式で表現される複素力学系から生成される複素数列を複素平面にプロットした「図形」は、特異な形の美しさで興味深い。しかしそれらは形状への興味、その制御という観点が主に研究対象となっており、図形の性質そのものの研究はあまりされていないのが現状であるように思われる。

現在の計算機の処理速度から複素数列の要素数の上限は10^6～10^{10}となろう。大きな数であるが、統計的処理の対象になる程十分大きな数ではない。この範囲の要素数を持つ数の集合の性質を調べるにはコンピュータによる数値的な扱いが適している。

数列を複素平面にプロットした場合、要素の順序に意味が無くなり複素平面上の点の相対的位置関係が有意となる。位置関係が何らかの関連を示すと「図形」を生成したように人の目は錯覚する。[1]それは数列の集合としての一つの性質である。「図形」は図形のように見えるが、そこには連続な線,対称という概念が無く、従来の意味での図形とは異なる。

2.漸化式の決定

種々の漸化式の中で図形生成という点から見れば二次の漸化式：

$$Z_{n+1}=Z_n{}^2-Z_{n-1}+A \qquad (1)$$

Properties of Images genarated by using Complex Dynamics
Tomoo Aoyama(Miyazaki University)
aoyama@esl.miyazaki-u.ac.jp

が興味深い。一般に漸化式を使って描く図形は乱雑になるか、無限大に発散して行き、形状としてはあまり面白いものではない。また従来の作図法による図形とあまりにもかけ離れていて、図形そのものの性質を調べる興味を抱かせない。そこで単純な漸化式であり、かつ閉曲線のような図形を生成する漸化式(1)を研究の対象とした。この漸化式のパラメータ{A, Z_0, Z_1}が共に原点(0,0)の近傍にある時の性質は調べられている。[2]ただし、原点近傍では描画速度の点で(iteration回数で言えば10^7以上となり)研究の対象とするのは難しい。幸いに式(1)は3種のパラメータが原点から相当離れても閉曲線を生成する範囲が拡がっている。[3]ここでは、

(1)生成される閉曲線が楕円様である、

(2)パラメータの少々の変更で形状が変化しない領域が広い、

(3)描画速度がiteration回数で10^4程度でも図形が描け、かつ

(4)10^{10}まで計算してもほとんど変化しない、

という図形の性質を調べるのに都合のよい組合せ：$A=(0.0685, 0)$, $Z_0=(0.1, 0.1)$, $Z_1=\mathrm{conj}(Z_0)$とする。この組合せで描かれた楕円様の図形の性質について調べた。

3.図形の安定性

一般に漸化式で描かれる図形は少ないiteration回数では、明瞭な曲線で描かれているように見えるが、回数を多くしてゆくと次第に曲線が太くなり、やがては平面を埋め尽くす可能性がある。現象としては式(1)の図形群もそのような挙動を示すようである。ただその速度は非

常に遅い。$10^4 \times 10^4$ドットの仮想画面で調べた結果、10^{10}未満では曲線が太くなる効果は無視できる。

しかし「パラメータの微小変化が数列要素間の距離に影響する度合」は、初期値Z_0の微小変化に対して～10^{-5}で不安定である。

4. 複素共役条件：Z_1=conj(Z_0)

式(1)でAが実数のとき、

$\{Z_0=(x,y), Z_1=(x,-y)\} \Rightarrow$

$Z_2=(x^2-y^2-x+A, -2xy-y), Z_3, \ldots\ldots$

$\{Z_0'=(x,-y), Z_1'=(x,y)\} \Rightarrow$

$Z_2'=(x^2-y^2-x+A, 2xy+y)=\mathrm{conj}(Z_2)$,

$Z_3'=\mathrm{conj}(Z_3), \ldots$

である。$\{Z_0, Z_1, \ldots\}$と$\{Z_0', Z_1', \ldots\}$が同じ図形のとき$\{Z_0', Z_1', \ldots\} \equiv \{Z_1, Z_0, Z_{-1}, \ldots\}$だから、その図形は順方向に描いても逆でも同じになり、閉曲線になる可能性がある。閉曲線のときは実軸対称形である。閉曲線の数は一個とは限らない。条件Z_1=conj(Z_0)が存在すると漸化式のパラメータの微小変化が図の形状に影響する度合はおよそ2オーダ少なくなる。[3)]その効果により目的の楕円形を描く漸化式を決定することができるようになった。[4)]

5. 図形の性質

漸化式(1)によって描かれた楕円様図形の性質は以下であった。

①曲線上の任意の2点間の距離がiterationの回数の増大に比例して0に漸近する、

②曲線長がiteration回数に依存しない、

③曲線上の任意の点とその最近接点を結ぶ直線の傾きがiterationの回数を増大すると一定になる(接線が存在する)、

④重心がiteration回数に依存しない、

⑤幾何中心がiteration回数に依存しない。

これらの性質は楕円様の図形が楕円であることを示しているように思えるが、しかし重心≠幾何中心であった。その相違はiteration回数によって変化しない。漸化式で描かれる図形は有限個の点から構成されているので、点の分布が偏れば両者の相違は起こり得る。この結果は楕円様図形が見掛けは良く似ていても楕円ではない新しいタイプの図形であることを示している。

次に楕円様図形の対称性問題を考察する。漸化式によって描かれた図形の線は連続なように見えても有限個の点からなるので、至る所不連続である。従来、対称性は図形上の任意の点Pが対称操作Ⓞによって、P'=ⓄPとなり、P'なる点に対応し、このP'点が元の図形に含まれている、と定義されている。対称演算子Ⓞは幾何的操作によって規定される。しかし、その定義では楕円様図形は見掛けは対称であっても対称でないことになる。一方、何らかの{P'⇔P}という関係は存在するのである。それは弱い対称性とでも言うべきものではないかと思われる。

この観点から従来の対称性を包含する演算子表現形について発表する。

1)青山智夫,川添良幸「コンピュータ・グラフィックス」共立出版(東京,1995).

2)青山智夫,長谷川年洋,池田且将「複素力学系から生成される図形」HyperSpace,6,39～44(1997.4.1).

3)青山"http://www.esl.miyazaki-u.ac.jp/~aoyama/index.html"の複素力学系研究ノート

4)青山智夫「複素力学系の図形の性質」情報処理学会HPC研究会報告98-HPC-73(1998.10.9).