平面グラフで非交差な林を求めるアルゴリズム[1]

4C−2

増渕 大輔　草苅 良至　西関 隆夫
東北大学大学院情報科学研究科

1 はじめに

平面グラフで指定されたk個の端子対間の互いに点素で長さの総和が最小なk本の道を求める問題はVLSIの一層配線問題等に応用可能である．この問題は一般にはNP−完全であるので[2, 1]，効率の良いアルゴリズムはありそうにない．ここで，グラフの辺はVLSIの配線領域に対応している．しかし，端子の位置に制限が加えられているとき，k本の内素な道の組で長さの和が最小となるものを効率良く求めることが期待される．例えば，k個の端子組集合が平面グラフの2つの周上のみに与えられたとき，各端子組を連結するk本の木の組，即ち林で各木が互いに内素なものを効率良く求めるアルゴリズムが知られている[4, 5]．

一方，k個の端子対が2連結平面グラフGの2つの周上のみに与えられたとき，長さの総和が最小なk本の"非交差道"を求めるアルゴリズムが知られている[6]．ここで"非交差道"とは点や辺を共有するかもしれないが，互いに平面上では交差しない道のことである．1つの配線領域に複数の配線が可能なモデルでは，VLSIの一層配線問題は非交差道問題に帰着する．

本稿では，k個の端子組集合$\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$が2連結平面グラフ$G$の1つの周上のみに与えられたとき，各端子組を連結するk本の木の組$\mathcal{T}=\{T_1,T_2,\cdots,T_k\}$，即ち林で各木の枝が互い"非交差"で長さの総和が最小なものを$O(nm^3)$時間で求めるアルゴリズムを与える．ここで，nは2連結平面グラフGの点数であり，mは端子の総数である．

2 準備

本章では，用語と問題の定義を与える．本稿で扱うグラフ$G=(V,E)$は2連結平面グラフであるとする．また，Gの各辺$e\in E$には非負の重みが付いているとする．グラフGの点集合を$V(G)$，辺集合を$E(G)$と書くこともある．また，有界でない面を外面fと呼び，外面の周を外周Bと呼ぶ．

木で連結したい点（端子）の組を**端子組**と呼ぶ．k組の端子組集合を$\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$と書く．また，$1\le i\le k$なる各$i$に対し，端子組$U_i$が$l_i$個の端子から成っているとき，$U_i=\{u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{il_i}\}$と書く．また，すべての端子集合を$U$と書くこともある，即ち$U=\{u_{ij}|1\le i\le,1\le j\le l_i\}$である．本稿では，すべての端子$u_{ij}\in V(G)$は$G$の外面$B$上にあるとする．

また，端子u_{11}から外面を反時計周りにたどったとき，現れる端子の列を$S(\mathcal{U})=S(U)=s_1,s_2,\cdots,s_{|U|}$とする．各端子$u\in U$が$S(U)$の$j$番目であるとき，即ち$u=s_j$であるとき，端子$u$の**順位**は$j$であるといい，$rank(u)=j$と書く．このとき，端子の番号を入れ変えることにより，$S(U)$は次の$(U1)$および$(U2)$を満たすとして一般性を失わない．

(U1) $rank(u_{11})<rank(u_{21})<\cdots<rank(u_{k1})$

(U2) $1\le i\le k$なる各iに対し，

$$rank(u_{i1})<rank(u_{i2})<\cdots<rank(u_{il_i})$$

なお，$1\le j\le l_i$なる各jに対し，端子組U_iにおける端子$u_{ij}\in U_i$の次の端子を$u_{i(j+1)}\in U_i$とする．ただし，$j=l_i$のときには，$j+1=1$とする．

また，$l\le i\le k$なる各iに対し，端子組U_iのすべて端子を連結する木T_iと書く．したがって，U_iの各端子u_{ij}はすべて木T_iの点集合$V(T_i)$に含まれる．また，木T_iの葉は，U_iの端子から成り，端子以外の葉を含まないとする．T_iの長さ$length(T_i)$は，T_iの各枝の長さの総和であるとする．$1\le i\le k$なる各iに対し，U_iを連結するすべての木T_iの中で長さが最小であるような木を最小木と呼ぶ．最小木すべての集合を$\mathcal{T}$と書く．

非交差であるような木の集合$\mathcal{T}$を非交差林と呼ぶ．$\sum_{i=1}^{k}length(T_i)$が最小となるような非交差林を，特に最小非交差林と呼ぶ．明らかに，非交差林$\mathcal{T}$内のすべての木が最小木であるならば，$\mathcal{T}$は最小非交差林である．

端子の配置に対して，次の補題が成り立つ．

補題 2.1 端子組集合$\mathcal{U}$が非交差林$\mathcal{T}$を持つ必要十分条件は，任意の2つの端子組$U_i,U_j\in\mathcal{U}$に対して，次の(1)あるいは(2)が成り立つことである．

(1)(直列条件)

$$rank(u_{i1})<rank(u_{il_i})<rank(u_{j1})<rank(u_{jl_j})$$

(2)（並列条件）$1\le i'\le l_i$なるi'が存在して，

$$rank(u_{ii'})<rank(u_{j1})<rank(u_{jl_j})<rank(u_{i(i'+1)})$$

端子組U_iの連続する2端子を任意の最短路でそれぞれ結ぶ．これらl_i本の最短路を各端子で連結して得られる部分グラフのうちで，l_i本の道が互いに交差しないものを**最短路閉路**と呼びC_iと書く．最短路閉路C_iと木T_iに関して次のようなことがわかる．また，$\mathcal{U}$に対するk個の最短路閉路の集合で，互いに非交差で長さの総和が最小のものを$\mathcal{C}$と書く．

補題 2.2 C_iを$U_i\in\mathcal{U}$に対する最短路閉路とし，$G(C_i$をC_iの内部の点から誘導されるGの部分グラフとする．このとき，$G(C_i)$内に，Gにおいての最小木$T_i\in\mathcal{T}_i^*$が存在する．

---

[1]An Algorithm for Finding a Noncrossing Forest
Daisuke Masubuchi, Yoshiyuki Kusakari, and Takao Nishizeki
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
Aramaki Aza Aoba 05, Aobaku Sendai 980-8579,

3 アルゴリズム

非交差閉路集合$\mathcal{C}$を効率良く求めるアルゴリズムの概要を次に示す.

3.1 直列な端子組集合に対する$\mathcal{C}$の求め方

$k'(\leq k)$ 組の端子組集合$\mathcal{U}'(\subseteq \mathcal{U})$ が適切であるとは, $\mathcal{U}'$内の任意の 2 つの端子組が直列条件を満たすときで, かつそのときに限るとする. 本節では適切な端子組集合u'に対し最短路閉路$\mathcal{C}$を求めるアルゴリズムを与える.

各端子組 $U_{i'} \in \mathcal{U}'$に対し, 最初の端子 $u_{i'1}$と最後の端子 $u_{i'l_{i'}}$を結ぶ最短路を $P_{i'}$とする. k'本の $P_{i'}$で互いに非交差なものを $\mathcal{F}_{in}$とする. 適切な k'個の端子対集合に対し, 互いに交差しない k'本の道集合で長さの総和が最小な林を求める線形時間アルゴリズムが高橋らにより与えられている [6]. $\mathcal{F}_{in}$ で囲まれる G のいくつかの部分グラフ $\mathcal{F}_{in}(i')$ に各端子組を結ぶ最短路閉路が存在することがいえる.

また $\mathcal{F}_{in}(i')$ において $u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{il_i}$をこの順に結ぶ最短路 $\mathcal{F}^{i'}_{out}$もまた高橋らのアルゴリズムを応用することにより, $O(|V(\mathcal{F}_{in}(i')|)$ 時間で求めることができる. したがって, $1 \leq i' \leq k'$なるi'に対し, 全ての $\mathcal{F}^{i'}_{out}$を求めることは, $O(|V(G)|)$ 時間即ち $O(n)$ 時間で求めることができる.

$1 \leq i' \leq k'$なる i'に対し, 全ての $\mathcal{F}^{i'}_{out}$を合わせたグラフを $\mathcal{F}_{out}$とする.

2つの林$\mathcal{F}_{in}$および$\mathcal{F}_{out}$を合わせたグラフを$\mathcal{F}(\mathcal{U}')$とする.

$\mathcal{F}$があるとき, 各端子を連結にする最短路閉路 C_iを求めることは, 最親共有祖先問題を解くことにより, $O(n)$ 時間で求めることができる.

3.2 一般の端子組集合に対する$\mathcal{C}$の求め方

一般の端子組集合に対して, 前述のアルゴリズムと世代木を用いて非交差閉路集合$\mathcal{C}$の求め方を与える.

世代木 GTの節点はk個あるとし, 各節点は端子組に対応させる. また, 世代木の親子関係は, 直列接続であるものを兄弟, 並列接続であるものを親子とする.

任意の同じ世代の端子組集合は適切であり, 世代の小さい方から前節のアルゴリズムを適用する必要はない. このことに注意すれば, 世代に関しての分割統治法を用いて $O(n \log m)$ 時間で, 全ての最短路閉路が求まる.

3.3 $G(C_i)$ における最小木 U_iの求め方

Bern はグラフの指定された一つの面上にのみl個の端子が配置されているときに $O(nl^3)$ 時間で端子を葉としたスタイナ木を求めるアルゴリズムを与えている [3]. このアルゴリズムを用いれば, すべての最小木を $O(nm^3)$ 時間で求めることができる.

4 まとめ

本稿では, k個の端子組集合$\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$が2連結平面グラフ$G$の1つの周上のみに与えられたとき, 各端子組を連結するk本の木の組$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$, 即ち林で各木の枝が互い "非交差" で長さの総和が最小なものを求める問題を扱った. 最短路閉路集合を $O(n \log m)$ 時間で求める方法を与えた. また, 最短非交差林を $O(nm^3)$ で求める方法を与えた.

参考文献

[1] M. R. Kramer and J. V. Leewen: "Wirerooting is NP-complete," RUU-CS-82-4, Department of Computer Science, University of Utrecht, Utrecht, the Netherlands(1982).

[2] J. F. Lynch: "The equivalence of theorem proving and the interconnection problem," ACM SIGDA Newsletter, 5, 3,pp. 31-36(1975).

[3] M.bern: "Faster Exact Algorithms for Steiner Trees in Planar Networks" NETWORKS, Vol.20. 109-120(1990).

[4] 鈴木 均, 赤間 長浩, 西関 隆夫: "平面グラフで林を求めるアルゴリズム- 各ネットの端子が指定された二つの面の両方にまたがる端子がある場合," 信学論 (A), J71-A, 10,pp. 1897-1905(1988-10)

[5] 鈴木 均, 赤間 長浩, 西関 隆夫: "平面グラフで林を求めるアルゴリズム- 各ネットの端子が指定された二つの面の片方にある場合," 信学論 (A), J71-A, 12,pp. 2163-2171(1988-12)

[6] 高橋 淳也, 鈴木 均, 西関 隆夫: "平面グラフで長さの総和最小な非交差道を求めるアルゴリズム," 信学論 (A),J77-A, 3, pp.447-459,(1994-3)

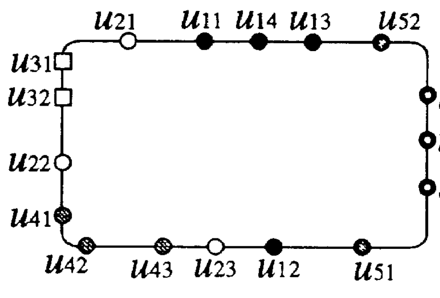

図 1:$k = 6$ の入力例

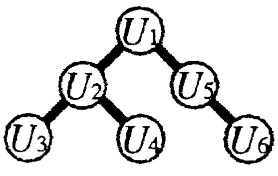

図 2:図 1 のグラフに対する世代木

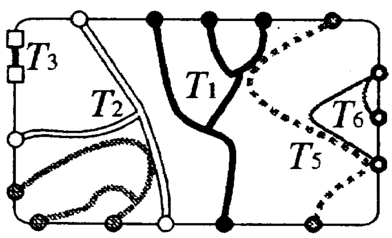

図 3:出力例