BDD表現を用いた複数優先順位を扱う項書換え系完備化推論規則*

1N−6

近藤 久† 栗原正仁‡
茨城大学工学部 北海道工業大学

1 はじめに

項項書換え系（*Term Rewriting System*:TRS）[1] が持つことが望まれる重要な性質として停止性と合流性がある．停止性は書換えが無限に続かないこと，合流性は計算結果が一意であることを保証する性質である．完備化手続き [1] は与えられた等式集合と簡約順序から停止性と合流性を満たす完備な TRS を生成する（半）アルゴリズムであり，定理自動証明などの種々の応用において非常に有用である．しかし完備化の成功は与えられた簡約順序に大きく依存し，問題点として少なくとも，1. 生成される TRS の停止性を保証するために必要な簡約順序を利用者に要求する，2. 簡約順序が不適当な場合，手続きが無限に継続する場合がある，3. 簡約順序が適切な場合でも（完備な TRS が存在するにもかかわらず）失敗する場合がある，の 3 点が挙げられる．筆者らは [2] において，上記の問題 1. の利用者への負担を軽減するために複数の簡約順序を同時に扱う完備化手続きを提案した．しかし，提案した手法でも利用者は適当と思われる簡約順序を複数個用意する必要があった．本稿では，上記 1. の問題点を解決するため，簡約順序として関数記号の集合上の（厳格）半順序（優先順位）に基づく経路順序を用いて，ある条件を満たす優先順位を自動的に（複数）生成する完備化推論規則を提案する．この際，優先順位は [3] で提案した手法によって，二分決定グラフ（*Binary Decision Diagram*:BDD）で表される．

2 準備

紙面の関係上，詳細は省略する．項書換え系及び完備化手続き，BDD，BDD を利用した TRS の停止性検証については，それぞれ [1]，[4]，[3] を参照して頂きたい．

完備化は抽象的には以下の推論規則で表される [1].

Delete:	$(\mathscr{E}\cup\{s\approx s\};\mathscr{R})\vdash(\mathscr{E};\mathscr{R})$
Compose:	$(\mathscr{E};\mathscr{R}\cup\{s\to t\})\vdash(\mathscr{E};\mathscr{R}\cup\{s\to u\})$ if $t\to_{\mathscr{R}} u$
Simplify:	$(\mathscr{E}\cup\{s\approx t\};\mathscr{R})\vdash(\mathscr{E}\cup\{s\approx u\};\mathscr{R})$ if $t\to_{\mathscr{R}} u$
Orient:	$(\mathscr{E}\cup\{s\approx t\};\mathscr{R})\vdash(\mathscr{E};\mathscr{R}\cup\{s\to t\})$ if $s\succ t$
Collapse:	$(\mathscr{E};\mathscr{R}\cup\{s\to t\})\vdash(\mathscr{E}\cup\{u\approx t\};\mathscr{R})$ if $s\to_{\mathscr{R}} u$ by $l\to r\in\mathscr{R}$ with $s\rhd l$
Deduce:	$(\mathscr{E};\mathscr{R})\vdash(\mathscr{E}\cup\{s\approx t\};\mathscr{R})$ if $s\leftarrow_{\mathscr{R}} u\to_{\mathscr{R}} t$

$\succ$ は簡約順序，$\mathscr{E}$ は任意の等式集合，$\mathscr{R}$ は $\succ$ に含まれる任意の TRS である．$\rhd$ は包含順序である．つまり，$s\rhd t$ であるとは s の部分項が t の代入例であり，逆が成り立たないとき，かつそのときに限る．簡約順序としては関数記号の集合上の優先順位（*precedence*）に基づいて定義される経路順序（*path ordering*）が良く用いられる．

二分決定グラフ（BDD）[4] は，グラフによる論理関数の表現法である．これはシャノン展開を再帰的に繰り返すことによって得られる二分木グラフから，冗長節点の削除，部分グラフの共有を行なったものであり（既約化），変数上に全順序を定めれば，与えられた論理関数を一意に表現することができる．

3 BDD表現を用いた完備化推論規則

筆者らは [3] において，辞書式経路順序（*lexicographic path ordering*:*lpo*）[1] とその BDD 表現を用いて，効率的な停止性検証システムを提案している．この手法の考え方は他の経路順序にも容易に拡張できる．[3] で提案した手法と [2] の完備化推論規則を組み合わせることによって図 1 に示す新たな推論規則を得た．以下，推論規則の定義に必要な準備を行い，順に各推論規則について述べる．

$\mathscr{F}(\mathscr{E})$ を $\mathscr{E}$ 中に現れる関数記号の集合とする．$X=\{x_{fg}|f,g\in\mathscr{F}(\mathscr{E})\}$ をそれらの関数記号から作られる順序対 $f\succ g$ に対応した論理変数の集合とする．

x_{fg} への真偽の割当によって，それぞれ $f\succ g$ か否かを表現すれば，集合 X のすべての論理変数への真偽の割当によって，$\succ$ を表現できる．ただし，$\succ$ は（厳格）半順序なので，下記の制約を満たす必要がある．

- 推移性 $f\succ g$ かつ $g\succ h$ ならば $f\succ h$,
- 非反射性 $f\not\succ f$.

これらの各制約を満たすときに限り **1** を値とする論理関数 $T(X)$，$I(X)$ は，明らかに，それぞれ以下のように与えられる．

$$T(X)=\prod_{f,g,h\in\mathscr{F}(\mathscr{R})}[\bar{x}_{fg}+\bar{x}_{gh}+x_{fh}],\quad I(X)=\prod_{f\in\mathscr{F}(\mathscr{R})}\bar{x}_{ff}$$

2 つの項 s,t を固定すると，$\succ$ に依存して定義される適当な経路順序 $\succ_{po}$ により $s\succ_{po}t$ が成り立つか否かが一意に決まる．そこで，$\succ$ を表現する X への割当が与えられたとき，$s\succ_{po}t$ が成り立てば **1**，さもなくば **0** を値とする論理関数 $po_{s,t}(X)$ を利用する経路順序に対して用意する．例えば，経路順序を lpo とすると論理関数 $lpo_{s,t}(X)$ は次のように定義できる．

定義 1 (論理関数 $lpo_{s,t}(X)$) [3] $\mathscr{T}(\mathscr{F},\mathscr{V})$ に属する 2 つの項を s,t とする．また，$s,t\notin\mathscr{V}$ のときには，それぞれ，$s\equiv f(s_1,\ldots,s_m)$，$t\equiv g(t_1,\ldots,t_n)$ とおく．

$$lpo_{s,t}(X)=\begin{cases}\mathbf{0}\text{ if }s\equiv t\text{ or }s\in\mathscr{V}\text{ or }\mathscr{V}\ni t\notin Var(s)\\ \mathbf{1}\text{ if }s\notin\mathscr{V},t\in Var(s)\text{ or }\exists i.s_i\equiv t\\ \sum_{i=1}^{m}lpo_{s_i,t}(X)\\ \quad+x_{fg}\cdot\prod_{j=1}^{n}lpo_{s,t_j}(X)\\ \qquad\qquad\text{if }f\neq g,\forall i.s_i\not\equiv t\\ \sum_{i=1}^{m}lpo_{s_i,t}(X)\\ \quad+lpo_{s_k,t_k}(X)\cdot\prod_{j=k+1}^{n}lpo_{s,t_j}(X)\\ \qquad\qquad\text{if }f=g,s\not\equiv t,\forall i.s_i\not\equiv t\end{cases}$$

ただし、k は $s_i\not\equiv t_i$ をみたす最小の i（$1\le i\le n$）である。$Var(s)$ は項 s 中に出現している変数の集合である。

例 1 $s\equiv f(h(x))$，$t\equiv g(x)$ とする．

$$lpo_{s,t}(X)\;=\;lpo_{h(x),g(x)}(X)+x_{fg}\cdot lpo_{f(h(x)),x}(X)$$

---

*Completion for Multiple Precedences with BDD Representation

†Hisashi Kondo, Dept. of Systems Engineering, Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316-8511, Japan.
‡Masahito Kurihara, Dept. of Electrical Engineering, Hokkaido Institute of Technology, Sapporo 006-8585, Japan.

Delete	$\mathscr{N} \cup \{\langle s:s,\mathbf{0},\mathbf{0},B\rangle\} \vdash \mathscr{N}$ if $B \neq \mathbf{0}$	
Orient	$\mathscr{N} \cup \{\langle s:t,B_1,B_2,B_3\rangle\} \vdash \mathscr{N} \cup \{\langle s:t,prec(B_1+B_3B),B_2,prec(B_3\bar{B})\rangle\}$ if $s \succ^B_{po} t$, $prec(B_3B) \neq \mathbf{0}$.	
Rewrite-1	$\mathscr{N} \cup \{\langle s:t,B_1,B_2,B_3\rangle\} \vdash \mathscr{N} \cup \left\{ \begin{array}{l} \langle s:t,prec(B_1\bar{B}),B_2,prec(B_3\bar{B})\rangle \\ \langle s:u,prec(B_1B),\mathbf{0},prec(B_3B)\rangle \end{array} \right\}$ if $\langle l:r,B,\ldots,\ldots\rangle \in \mathscr{N}$, $t \rightarrow_{\{l\rightarrow r\}} u$, $t \doteq l$, $prec(B_1B) \neq \mathbf{0} \vee prec(B_3B) \neq \mathbf{0}$.	
Rewrite-2	$\mathscr{N} \cup \{\langle s:t,B_1,B_2,B_3\rangle\} \vdash \mathscr{N} \cup \left\{ \begin{array}{l} \langle s:t,prec(B_1\bar{B}),prec(B_2\bar{B}),prec(B_3\bar{B})\rangle \\ \langle s:u,prec(B_1B),\mathbf{0},prec((B_2+B_3)B)\rangle \end{array} \right\}$ if $\langle l:r,B,\ldots,\ldots\rangle \in \mathscr{N}$, $t \rightarrow_{\{l\rightarrow r\}} u$, $t \rhd l$, $prec(B_1B) \neq \mathbf{0} \vee prec((B_2+B_3)B) \neq \mathbf{0}$.	
Deduce	$\mathscr{N} \vdash \mathscr{N} \cup \{\langle s:t,\mathbf{0},\mathbf{0},prec(BB')\rangle\}$ if $\langle l:r,B,\ldots,\ldots\rangle \in \mathscr{N}$, $\langle l':r',B',\ldots,\ldots\rangle \in \mathscr{N}$, $prec(BB') \neq \mathbf{0}$, $s \leftarrow_{\{l\rightarrow r\}} u \rightarrow_{\{l'\rightarrow r'\}} t$.	

図 1: BDD 表現を用いた複数の優先順位を扱う推論規則

$$= \quad [lpo_{x,g(x)}(X) + x_{hg} \cdot lpo_{h(x),x}(X)] + x_{fg}$$
$$= \quad x_{hg} + x_{fg}$$

したがって，x_{hg} あるいは x_{fg} に論理値 **1** が割り当てられたときに，$lpo_{s,t}(X)$ は論理値 **1** となる．

本推論規則は 4 つ組 $\langle s:t,B_1,B_2,B_3\rangle$（ノード）の集合 $\mathscr{N}$ 上において完備化を行う．ここで，$s:t$ は項の順序対，B_1,B_2,B_3 はラベルである．ラベルは優先順位を表す論理関数 $po_{s,t}(X)$ の BDD 表現である．$\succ^B_{po}$ は B によって表された優先順位に基づく適当な経路順序である．ラベルは順に，$s \succ^{B_1}_{po} t$，$t \succ^{B_2}_{po} s$，$s \not\succ^{B_3}_{po} t \wedge t \not\succ^{B_3}_{po} s$（向を付けることのできない等式として）と解釈する．このように表すことによって，複数の優先順位における，$s:t$ の状態（$s \rightarrow t, t \rightarrow s, s \approx t$）を同時に表現することができる．$prec(B) = BTI$ は X への割り当てによって表される二項関係が B を満たす（厳格）半順序であるならば，かつそのときに限り真を返す論理関数である．等式 $t \doteq l$ は t と l が変数名の付け換えによって構文的に等しいことを表す．$\rhd$ は包含順序である．等式集合を $\mathscr{E} = \{s_i \approx t_i\}^n_{i=1}$ とすると本推論規則への初期集合は $\mathscr{N} = \{\langle s_i:t_i,\mathbf{0},\mathbf{0},TI\rangle\}^n_{i=1}$ である．

•**Delete** は自明な等式を削除する．

•**Orient** は，もし，B によって $s \succ^B_{po} t$ かつ $prec(B_3B) \neq \mathbf{0}$ であるならば，つまり，B_3 において等式と解釈されている順序対 $s:t$ を $\succ^B_{po}$ によって向き付けることができるならば，書換え規則とする．

•**Rewrite-1** は適当な書換え規則と等式が存在するすべての優先順位において **Simplify** と **Compose** を同時に行う．次の 2 つのノードを考える．但し，ルール $l \rightarrow r$ により t は u に書換え可能であるとする．また $t \doteq l$ かつ $prec(B_1B) \neq \mathbf{0} \vee prec(B_3B) \neq \mathbf{0}$ であるとする．

$$\langle l:r,B,\ldots,\ldots\rangle \qquad (1)$$
$$\langle s:t,B_1,B_2,B_3\rangle \qquad (2)$$

$prec(BB_3) \neq \mathbf{0}$ においてはルール $l \rightarrow r$ と等式 $s \approx t$ が存在するので **Simplify** を適用できる．その結果，等式 $s \approx t$ が削除され，等式 $s \approx u$ が生成される．これは，ノード (2) を $\langle s:t,B_1,B_2,prec(B_3\bar{B})\rangle$ に変更し，ノード $\langle s:u,\mathbf{0},\mathbf{0},prec(B_3B)\rangle$ を生成することに対応する．

同様に，$prec(B_1B) \neq \mathbf{0}$ においてルール $l \rightarrow r$ と $s \rightarrow t$ が存在するので **Compose** を適用できる．その結果，ルール $s \rightarrow t$ が削除され，ルール $s \rightarrow u$ が生成される．これはノード (2) を $\langle s:t,prec(B_1\bar{B}),B_2,B_3\rangle$ に変更し，ノード $\langle s:u,prec(B_1B),\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle$ を生成することに対応する．

従って，**Simplify** と **Compose** を同時に行うことは，ノード (2) を $\langle s:t,prec(B_1\bar{B}),B_2,prec(B_3\bar{B})\rangle$ に変更し，ノード $\langle s:u,prec(B_1B),\mathbf{0},prec(B_3B)\rangle$ を生成することに対応する．

•**Rewrite-2** は **Simplify**，**Compose** に加え，**Collapse** を行う．上記と同じ 2 つのノードを用いて説明する．但し，$t \rhd l$ かつ $prec(B_1B) \neq \mathbf{0} \vee prec((B_2+B_3)B) \neq \mathbf{0}$ であるとする．$prec(B_2B) \neq \mathbf{0}$ においてルール $l \rightarrow r$ と $t \rightarrow s$ が存在するので **Collapse** を適用できる．その結果，ルール $t \rightarrow s$ が削除され，等式 $u \approx s$ が生成される．これはノード (2) を $\langle s:t,B_1,prec(B_2\bar{B}),B_3\rangle$ に変更し，ノード $\langle s:u,\mathbf{0},\mathbf{0},prec(B_2B)\rangle$ を生成することに対応する．従って，**Simplify**，**Compose**，**Collapse** を同時に適用することは推論規則 **Rewrite-2** で表現できる．

•**Deduce** は 2 つのノードから $prec(BB') \neq \mathbf{0}$ かつ $s \leftarrow_{\{l\rightarrow r\}} u \rightarrow_{\{l'\rightarrow r'\}} t$ であるならば，危険対を求め，新たなノードを生成する．

4 おわりに

本稿では，完備化手続きの問題点 1. を解決するため，BDD 表現を用いた複数の優先順位扱う完備化推論規則を提案した．今後の課題として，1. 基本アルゴリズムの設計，2. 本手法における効率的な BDD の構築法，3. インプリメント，4. 実験とその評価，が挙げられる．

謝辞

第 1 著者は本研究の一部に対し，文部省科学研究費補助金 (#09780231) による支援を受けている．第 2 著者は本研究の一部に対し，北海道工業大学特別奨励研究助成金及び文部省科学研究費補助金（#09650444）による支援を受けている．

参考文献

[1] Baader, F. and Nipkow, T., Term Rewriting and All That, CAMBRIDGE University Press(1998).

[2] 近藤，栗原，大内，複数の簡約順序のもとでの項書換えシステム完備化手続き，電子情報通信学会論文誌 D-I，Vol.J78-D-I，No.1，pp. 1–10(1995).

[3] 近藤，栗原，二分決定グラフを用いた項書換え系の停止性検証システム，人工知能学会誌，Vol.13, No.5, pp.154–166(1998).

[4] Bryant, R. E., Graph-based Algorithm for Boolean Function Manipulation, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-35, No. 5, pp.677–691(1986).