1次微分量による自由曲線・曲面の設計 -(1)理論-*

3N−1

三浦 憲二郎, 崎山 直樹, 金子 透
静岡大学工学部機械工学科計測情報講座

1 はじめに

“美しい (fair)”, あるいは“見た目に心地よい (visually pleasing)”曲面の生成は様々な分野で重要であり，特に工業デザインやスタイリング分野 では製品の良否を決定する主要因となっている．“美しい”曲面とは何か，どのような性質を持つべきかに関する明確な数学的定義は存在しないが，美しさを決定する要因として「曲率」や「曲率の変化率」が重要であることは共通の認識である．

曲線の方向ベクトルを単位4元数曲線を使って指定することが三浦 [1] によって提案された．文献 [1] では，この指定法を利用して単位4元数積分曲線 (quaternion integral:QI curve) を提案し，さらに文献 [2] では，QI曲線による3次元空間の点列の内挿法を提案している．本研究では，接線ベクトル (1次微分量) の制御法について論じる．

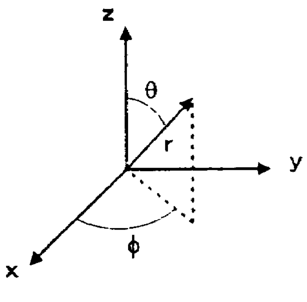

図 1: Spherical coordinate system

2 接線ベクトルの制御

空間曲線を以下のように弧長パラメータ s の関数である接線ベクトル$\boldsymbol{t}(s)$ を用いて定義することを考える:

$$\boldsymbol{C}(s) \;=\; \boldsymbol{P}_0 + \int_0^s \boldsymbol{t}(s)\,ds. \tag{1}$$

美しい滑らかな曲線を設計するためには，デザイナは $\boldsymbol{t}(s)$ を容易に指定し，また必要に応じて容易に変更できることが望ましい．そのためには3次元空間において単位接線ベクトルを簡単に指定するメカニズムが必要となる．3次元空間内のすべての単位接線の集合はガウス球 (Gaussian sphere) と呼ばれる単位球を構成する．以下に述べるように接線方向，すなわちガウス球上の一点を指定するにはいくつかの方法がある．

*Design of Free-Form Curves and Surfaces by 1st Derivatives -(1)Theory-, Kenjiro T. Miura, Naoki Sakiyama, Toru Kaneko, Shizuoka University, 3-5-1 Johoku, Hamamatsu 432, Japan

2.1 極座標

物理学においては粒子の位置を記述するために，図1に示した極座標 r, ϕ, θ が用いられる．極座標ではベクトルの方向は2つの角度 ϕ と θ によって指定される．この方法は最もコンパクトな指定法であり，2つの値 ϕ と θ のみが必要となる．しかしながら，方向を制御しようとするとこの方法が自然な性質を欠いていることが明らかとなる．すなわち，2つの方向ベクトルに対応する極座標上の2つの点 (ϕ_0, θ_0) と (ϕ_1, θ_1) を線形に内挿して得られる線分を接線ベクトルの軌跡とする，式 (1) で与えられる曲線は一般に円弧とならない．始点と終点での接線ベクトルを指定し，接線ベクトルを単純な一定の変化を指定した場合，円弧を得るのが自然である．任意の2つの接線ベクトルは1つの平面内に存在し，これらの接線ベクトルの自然な混ぜ合わせによって次節に示すように円弧が得られる．座標上の2点の指定といった自然な方法によってデザイン上重要な幾何オブジェクトの1つである円弧が得られないのは，デザイナにとって重大な難点である．

2.2 極座標と回転角

2つの接線ベクトルから円弧を生成する方法の1つは，図2のように2つの接線ベクトルに垂直なベクトルを軸として接線ベクトルを一定の角速度で回転させることである．この方法は前節で述べた極座標の内挿よりも優れた方法と考えられるが，さらに複雑な制御をしようとすると同様な問題を引き起こす．例えば，始点と終点の接線ベクトルだけでなく，中間点での接線ベクトルを指定しようとすると，一般に3つの接線ベクトルは同一平面

内に存在せず回転軸の方向を変化させなければならない．回転軸の方向を変化させることができなければ空間曲線を生成することができない．これは方向を自然な方法で制御するという前節で直面した同じ問題を引き起こす．

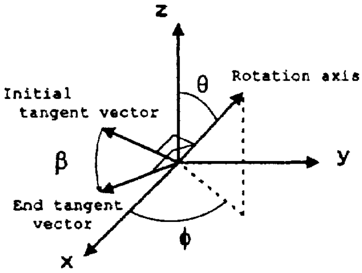

図 2: Spherical coordinates and rotation angle

2.4 節で述べるように 4 元数は任意の軸回りの回転を指定する優れた方法を提供する．4 元数は 4 つの要素から構成される数体系 (number system) である．本研究では，剛体の向き (orientation) を議論するのではなく，接線の方向 (direction) を扱っているとともに，前節で述べたように 3 つの値 (回転軸の指定に 2 つ，回転角に 1 つ) で回転を記述できるので，方向を制御するための 3 つの要素からなる新しい数体系が構築可能と考えられる．しかしながら，“数 $a+bi+cj$ を用いて除算の可能なシステム (division system) を作ることは不可能である!” ことが証明されている [3]．たとえ方向を記述できる数体系を構築できたとしても，それが division system でなければ，1 つの方向から他の方向へ動かす数が存在することを常には保証できない．これはまた別の重大な難点である．

2.3 フルネ・セレー (Frenet-Serret) の公式

フルネ・セレーの公式 (Frenet-Serret formulas) は古典微分幾何学で提案された曲率 (curvature) と捩率 (torsion) によって空間曲線を記述する手法である．公式は，

$$\frac{dt(s)}{ds} = \kappa n(s),$$
$$\frac{dn(s)}{ds} = -\kappa t(s) + \tau b(s),$$
$$\frac{db(s)}{ds} = \tau n(s),$$

で与えられる．ここで，$t(s)$ と $n(s)$, $b(s)$ はそれぞれ接線，主法線，従法線ベクトルである．曲率 κ と捩率 τ を指定し上述の微分方程式を解くことにより式 (1) の $t(s)$ が得られる．フルネ・セレーの公式を用いる利点は，空間曲線を生成するために任意の曲率と捩率を指定できることである．この利点はあるが，デザイナが曲線上の数個所で接線を指定する場合，指定された接線に関する条件を満たす κ と τ を見つけなければならないが，この処理は多大な時間を必要とし，本研究ではフルネ・セレーの公式を用いない．

2.4 4 元数 (Quaternions)

4 元数，特に単位 4 元数は回転を表すのに適しており，効率の点で，また曲線や曲面の設計のしやすさと得られる曲線や曲面の滑らかさから接線ベクトルを制御するために 4 元数を用いる．方向と向きの指定は類似しているが，まったく同じというわけではない．方向は，それ自身を軸とする回転に対して不変であるが，剛体の向きは変化する．図 3 は 1 つの方向から別の方向に接線ベクトルを変化させるために複数 (実際には無限個) の回転が可能であることを示している．したがって，1 つの方向から別の方向に接線ベクトルを変化させる回転を 1 つに決定することはできない．この事実を考慮して，QI 曲線・曲面のための新しい単位 4 元数曲線を考案する必要がある．

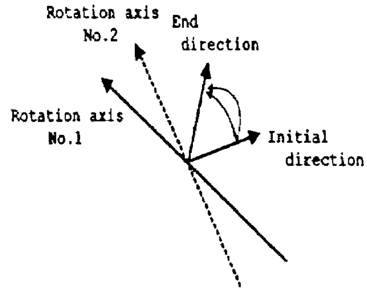

図 3: Two possible rotations changing one direction to another

3 おわりに

本研究では，4 元数を用いて定義される単位 4 元数積分曲線や，その曲面への拡張である単位 4 元数積分曲面のための接線の制御法について論じた．

参考文献

[1] 三浦 憲二郎; “単位 4 元数積分曲線,” 情報処理学会論文誌, vol.38, no.11, pp.2227-2236, 1997.

[2] 三浦 憲二郎; “単位 4 元数積分曲線による点列の内挿,” 情報処理学会論文誌, vol.39, no.7, pp.2159-2167, 1998.

[3] I.L. Kantor, and A.S. Solodovnikov, *Hypercomplex Numbers*, Springer-Verlag, 1989.