

線形部分空間と直交射影のアプローチによる 多呼種 ATM セル損失率近似モデル

鳩野 敦生[†] 川北 謙 二^{††}

本論文では、ATM (Asynchronous Transfer Mode) トラヒックの統計多重時における、バースト長が一般分布である場合 (バースト間隔は指数分布) が近似可能で、かつ、呼種数が増加しても計算の爆発を起こさない多呼種のセル損失率の近似モデルを開発した。本近似モデルは、信号解析およびパターン認識処理等に应用されている線形部分空間と直交射影のアプローチを適用した単一呼種のセル損失率近似モデルを、多呼種のセル損失率近似モデルへと拡張したものである。本拡張において、多呼種のセル到着率分布を、二項分布を重み関数とする直交関数展開 (一般化された Edegeworth 展開) により、線形部分空間への直交射影で近似した。また、待ち行列長の分布関数を線形部分空間と直交射影のアプローチで近似するために、個々の呼種のバースト長の大きさとバースト性の両者を反映した実効バースト長なる量を導入し、多呼種での待ち行列長の最大変動に対応する指数分布を求めた。本近似モデルによるセル損失率をシミュレーションと比較すると、トラヒック特性が極端に異なる 3 種類 (ピークセル速度が 100 Mbps, 20 Mbps, 2 Mbps) のトラヒックの統計多重を行った場合でさえも、バッファ長が十分に長い場合には、95%信頼区間の範囲内にあるか同一オーダの安全側の近似となった。

A Cell Loss Approximation for Heterogeneous ATM Traffic Based on the Approach of the Orthogonal Projection to the Linear Subspace

ATSUO HATONO[†] and KENJI KAWAKITA^{††}

This paper describes the approximation for cell loss probability which permits to be applied without explosion of calculations to heterogeneous ATM traffic of which burst lengths are General distribution. This approximation is an extension of that for homogeneous ATM traffic based on the approach of the orthogonal projection to a linear subspace which has been used for pattern recognitions and signal processing. In this extension, based on generalized Edegeworth theory, we approximated the distribution of cell arrival rate with an orthogonal projection to the subspace spanned with a binomial distribution. Furthermore, to approximate the distribution of queue length with an projection to the subspace, we obtained the exponential distribution corresponding to maximum fluctuation of queue lengths generated with heterogeneous ATM traffic through the effective mean burst length which is a compensation for both burst length and burstiness of each traffic type. The comparison with simulation of heterogeneous traffic multiplexed with extremely different traffic types (peak cell rates are 100 Mbps, 20 Mbps and 2 Mbps) showed that cell loss probabilities of this approximation were within or close to 95% confidence intervals

1. はじめに

ヒルベルト空間理論に基づく線形部分空間と直交射影のアプローチは、信号解析およびパターン認識処理等様々な工学の分野に应用されている。本論文では、上記のアプローチを、統計多重を行う ATM (Asynchronous Transfer Mode) ネットワークにお

けるセル損失率の近似問題に適用し、多呼種環境におけるセル損失率近似モデルを開発した。

情報ネットワークでは、ここ数年、統計多重効果を活用した高効率な情報転送を行う ATM 方式が注目されている。ATM ネットワークでは、統計多重を可能とするために、可変長の情報をセルと呼ばれる 53 バイトごとに分割し、バーストとして連続的に転送する。ATM ネットワークでは、統計多重による高効率転送を行うことができる。その反面、統計多重環境下では、バーストおよびセルの衝突によりセル損失が生じ、通信品質を維持するためにセル損失率を許容値以下に抑

[†] 株式会社日立製作所情報通信事業部
Telecommunications Division, Hitachi, Ltd.

^{††} 株式会社日立製作所システム開発研究所横浜ラボラトリー
Systems Development Laboratory, Hitachi, Ltd.

制しなければならない。そのために、ATM ネットワークでは、セル損失率を許容値以下となるようにスイッチの方式設計、バッファ容量の設計、輻輳制御の方式設計等を行うことが必要となる。

統計多重効果は、多重数が多ければ多いほど向上するので、高効率な情報転送を行うために、特性の異なるバーストラヒックを統計多重することが望まれる。以降、本論文では、特性の異なるバーストラヒックを呼種と記述する。特性の異なるバーストラヒックを統計多重するためには、特性が同じバーストラヒックにしか適用できない単一呼種のセル損失率近似モデルを、特性の異なるバーストラヒックに適用可能な多呼種のセル損失率近似モデルへと拡張することが必要である。

スイッチ等の設計においては、負荷変動に対してある程度のロバスト性を持たせるために、セル損失率を設計目標値（たとえば 10^{-10} ）より 1~2 桁ほど小さくなるようにバッファの容量設計等を行う。システム性能の限界を把握するためのモデルでは、有効数字が 2~3 桁必要となる高精度の近似が必要となるのに対して、スイッチ等の設計のための近似モデルでは、セル損失率の桁数さえ保証されていれば、安全側の近似となっている限り、工学的に十分な精度となる。したがって、工学的観点からは、呼種数が増加すると計算の爆発を起こす数学的に厳密で複雑なモデルよりも、呼種数が増加しても計算の爆発を起こさない簡単な近似モデルが望まれる。

しかしながら、バースト長が一般分布である場合が近似可能で、かつ、呼種数が増加しても計算の爆発を起こさない多呼種のセル損失率の近似モデルは、まだ開発されていない。これは、多呼種環境下では、非線形効果である呼種間の干渉効果があるためである。これまでも、バースト間隔とバースト長が指数分布に従い、マルコフ性が存在する理想的なトラヒックに対して、OR (Operations Research) のアプローチに基づき、単一呼種の近似モデルである MMPP (Markov Modulated Poisson Process) 法¹⁴⁾を多呼種の近似モデル¹⁴⁾へと拡張したセル損失率近似モデル^{4)~6)}や流体近似¹³⁾等を多呼種の近似モデルへと拡張した近似モデル^{2),3)}が提案されている。

これらの方法は、状態遷移確率マトリックスを忠実に求める数学的に厳密で複雑なモデルである。そのために、マトリックスの次元数が各呼種の多重数の積となり、呼種数が増加すると計算の爆発を起こす。たとえば、3種類の呼種をそれぞれ 10 多重するときでさえも、遷移確率マトリックスの次元数は 1000 に達する。

そのため、OR のアプローチに基づく方法では、呼種数および多重数が小さい場合にしか適用できず、多呼種モデルと称していても、ほとんどの場合、2呼種の統計多重を行った場合の解析しか行われていない^{2)~6)}。さらに、これら方法では、トラヒックにマルコフ性が存在しない LAN 等からのデータトラヒック⁷⁾を統計多重したときのセル損失率を近似できないという問題もある。これら 2つの問題により、従来の方法^{2)~6)}では、実際の情報ネットワークの設計/運用に用いることが難しい。

我々は、先に、パターン認識および信号解析に用いられている線形部分空間と直交射影のアプローチを適用し、バースト長が一般分布である場合（バースト間隔は指数分布）を近似可能な単一呼種のセル損失率近似モデルを開発した¹⁾。本論文では、この単一呼種のセル損失率近似モデルを拡張して、バースト長が一般分布である場合（バースト間隔は指数分布）を近似可能で、かつ呼種数が増加しても計算の爆発を起こさない多呼種のセル損失率近似モデルを開発した。線形部分空間と直交射影のアプローチでは、セル到着率分布を求めることと、待ち行列長の最大変動に対応する指数分布を求めることが必要である¹⁾。そこで、この拡張にあたり、以下の 2 項目の新規軸を導入した。

- (1) 多呼種のセル到着率分布を、二項分布を重み関数とする直交関数展開（一般化された Edegeworth 展開）により、線形部分空間への直交射影で近似した。
- (2) 多呼種の待ち行列長の分布関数を線形部分空間と直交射影のアプローチで近似するために、個々の呼種のバースト長の大きさとバースト性の両者を反映した実効バースト長なる量を導入し、多呼種での待ち行列長の最大変動に対応する指数分布を求めた。

線形部分空間と直交射影のアプローチでは、セル到着率分布を求めて、出線溢れ率（セル到着率が回線の伝送速度を上回る確率）を算出することが必要である¹⁾。多呼種トラヒックのセル到着率分布は、各呼種のセル到着率分布が複合した分布となるので、出線溢れ率の演算量が各呼種の多重数の積に比例して増加する。本論文では、多呼種トラヒックのセル到着率分布を Edegeworth 展開¹²⁾を行い、二項分布によって張られる線形部分空間への直交射影で近似した。Edegeworth 展開¹²⁾では、二項分布を重み関数としたとき、フーリエ展開と同様に、重み関数に随伴する正規直交関数系をヒルベルト空間における正規直交基底、任意の確率分布を正規直交基底である正規直交関数系の線

形一次結合によって張られるベクトルと見なすことができる。

また、本論文では、多呼種での待ち行列長の最大変動に対応する指数分布を大偏差原理と小数の法則に基づいて求めるにあたり、各呼種のバースト長と平均セル速度、ピークセル速度をパラメータとする実効バースト長なる量を導入した。多呼種トラヒックでは、バースト長が同じトラヒックであってもバースト性（平均セル速度とピークセル速度の比）の相違によってセル損失に対する影響が異なる。実効バースト長を導入した理由は、多呼種トラヒックの待ち行列長の最大変動に対応するモデルを、個々の呼種のバースト長の大きさとバースト性の両者を反映したモデルとするためである。

以上の検討に基づき、パターン認識および信号解析に用いられている線形部分空間と直交射影のアプローチをセル到着率分布の近似および待ち行列長の分布の近似に適用することにより、バースト長の分布が一般分布である場合に適用可能で、かつ、3呼種以上の統計多重を行ったときに計算の爆発を引き起こさない多呼種トラヒックのセル損失率近似モデルを求めた。

以下では、2章で線形部分空間と直交射影のアプローチによるセル損失率近似モデルのコンセプトを述べた。3章で Edegeworth 展開により多呼種トラヒックのセル到着率分布を二項分布による部分空間への直交射影で近似した。4章で多呼種の待ち行列長の分布関数を線形部分空間と直交射影のアプローチで近似するために、個々の呼種のバースト長の大きさとバースト性の両者を反映した実効バースト長なる量を導入し、多呼種での待ち行列長の最大変動に対応する指数分布を求めた。5章で本近似の精度を評価するために、本近似結果をシミュレーション結果と比較した。

本論文では、バースト内のセル間隔の平均の逆数をピークセル速度、1つのバースト内のセル数の平均を平均バースト長と定義した。なお、バーストが持続する時間をバースト長と記述する文献もある。以降、呼種 i の平均セル速度を $\langle v_i \rangle$ 、ピークセル速度を v_i 、平均バースト長の逆数を μ_i 、多重数を N_i 、 C_i をバースト長の平方変動係数とした。また、 ρ を出回線利用率、出回線速度を V とする。さらに、 \sum は呼種について総和を表す。

2. セル損失モデル

多呼種の場合も、単一呼種の場合と同様に統計多重後のセル到着率の時間変化は、長周期変動である包絡成分が短周期変動であるピッチ成分により変調を受け

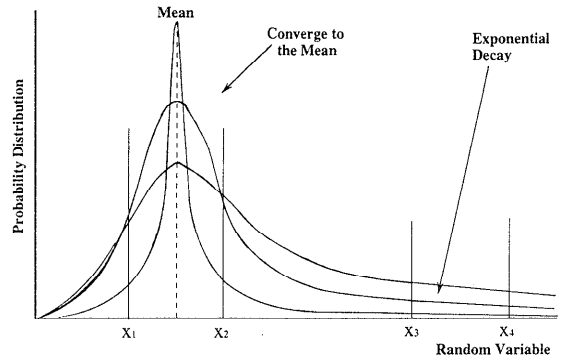


図1 大偏差原理の物理的な意味

Fig. 1 Physical concept of the large deviation principle.

た2重周期を持つ波形¹⁾と見なすことができる。したがって、多呼種の場合も、セルレベルの衝突によるセル損失率を、ピッチ成分のセル到着率が回線の伝送速度を上回り、かつ、ピッチ成分の代表パターンによる待ち行列長がバッファ長 x_0 から溢れる確率で近似することができ、また、バーストレベルの衝突によるセル廃棄率を、包絡成分のセル到着率が回線の伝送速度を上回り、かつ、包絡成分の代表パターンによる待ち行列長がバッファ長 x_0 から溢れる確率で近似することができる。したがって、セル損失の近似モデルを構成するためには、セル到着率が回線の伝送速度を上回る確率である出線溢れ率と待ち行列長の分布関数の近似を求める必要がある。

待ち行列長の分布関数の近似に用いた大偏差原理は、大数の法則が成り立つ任意の確率分布の裾の分布が指数分布に漸近するという確率論における定理である^{8),9)}。今、平均値を含む確率変数の区間 (x_1, x_2) と含まない区間 (x_3, x_4) を考える(図1)。大数の法則により、試行回数を無限大にすると、区間 (x_1, x_2) に存在する確率が1に収束し、区間 (x_3, x_4) に存在する確率が0に収束する。大偏差原理によると、平均値を含まない区間 (x_3, x_4) に存在する確率は、試行回数を増やすごとに指数関数的に減少する⁹⁾。したがって、大偏差原理により、多呼種の場合も、単一呼種の場合と同様に、待ち行列長の分布関数が指数分布に漸近することが保証されている。

すると、多呼種の場合も、線形部分空間と直交射影のアプローチ¹⁾を適用すると、セル損失率を

$$P_{\text{Loss}} \doteq \alpha_0 \{0.4 \exp(-3\beta_0 x_0) + 0.6 \exp(-\beta_0 x_0)\} + \alpha \{0.4 \exp(-3\beta x_0) + 0.6 \exp(-\beta x_0)\} \quad (1)$$

と近似することができる。式(1)において、第1項と第2項がピッチ成分の代表パターンを表し、第3項と

第4項が包絡成分の代表パターンを表す。ここで、 x_0 はスイッチのバッファ長を表し、 α_0 はセルレベルの衝突による出線溢れ率を表し、 α はバーストレベルの衝突による出線溢れ率を表す。 β_0 は、ピッチ成分による待ち行列長の最大変動に対応する指数分布のパラメータであり、 β は、包絡成分による待ち行列長の最大変動に対応する指数分布のパラメータである。

以下では、バーストレベルの衝突とセルレベルの衝突の各々について、セル損失率を求めるために必要となる、多呼種の出線溢れ率、および、多呼種での待ち行列長の最大変動に対応する指数分布のパラメータを、いかにして求めるかについて述べる。

3. 多呼種の出線溢れ率

本章では、多呼種トラヒックのバーストレベルの衝突の出線溢れ率とセルレベルの衝突の出線溢れ率を求めるために、Edgeworth 展開¹²⁾により多呼種トラヒックのセル到着率分布を二項分布による部分空間への直交射影で近似した。

3.1 バーストレベルの衝突の出線溢れ率

バーストを流体と見なしたとき、多呼種でのバーストレベルの衝突の出線溢れ率は、同一のセルの到着速度となるバーストの衝突のすべての組合せパターンを考慮すると、

$$\alpha \equiv \frac{\sum_{u>V} \dots \sum (u-V)U(m_1, \dots, m_j)}{\sum N_k(v_k)} \quad (2)$$

となる。ここで、 $U(m_1, \dots, m_j)$ は、バーストトラヒックの種類を束ねたセル到着率の分布関数であり、

$$\begin{aligned} U(m_1, \dots, m_j) \\ \equiv \prod_{i=1}^j N_i C_{m_i} (\langle v_i \rangle / v_i)^{m_i} (1 - \langle v_i \rangle / v_i)^{N_i - m_i} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。 m_i は、バーストトラヒックの種類 i のセル到着率を表す。 u は、セル到着率であり、

$$u = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_j v_j \quad (4)$$

となる。式(2)の分子の多重和は、 $(u-V) > 0$ となる m_1, m_2, \dots, m_j の組合せについて行う。 $N_1 \dots N_j$ は、各呼種の多重数を表す。 j は、呼種の数を表す。式(2)の組合せパターン数も各呼種の多重数の積となるので、呼種数が大きくなると計算の爆発を引き起こす。そこで、本論文では、Edgeworth 展開¹²⁾を行い、多呼種のセル到着率の分布関数の近似に部分空間への直交射影のアプローチを適用する。

Edgeworth 理論¹²⁾によると、重み関数として正規分布、ポアソン分布、二項分布、ガンマ分布等を選ぶと、周期関数に対するフーリエ展開と同様に、任意の確率分布を重み関数と重み関数に随伴する正規直交関数系で展開することができる。したがって、Edgeworth 理論¹²⁾を適用すると、多呼種のセル到着率の分布関数は、重み関数に随伴する正規直交関数系によって張られるヒルベルト空間における高次元ベクトルとなる。また、展開係数は、任意のベクトルからの正規直交関数系に対する直交射影となる。

パターン認識処理等では、展開係数が0に近い正規直交基底を削除した部分空間で近似可能であることが知られている¹¹⁾。そこで、本論文では、多呼種トラヒックのセル到着率分布 $U(m_1, \dots, m_j)$ をセル到着率 u の関数と見なしてEdgeworth 展開¹²⁾を行い、展開係数が0に近い正規直交基底を削除した部分空間への射影で近似した。このEdgeworth 展開¹²⁾において、重み関数を被展開分布に近い分布を選ぶと、展開係数が0に収束する割合が早くなる。被展開分布であるセル到着率分布は、二項分布が複合した分布であり、かつ、確率変数の定義域が $[0 \leq x \leq \text{最大値}]$ である。したがって、セル到着率分布は、正規分布、ポアソン分布、ガンマ分布等よりも二項分布に近いことが期待できる。そこで、本論文では、二項分布を重み関数に選び、二項分布によるEdgeworth 展開¹²⁾を行い、セル到着率分布を二項分布によって張られる部分空間への直交射影で近似した。

以降、 M をセル到着率 u の平均値、 Max をセル到着率 u の最大値、 σ^2 をセル到着率 u の分散、 $E^3(k-mp)$ をセル到着率 u の mp のまわりの3次モーメントとする。また、 v を定義域の分割定数、 m を定義域の分割数、 k を $[u/v]$ 、 p を (M/Max) とする。さらに、 $[a]$ はガウス記号であり、 a を超えない最大の整数を表す。

多呼種トラヒックのセル到着率分布 $U(u)$ は、二項分布とそれに随伴する直交関数系で

$$\begin{aligned} U(u) = P(k, m, p) \{ & 1 + a_1 L_{m,1}(k, p) \\ & + a_2 L_{m,2}(k, p) \\ & + a_3 L_{m,3}(k, p) + \dots \} \end{aligned} \quad (5)$$

とEdgeworth 展開できる。このとき、 $P(k, m, p)$ は、二項分布

$$P(k, m, p) = {}_m C_k p^k (1-p)^{m-k} \quad (6)$$

を表す。また、二項分布に随伴する直交関数系 $L_{m,i}(k, p)$ は、

$$L_{m,i}(k,p)P(k,m,p) = \frac{\partial^i P(k,m,p)}{\partial p^i} \quad (7)$$

となる. さらに, a_i は, 各正規直交基底への射影長である i 次の展開係数を表す. 3 次までの展開係数は,

$$a_1 = \frac{M/v - mp}{1!m} \quad (8)$$

$$a_2 = \frac{\sigma^2/v^2 - mp(1-p)}{2!m(m-1)} \quad (9)$$

$$a_3 = \frac{1}{3!m(m-1)(m-2)} \left\{ \begin{aligned} &E^3(k-mp)/v^3 - 3(1-2p)\sigma^2/v^2 \\ &+ 2mp(1-p)(1-2p) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる.

式 (5) において, 1 次の項は展開に用いる二項分布の平均値がセル到着率 u の平均値と一致すると消え, 2 次の項は二項分布の分散がセル到着率 u の分散と一致すると消える. したがって, 展開に用いる二項分布の分割定数 v と分割数 m をセル到着率 u の平均値と分散が一致するように決めると, 無条件に 1 次の項と 2 次の項を削除できる. しかしながら, 分割数 m は, 整数でなければならないので端数が生じる. そこで, 本論文では, 工学的には安全側の近似であることが望まれるので, m の値を切り上げて

$$m = [M(\text{Max} - M)/\sigma^2 + 1] \quad (11)$$

$$v = \text{Max}\sigma^2/M(\text{Max} - M) \quad (12)$$

とした. このとき, 端数誤差の上限値は, それぞれ,

$$a_1 < p/m \quad (13)$$

$$a_2 < p(1-p)/\{2m(m-1)\} \quad (14)$$

となる. 統計多重を行う場合は, 通常 $\text{Max} \gg M$, $(\sigma/M)^2 \leq 1$ であるから, セル到着率の最大値と平均値の比が十分に大きく,

$$(\text{Max}/M - 1) \gg (\sigma/M)^2 \quad (15)$$

となるので, m が十分に大きくなる. したがって, 統計多重を行う場合は, m の値を切り上げたことによる端数誤差を無視できる.

また, 二項分布による Edgeworth 展開において, 展開係数は, 次数 i の階乗および m の $i-1$ 乗に比例して小さくなるので, m が十分に大きい場合には, 3 次以上の展開項をも無視できる. したがって, 統計多重を行う場合には, 3 次以上の展開項をも無視できる.

以上の検討に基づき, 本論文では, 多呼種トラヒックのセル到着率分布を, 二項分布によって張られる 1 次元の部分空間へ直交射影を行い,

$$\alpha \doteq \left\{ \sum_{kv \geq V}^m (kv - V)_m C_k (M/\text{Max})^k \cdot (1 - M/\text{Max})^{m-k} \right\} / M \quad (16)$$

と近似した. この近似によれば, 多呼種トラヒックの出線溢れ率を, セル到着率の最大値, 平均値, 分散から求めることができる. これらの量は, 個々のセル到着率の最大値, 平均値, 分散の総和と等しくなるから, 多呼種の場合でも容易に求めることができ,

$$\text{Max} = \sum N_i v_i \quad (17)$$

$$M = \sum N_i \langle v_i \rangle \quad (18)$$

$$\sigma^2 = \sum N_i \langle v_i \rangle (v_i - \langle v_i \rangle) \quad (19)$$

となる.

3.2 セルレベルの衝突の出線溢れ率

セルレベルの衝突に関する出線溢れ率 α_0 は,

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{m_1 > 0 \cdots m_j > 0}^{N_1 \cdots N_j} \cdots \sum \{(m_1 + \cdots + m_{j-1}) \cdot V U(m_1, \cdots, m_j)\}}{\sum N_i \langle v_i \rangle} \quad (20)$$

となる. 二項分布の Edgeworth 展開を行うために, 二項分布のパラメータ v と m を平均値と分散が一致するように決めると,

$$m = \frac{\left\{ \sum N_i V \right\} \left\{ \sum N_i \langle v_i \rangle \right\}}{\sum N_i \langle v_i \rangle (V - \langle v_i \rangle)} \quad (21)$$

$$v = \frac{\sum N_i \langle v_i \rangle (V - \langle v_i \rangle)}{\sum N_i \langle v_i \rangle} \quad (22)$$

となる. 統計多重を行う場合は, 通常 $V \gg \langle v_i \rangle$ であるから,

$$m \doteq \sum N_i \quad (23)$$

$$v \doteq V \quad (24)$$

と近似できる. また, 統計多重を行う場合は, 通常 $\sum N_i \gg 1$ であり, m が十分に大きくなる. したがって, セルレベルの衝突の出線溢れ率は, 二項分布のみによる 1 次元の部分空間へ直交射影で近似でき, 最終的に,

$$\alpha_0 \equiv (1/2)\rho \left(1 - 1/\sum N_i\right) \quad (25)$$

となる。

以上、二項分布による Edgeworth 展開により、セルレベルの衝突のセル到着率分布を二項分布による 1 次元の部分空間への直交射影で近似すれば、呼源の総数と出回線利用率から出線溢れ率を求めることができる。

4. 待ち行列長分布の近似

大偏差原理によると、任意の確率分布の裾が表している稀にしか生じない確率事象は、基本解が指数関数となる微分方程式で表現された確率過程でモデル化できる。大偏差原理等の数学上の定理を用いてモデル化を行うときには、工学的観点からすると、定理から演繹的に近似を導くアプローチ¹⁰⁾よりも、適用対象の物理的な意味が明確であるアプローチが望ましい。

稀にしか生じない待ち行列長が生じるような状況では、多呼種トラヒックにおいても、単一呼種の場合¹⁾と同様に、待ち行列長の最大変動を引き起こすトラヒックパターンが支配的となる。以上の考えに基づき、包絡成分とピッチ成分ごとに、大偏差原理が成り立つ領域における待ち行列長の変動を最大衝突パターンでモデル化した。

4.1 包絡成分のモデル

多呼種トラヒックにおいても、単一呼種の場合¹⁾と同様に、待ち行列長の最大変動を引き起こす二状態系流体モデルは、すべての呼源からのバーストが衝突した期間と何も到着しない期間が交互に反復する最大衝突パターンである (図 2)。そこで、多呼種トラヒックにおいても、バーストの衝突数が十分に大きい場合での待ち行列長の変動を、すべての呼源からのバーストが衝突した高トラヒック期間と何も到着しない低トラヒック期間が反復する最大衝突パターンでモデル化した (図 2)。

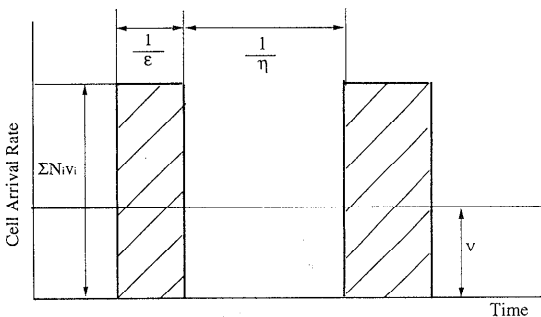


図 2 最大衝突モデル

Fig. 2 Maximum collision model.

バーストの衝突数が十分に大きい場合には、小数の法則¹²⁾により、高トラヒック期間が指数分布であると見なすことができる。また、ポアソン過程の重ね合わせた確率過程が再びポアソン過程となるので、多呼種トラヒックにおいてもバーストの到着間隔が指数分布となる。したがって、多呼種トラヒックの場合にも、高トラヒック期間と低トラヒック期間が指数分布であると見なして定式化することができる。

バーストの衝突数が十分に大きい場合での待ち行列長の変動を、最大衝突パターンでモデル化するためには、高トラヒック期間のセル到着率、低トラヒック期間のセル到着率、高トラヒック期間の平均余命、低トラヒック期間の平均余命の 4 つのパラメータが必要となる。このうち、最大衝突パターンの高トラヒック期間では、すべての呼源からのバーストが衝突しているので、セル到着率は、各呼種のピークセル速度の総和でモデル化できる。このとき、高トラヒック期間の待ち行列長の増加率 v_1 は、 $v_1 = \sum (N_i v_i) - V$ となる。また、低トラヒック期間の待ち行列長の減少率 v_2 は、何も到着しないので、単一呼種の場合と同様に伝送速度 V となる。

高トラヒック期間の平均余命をモデル化するためには、バースト持続時間の平均余命が必要である。多呼種の場合には、バースト持続時間に対しバースト性に関する補正を行う必要がある。その理由は、同じバースト持続時間であっても、バースト性 (平均セル速度とピークセル速度との比率) が大きければ大きい呼種ほど待ち行列長の変動に対する影響が大きくなるためである。そこで、我々は、モデル化を行うにあたり、実効バースト長と等価バースト長なる量を新たに導入した。

まず、バースト性とバースト長の両方の待ち行列長の変動に対する影響を 1 次元のスカラー量で表現するために、本論文では、実効平均バースト長を

$$(1 - \langle v_s \rangle / v_s) / \mu_s \quad (26)$$

と定義した。この実効平均バースト長 (26) は、単一呼種の待ち行列長の最大変動に対応する指数分布のパラメータ¹⁾ γ_s

$$\gamma_s = \frac{2\mu_s v_s (1 - \rho)}{(1 + c_s^2)(1 - V/N_s v_s)(v_s - \langle v_s \rangle)} \quad (27)$$

において、バースト性が大きければ大きいほど、かつ、バースト長が長ければ長いほど大きくなる因子である。ここで、 μ_s^{-1} が単一呼種の平均バースト長、 c_s^2 が単一呼種のバースト長の平方変動係数、 N_s が単一呼種の多重数、 v_s が単一呼種のピークセル速度、 $\langle v_s \rangle$ が

単一呼種のピークセル速度を表す。

次に、全体のバースト長とバースト性の両方を待ち行列長の変動に対する影響を表すために、全体の実効バースト長の平均余命 μ_e^{-1} を求めた。全体の実効バースト長の 2 次モーメント $\langle x^2 \rangle$ は、

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\sum N_i \lambda_i (1 - \langle v_i \rangle / v_i)^2 (1 + C_i^2) / 2\mu_i^2}{\sum N_i \lambda_i} \quad (28)$$

となる。また、全体の実効平均バースト長は、

$$\langle x \rangle = \frac{\sum N_i \lambda_i (1 - \langle v_i \rangle / v_i) / \mu_i}{\sum N_i \lambda_i} \quad (29)$$

となる。ここで、 λ_i は、バーストトラフィックの種類 i のバースト到着率である。すると、全体の実効バースト長の平均余命 μ_e^{-1} は、

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{\sum N_i \lambda_i (1 - \langle v_i \rangle / v_i)^2 (1 + C_i^2) / 2\mu_i^2}{\sum N_i \lambda_i (1 - \langle v_i \rangle / v_i) / \mu_i} \quad (30)$$

となる。バースト到着率 λ_i は、

$$\lambda_i = \frac{\langle v_i \rangle \mu_i}{1 - \langle v_i \rangle / v_i} \quad (31)$$

となるので、実効バースト長の平均余命は、

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{\sum N_i \langle v_i \rangle \frac{(1 - \langle v_i \rangle / v_i)(1 + C_i^2)}{2\mu_i}}{\sum N_i \langle v_i \rangle} \quad (32)$$

と表すことができる。

最後に、全体のバースト性を考慮に入れて、多呼種でのバースト長の等価平均余命 μ_q^{-1} を定義した。単一呼種の場合は、平均セル速度とピークセル速度との比率でバースト性を表すことができた。この考えを拡張して、全体のバースト性は、平均セル速度の総和とピークセル速度の総和との比率でバースト性を表すことができる。すると、多呼種でのバースト長の等価平均余命は、

$$\frac{1}{\mu_q} = \frac{\sum N_i \langle v_i \rangle \frac{(1 - \langle v_i \rangle / v_i)(1 + C_i^2)}{2\mu_i}}{\left(\sum N_i \langle v_i \rangle \right) \left(1 - \sum N_i \langle v_i \rangle / \sum N_i v_i \right)} \quad (33)$$

となる。この量は、単一呼種の場合および平均セル速度とピークセル速度との比率が無限大となるときには、バースト長の平均余命と一致する。

単一呼種の最大衝突パターン¹⁾では、高トラフィック

期間の任意の時点から平均持続時間を、バースト長の平均余命に比例し、セル到着率に反比例するものとしてモデル化した。これと同様の考え方に基くと、多呼種の最大衝突パターンでは、高トラフィック期間の任意の時点から平均持続時間を、等価バースト長の平均余命に比例し、セル到着率に反比例するものとしてモデル化できる。このとき、平均持続時間は、 $\varepsilon^{-1} = \{\mu_q \sum N_i v_i\}^{-1}$ となる。任意の時点から何も到着しない期間の平均持続時間は、指数分布の無記憶性より、平均寿命と一致する。すると、利用率 ρ が不変となる条件より、この期間の平均持続時間は、 $\{\mu_q \sum N_i \langle v_i \rangle / (1 - \sum N_i \langle v_i \rangle / \sum N_i v_i)\}^{-1}$ となる。

Anick の流体近似¹³⁾により、最大衝突パターンに対応する二状態系流体モデルを解くと、このパターンに対応する指数分布のパラメータ β は、最終的に

$$\beta = \frac{\mu_q (1 - \rho)}{\left(1 - \sum N_i \langle v_i \rangle / \sum N_i v_i \right) \left(1 - V / \sum N_i v_i \right)} \quad (34)$$

となる。

以上に述べたように、待ち行列長の最大変動を引き起こす指数分布のパラメータは、平均セル速度の総和、ピークセル速度の総和、バースト長の等価平均余命で求めることができるので、呼種数が増加しても計算の爆発を引き起こすことがない。

4.2 ピッチ成分の最大衝突パターン

ピッチ成分のモデルでは、固定長のセル自体を流体と見なす¹⁾ので、等価セル長は μ_0^{-1} は、

$$\frac{1}{\mu_0} = \frac{\sum N_i \langle v_i \rangle (1 - \langle v_i \rangle / V) (1 - v_i / V) / 2}{\left(\sum N_i \langle v_i \rangle \right) \left(1 - \rho / \sum N_i \right)} \quad (35)$$

となる。

ピッチ成分に対しても、最大衝突パターンにより、パラメータが最小となる指数分布を求める。セルが衝突している期間の待ち行列長の増加率 v_1 は、 $\sum N_i V - V$ となり、何も到着しない期間の待ち行列長の減少率 v_2 は、伝送速度 V となる。任意の時点からの高トラフィック期間の平均持続時間は、 $[\mu_0 \sum N_i V]^{-1}$ となる。また、低トラフィック期間の平均持続時間は、利用率 ρ が不変となる条件より、 $[\mu_0 (\sum N_i \langle v_i \rangle) / (1 - \rho / \sum N_i)]^{-1}$ となる。したがって、Anick の流体近似により、最大衝突パターンに対応する二状態系流体モデルを解くと、ピッチ成分における最大衝突パターンに対応する指数分布のパラメータ β_0 は、

$$\beta_0 = \frac{\mu_0(1-\rho)}{\left(1 - 1/\sum N_i\right) \left(1 - \rho/\sum N_i\right)} \quad (36)$$

となる。

5. シミュレーションとの比較

4章までの検討により、ヒルベルト空間における部分空間と直交射影のアプローチにを適用し、式(1)、(16)、(25)、(34)、(36)により、多呼種のセル損失率の近似値を求めることを可能とした。本近似は、呼種数が1となる場合に、文献1)の単一呼種のセル損失近似と一致する。本章では、本近似が実際の使用に耐えうるに十分な精度となるかどうかを(モンテカルロ)シミュレーションと比較することにより検証する。

5.1 検証方法

近似式の検証は、実際の運用で用いる $10^{-5} \sim 10^{-10}$ 程度のセル損失率で、シミュレーションにより、直接、行うことが最も望ましい。しかしながら、ATMの場合は、セルが断続的に到着するバーストラフィックとなり、 $10^{-5} \sim 10^{-10}$ 程度のセル損失率を引き起こすためには、 $10^7 \sim 10^{12}$ 程度の反復が必要となる。したがって、シミュレーションでは、ATMにおいて問題となっている $10^{-5} \sim 10^{-10}$ 程度のセル損失率を引き起こす待ち行列長の振舞いの解析やセル損失率の評価を行うことは、きわめて困難である。そこで、本論文では、大偏差原理を用いた外挿法により、 10^{-4} 程度のセル損失率までのシミュレーション結果から、ATMで問題となっている $10^{-5} \sim 10^{-10}$ 程度のセル損失率に対して本近似モデルが実際の使用に耐えうる精度となるかどうかを検証する。

大偏差原理により、稀にしか生じない現象の確率分布が指数関数に漸近することが数学的に保証されているので、バッファ長が十分に長い領域においては、セル損失率曲線も指数関数に漸近する。したがって、片対数のグラフ上では、セル損失率曲線が、大偏差原理が有効となる領域において、ほとんど直線となる。他方、本論文で提案した近似式も、上記の条件の下指で指数関数に漸近し、片対数のグラフ上でバッファ長が十分に長い領域においてはほとんど直線となる。したがって、片対数のグラフにおいて、近似モデルの漸近線とシミュレーションの漸近線の双方を、シミュレーションにより信頼のおける結果を得ることができる 10^{-4} レベルのセル損失率から $10^{-5} \sim 10^{-10}$ 程度のセル損失率へと外挿することによって、ある程度、近似誤差を把握することができる(図3)。

本近似モデルを開発した目的は、ATMスイッチの

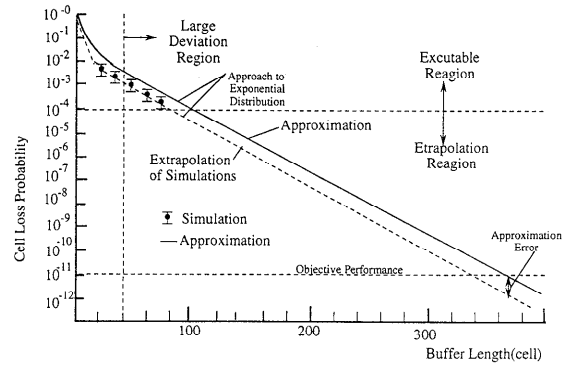


図3 外挿による近似の検証

Fig. 3 Verification through extrapolation.

方式設計、バッファ容量の設計、輻輳制御の方式設計等を行うことにある。システム性能の限界を把握するためのモデルでは、有効数字が2~3桁必要となる高精度の近似が必要となるのに対して、設計のための近似モデルでは、有効数字が1桁以下であっても、安全側の近似となっている限り、近似誤差がたかだか1桁以内にとどまれば、実際の使用に耐えうるに十分な精度となる。

さらに、シミュレーションでは、レジスタの特性を利用した合同乗算法により疑似乱数を発生させている。合同乗算法による数列は、32ビットの計算機において、発生回数が 2^{32} (4.3×10^9)よりも十分に小さい(たとえば 2^{16} (6.6×10^4)以下)場合には、相関を無視することができ、疑似乱数と見なすことができるが、発生回数が大きくなるにつれて、相関を無視できなくなり、疑似周期数列になってしまう。したがって、近似モデルの結果が、シミュレーションの結果と有効数字が2桁一致したからといって、近似モデルの有効数字が本当に2桁であるとは限らない。この観点から、設計のための近似モデルの検証では、近似モデルによるセル損失率の桁数および傾向がシミュレーションによる結果の桁数および傾向と一致していれば、安全側の近似となっている限り、工学的に十分な精度となる。

以上の理由に基づき、本論文では、 10^{-4} レベルのセル損失率において、近似モデルの結果とシミュレーションによる結果を比較し、この結果を外挿することによって、 $10^{-5} \sim 10^{-10}$ 程度のセル損失率における近似誤差を把握した。

5.2 数値例

本検証におけるシミュレーションでは、バースト長の分布の代表として、平方変動係数が1のときに指数分布となり、平方変動係数が0に近づくにつれて固定分布に漸近する Γ 分布と固定分布を選んだ。現実の

データトラフィックの平方変動係数は、ファイル転送等の固定長の packets を分割したバースト（平方変動係数が 0 に対応）と電子メール等の可変長の packets を分割したバースト（平方変動係数が 1 に対応）からなるので、0 と 1 の間にあると想定できる。また、バースト内のセル間隔の分布を固定分布とした。

この検証において、呼種 1 は、高速 LAN のトラフィックを想定し、ピークセル速度を 100 Mbps、平均セル速度を 10 Mbps、平均バースト長を 100 セルとした。呼種 2 は、中速 LAN のトラフィックを想定し、ピークセル速度を 20 Mbps、平均セル速度を 1.5 Mbps、平均バースト長を 40 セルとした。呼種 3 は、フレームリレーのトラフィックを想定し、ピークセル速度を 2 Mbps、平均セル速度を 0.6 Mbps、平均バースト長を 20 セルとした。

比較は、呼種 1 の多重数を 3、呼種 2 の多重数を 48、呼種の種類 3 の多重数を 30 とした高負荷の場合（回線利用率 80%）と、呼種 1 の多重数を 2、呼種 2 の多重数を 24、呼種 3 の多重数を 20 とした中程度の負荷の場合（回線利用率 53%）、呼種 1 の多重数を 2、呼種 2 の多重数を 16、呼種 3 の多重数を 10 とした低負荷の場合（回線利用率 33%）について行った。本比較に用いた数値例を従来の OR に基づくアプローチ^{2)~6)}による方法で求めようとすると、バースト長の分布が指数分布に従う理想の場合でさえも、遷移確率マトリックスの次元数が、高負荷の場合に 4320、中程度の負荷の場合に 960、低負荷の場合に 320 となり、計算の爆発を引き起こす。バースト長の分布が指数分布以外の場合には、遷移確率マトリックスの次元数がより一段と大きくなる。特に、バースト長の分布を固定分布とした場合には、遷移確率マトリックスの次元数は、原理的に無限大となる。したがって、従来の OR に基づくアプローチ^{2)~6)}により、本比較に用いた数値例を求めることは、きわめて困難である。

図 4 は、すべての呼種のバースト長の分布を指数分布とした場合の結果である。図 5 は、すべての呼種のバースト長の分布を固定分布とした場合の結果である。図 6 は、呼種 1 の平方変動係数を 0.75、呼種 2 の平方変動係数を 0.5、呼種 3 の平方変動係数を 0.25 とした場合の結果である。

これら図 4、図 5、図 6 の結果によると、本近似によるセル損失率は、バースト長の分布の分布にかかわらず、バッファ長が 100 セルを超える領域において、バースト長が固定分布で利用率が 0.33 である場合（図 5）を除き、95%信頼区間内にあり、かつ、本近似による結果とシミュレーションによる結果が両者ともにほと

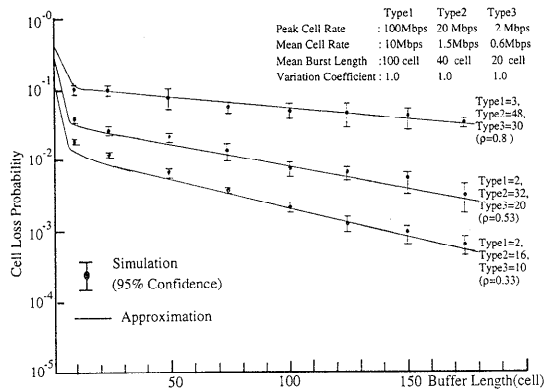


図 4 シミュレーションとの比較 (指数分布)

Fig. 4 Comparison with simulation (exponential).

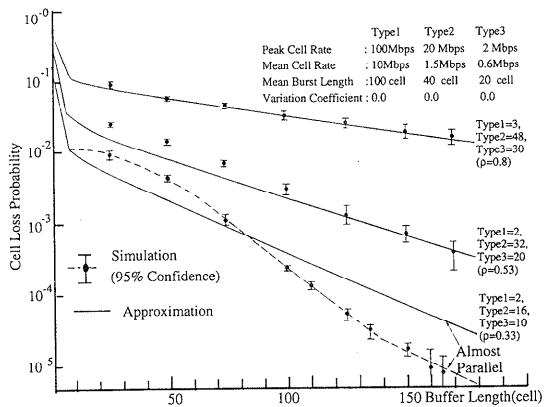


図 5 シミュレーションとの比較 (固定分布)

Fig. 5 Comparison with simulation (constant).

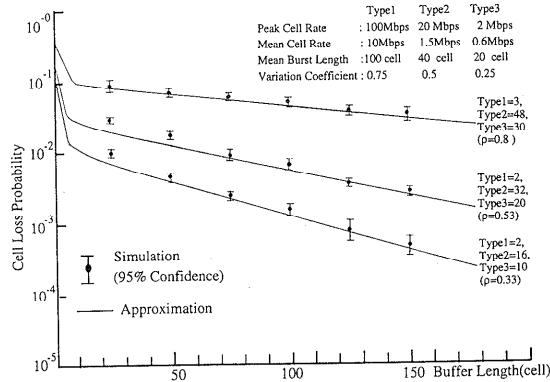


図 6 シミュレーションとの比較 (ガンマ分布)

Fig. 6 Comparison with simulation (Γ).

んど直線となった。したがって、大偏差原理により、本近似による結果を 10^{-4} のレベルのセル損失率から 10^{-10} のレベルに外挿しても、本近似が成り立つことが期待できる。また、多重数が減少（利用率が低下）するにつれて、本近似による結果とシミュレーション

による結果とが一致するバッファ長が大きくなる傾向が見られる。この現象は、本近似が多重数が多くなればなるほど精度が向上する Edgeworth 理論および小数の法則による近似を用いているために生じたものであると考えられる。

さらに、上記の例外であるバースト長が固定分布で利用率が 0.33 である場合においても、バッファ長が 125 セルを超える領域において、本近似による結果とシミュレーション結果が同じオーダーにあり、かつ、ほとんど平行な直線となった。したがって、大偏差原理により、本近似による結果を 10^{-5} のレベルのセル損失率から 10^{-10} の領域に外挿しても、セル損失率の近似誤差は、たかだか 1 桁以内にとどまる。

以上の理由により、本近似モデルは、ATM スイッチの方式設計、バッファ容量の設計、輻輳制御の方式設計等を行う目的に対して、工学的に十分な精度がある。

6. ま と め

本論文では、線形部分空間と直交射影のアプローチにより、バースト長が一般分布である場合に適用可能な多呼種のセル損失率近似方法を開発した。バースト長が Γ 分布、および、固定分布に従う場合において、本近似によるセル損失率は、バッファ長が十分に長い場合に、シミュレーション結果の 95% 信頼区間の範囲内にあるか同一オーダーの安全側の近似となった。本近似を用いると、呼種の数が増えても指数関数と二項分布の演算および四則演算でセル損失率を近似できる。

謝辞 本研究の機会を与えてくださった当社システム開発研究所第 4 部の大町部長（現在、当社情報通信事業部開発センタ長）、本研究を勧めていただいた当社システム開発研究所第 4 部の水原主任研究員（現在、当社情報通信事業部網管理システム部部長）さらには、本研究に関し種々と議論していただいた当社システム開発研究所第 7 部の和田部長（現在、当社情報・通信開発本部分散システム開発センタ長）、第 4 部の佐々木部長と第 4 部主任研究員の宮崎博士ならびに当社情報通信事業部の方々に深く感謝いたします。また、査読者の方々には、本論文のまとめ方に関して貴重なご助言をいただき感謝します。

参 考 文 献

- 1) 鳩野敦生, 川北謙二, 水原 登: バースト長が任意分布である場合に適用可能なセル廃棄率評価モデルの提案, 情報処理学会論文誌, Vol.36, No.10, pp.2476-2486 (1995).
- 2) Sen, P., Maglaris, B., Rakili, N.E. and

Anastassiou, D.: Models for Packet Switching of Variable Bit Rate Video Sources, *IEEE JSAC*, Vol.7, No.5, pp.865-869 (1989).

- 3) Blaabjerg, S., Andersson, H., Andersson, H.: Approximating the Heterogeneous Fluid Queue with a Birth-Death Fluid Queue, *IEEE Trans. Commun.*, Vol.43, No.5, pp.1884-1887 (1995).
- 4) Xiong, Y. and Bruneel, H.: A Tight Upper Bound for the Tail Distribution of the Buffer Contents in Statistical Multiplexer with MMBP Traffic Sources, *Proc. IEEE Globcom'93*, pp.767-770 (1993).
- 5) Wang, S.S. and Silvester, J.A.: A Discrete-time Performance Model for Integrated Service and Multiplexers, *Proc. IEEE Globcom'93*, pp.757-761 (1993).
- 6) Kim, Y.H. and Un, C.K.: Performance Analysis of Statistical Multiplexing for Heterogeneous Bursty Traffic in an ATM Network, *IEEE Trans. Commun.*, Vol.42, No.2/3/4, pp.745-753 (1994).
- 7) Shoch, J.F. and Hupp, A.: Measured Performance of an Ethernet Local Network, *Comm. ACM*, Vol.23, No.12, pp.771-721 (1980).
- 8) Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed., Vol.2, John Wiley, New York (1971).
- 9) 小谷真一: 大偏差原理とはなにか, 数理科学, Vol.2, No.380, pp.5-8 (1995).
- 10) Simonian, A. and Guibert, J.: Large Deviations Approximation for Fluid Queue Fed by a Large Number of On/Off Source, *IEEE JSAC*, Vol.13, No.6, pp.1017-1027 (1995).
- 11) 長尾 真 (編): パターン認識と図形処理, 2 章, 岩波書店 (1983).
- 12) 竹内 啓: 確率分布の近似, 教育出版 (1975).
- 13) Anick, D., et al.: Stochastic Theory of a Data-handling with Multiple Sources, *BSTJ*, Vol.61, No.8, pp.1971-1894 (1982).
- 14) Heffes, H. and Lucantoni, D.: A Markov Modulated Characterization of Packetized Voice and Data Traffic and Related Statistical Multiplexer Performance, *IEEE JSAC*, Vol.4, No.6, pp.856-868 (1986).

(平成 8 年 4 月 16 日受付)

(平成 8 年 12 月 5 日採録)



鳩野 敦生 (正会員)

昭和 57 年電気通信大学電気通信学部物理工学科卒業。昭和 59 年同大修士課程物理工学専攻修了。同年 (株) 日立製作所入社。同社システム開発研究所を経て、現在、同社情報通信事業部において ATM ネットワークの開発に従事。IEEE, 電子情報通信学会各会員。



川北 謙二 (正会員)

昭和 53 年東京工業大学工学部制御学科卒業。昭和 55 年同大修士課程システム科学専攻修了。同年 (株) 日立製作所入社。同社システム開発研究所において通信ネットワークの研究開発に従事。現在、同研究所ネットワーク基盤センター主任研究員。電子情報通信学会会員。